- Corrigé type de l'Examen
- Ondes et Vibrations -

Questions de Cours :

① L'expression de l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = P_0 \cos(\overline{\omega} t) \quad \cdots (*)$$

Il s'agit d'une équation différentielle de seconde ordre à coefficients constantes avec second membre :

La solution générale s'écrit :

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t) \quad (0{,}5)$$

$x_H(t)$: est la solution homogène.
$x_p(t)$: est la solution particulière.

* La solution homogène :

Elle correspond à la solution de l'éq^{t} différentielle (*) sans second membre.

$$\ddot{x}_H + \omega_0^2 x_H = 0 \quad (0{,}5)$$

La solution de l'éq^{t} (*) est la solution trouvée pour les oscillations libres non-amorties

$$x_H(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (0{,}5)$$

* La solution particulière (Régime permanent)

La solution particulière correspondant s'écrit

$$x_p(t) = A_f \cos(\overline{\omega} t + \beta) \quad (0{,}5)$$

II- Amplitude A_f ?:

pour des raisons pratiques, il est commode d'utiliser la notation complexe.

$$x_p(t) = A_f . e^{i(\bar{\omega} t + \beta)} \quad — ① \qquad 0,25$$

$$P_0 \cos(\bar{\omega} t) \rightsquigarrow P_0 . e^{i\bar{\omega} t} \quad — ② \qquad 0,25$$

- calculons la derivée premiere puis la derivée seconde de $x_p(t)$

$$\dot{x}_p(t) = i A_f . \bar{\omega}\, e^{i(\bar{\omega} t + \beta)} \qquad 0,25$$

$$\ddot{x}(t) = -A_f . \bar{\omega}^2 . e^{i(\bar{\omega} t + \beta)} \quad — ③ \qquad 0,25$$

On remplace dans (*), les eqts ① ② ③ / (*). On trouve:

$$-A_f . \bar{\omega}^2 . \cancel{e^{i\bar{\omega} t}} . e^{i\beta} + \omega_0^2 A_f \cancel{e^{i\bar{\omega} t}} . e^{i\beta} = P_0 . \cancel{e^{i\bar{\omega} t}}$$

$$A_f \left[\omega_0^2 - \bar{\omega}^2\right] = P_0 . e^{-i\beta} \sim ④ \qquad 0,25$$

le conjugé de cette equation est:

$$A_f \left[\omega_0^2 + \bar{\omega}^2\right] = P_0 . e^{+i\beta} \sim ⑤ \qquad 0,25$$

④ × ⑤ :

$$A_f^2 (\omega_0^2 - \bar{\omega}^2)^2 = P_0^2 \qquad 0,25$$

$$A_f^2 = \frac{P_0^2}{(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2)^2} \Leftrightarrow A_f = \frac{P_0}{|\omega_0^2 - \bar{\omega}^2|} \qquad 0,25$$

On devise par ω_0^2

$$A_f = \frac{P_0}{\omega_0^2} \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_0}\right)^2\right|} = A_{St} . A' \qquad 0,25$$

A_{St}: Amplitude Statique

A': facteur de Amplification

(4) Déphasage β :

de l'eqt (4) :

$$A_f(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2) = P_0 \cdot e^{-i\beta}$$

d'Après formule d'Euler : $e^{-i\beta} = \cos\beta - i\sin\beta$

D'où :

$$A_f(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2) = P_0(\cos\beta - i\sin\beta) \quad 0{,}25$$

Donc :

$$A_f(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2) = P_0\cos\beta \quad — (6)$$

$$0 = -\sin\beta \quad — (7)$$

$\dfrac{(7)}{(6)}$ 0,25 0,25

$$\operatorname{tg}\beta = 0 \rightsquigarrow \beta = \operatorname{artg}(0) \rightsquigarrow \beta = 0$$

0,25 0,25

La solution homogène s'écrit :

$$x_p(t) = A_f \cdot \cos(\bar{\omega}t + \beta)$$

$$= A_{St} \cdot A' \cos(\bar{\omega}t)$$

$$x_p(t) = \frac{P_0}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_0}\right)\right|} \cos(\bar{\omega}t) \quad 0{,}25$$

La solution générale de l'eqt (*) s'écrit :

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t)$$

$$x(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi) + A_{St}\cdot A' \cos(\bar{\omega}t)$$

0,25

EXERCICE :

I. L'équation différentielle du mvt :

1. Energie cinétique :

$$E_{C_T} = E_C(m) + E_C(M) = \frac{1}{2} J(m)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M\dot{x}^2$$

$$J(m) = \frac{1}{2} m R^2 \quad ; \quad \dot{x} = R\dot{\theta}$$

$$E_{C_T} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m R^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2$$

$$E_{C_T} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m R^2 + M R^2\right)\dot{\theta}^2$$ 01

2. Energie potentielle :

$$E_{P_T} = E_P(\text{masse}) + E_P(\text{ressort})$$

$$= \overset{=0}{E_P(m)} + \overset{=0}{E_P(M)} + E_P(k)$$

$$= E_P(k) = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k R^2 \theta^2$$ 0,75

3. Lagrangien :

$$\mathcal{L} = E_{C_T} - E_{P_T}$$ 0,25

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m R^2 + M R^2\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k R^2 \theta^2$$ 0,25

4. formalisme de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$$

(0,25) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{1}{2} mR^2 + MR^2\right)\ddot{\theta}$ (0,5)

(0,25) $-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = kR^2\theta$ (0,5)

(0,25) $-\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = -cR^2\dot{\theta}$ (0,5) / $D = \frac{1}{2} c\dot{x}^2$ (0,25)

$\dot{x} = R\dot{\theta}$ (0,25)

$D = \frac{1}{2} cR^2\dot{\theta}^2$

$$\left(\frac{1}{2} mR^2 + MR^2\right)\ddot{\theta} + cR^2\dot{\theta} + kR^2\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{cR^2}{\frac{1}{2} mR^2 + MR^2}\right)\dot{\theta} + \left(\frac{kR^2}{\frac{1}{2} mR^2 + MR^2}\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2c}{m + 2M}\right)\dot{\theta} + \left(\frac{2k}{m + 2M}\right)\theta = 0$$ (0,5)

$$2\lambda = \frac{2c}{m + 2M} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{m + 2M}$$ (0,25)

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{m + 2M} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m + 2M}}$$ (0,25)

II _ Résolution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \theta(t=0) = \pi/5 \\ \dot{\theta}(t=0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta(t) = A \cdot e^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \varphi) \;\to ① \\ \dot{\theta}(t) = -\lambda A \cdot e^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \varphi) - A e^{-\lambda t}\omega_a \sin(\omega_a t + \varphi) \;\to ② \end{cases}$$

/ $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$: pseudo pulsation

① (0,25)

② (0,5)

Remplaçons t par 0 dans l'eqt ① et ②

$$-\theta(t=0) = A.e^{0}\cos(\omega_a(0)+\varphi) \Leftrightarrow \theta(t=0) = A.\cos\varphi = \frac{\pi}{5}$$ ③

0,25

$$\dot\theta(t=0) = -\lambda.A.e^{0}\cos(\omega_a(0)+\varphi) - A.e^{0}\omega_a \sin(\omega_a(0)+\varphi)$$

$$= 0$$ 0,25

$$\dot\theta(t=0) = -\lambda.A.\cos\varphi - A.\omega_a \sin\varphi = 0$$

$$tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \Rightarrow \sin\varphi = tg\varphi.\cos\varphi$$ 0,25

$$-\lambda \underbrace{\boxed{A.\cos\varphi}}_{\pi/5} - \omega_a.\underbrace{\boxed{A.\cos\varphi}}_{\pi/5}\,tg\varphi = 0$$

$$-\lambda.\cancel{\pi/5} - \omega_a.\cancel{\pi/5}.tg\varphi = 0$$

$$-\lambda - \omega_a.tg\varphi = 0 \Rightarrow tg\varphi = -\frac{\lambda}{\omega_a}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\lambda}{\omega_a}\right)$$ 0,25

De l'equation ③ :

$$A.\cos\varphi = \pi/5 \Rightarrow A = \frac{\pi}{5\cos\varphi}$$

0,25

$$A = \frac{\pi}{5\cos\left[\operatorname{arctg}\left(-\frac{\lambda}{\omega_a}\right)\right]}$$

La solution s'écrit :

$$\theta(t) = A.e^{-\lambda t}\cos[\omega_a t + \varphi]$$

0,5

$$\theta(t) = \frac{\pi}{5\cos\left[\operatorname{arctg}(-\lambda/\omega_a)\right]}\,e^{-\lambda t}\cos\left[\omega_a t + \operatorname{arctg}\left(-\frac{\lambda}{\omega_a}\right)\right]$$

II - La Méthode de Conservation de l'energie mécanique

$$E_m = E_{C_T} + E_{P_T} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}mR^2 + MR^2\right]\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

0,25

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

0,25

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}mR^2 + MR^2\right]\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} + \frac{1}{2}kR^2\frac{d\theta^2}{dt} = 0$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}m\cancel{R^2} + M\cancel{R^2}\right](\cancel{2}\dot{\theta}\ddot{\theta}) + \cancel{\frac{1}{2}}k\cancel{R^2}(\cancel{2}\theta\dot{\theta}) = 0$$

0,25

$$\left(\frac{1}{2}m + M\right)\ddot{\theta} + k\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{k}{\frac{1}{2}m + M}\right)\theta = 0$$

0,5

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k}{m + 2M}\right)\theta = 0 \Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{2k}{m + 2M}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m + 2M}}$$

0,25

Les Ondes :

$\lambda = 20\ Cm = 0,2\ m$

$f = 20\ HZ$

$\varphi = 0$

Direction de propagation :

Dans le sens des (x) positif $\Rightarrow$ Onde Regressive

Le signe est $+$ entre (x) et (v) / $(x + v)$

1 Amplitude de la propagation de l'onde :

$$S(x,t) = S_0 . Cos\left(k(x \pm vt) + \varphi\right)$$

Onde Regressive avec phase nulle $\varphi = 0$

$$S(x,t) = S_0\ Cos\left(k(x + vt)\right)$$

$$S(0,0) = 2\ Cm = 0,02\ m$$

$$= S_0\ Cos\left(k(0 + v0)\right) = 0,2\ m \quad 0,5$$

$$S_0\ \underbrace{Cos(0)}_{=1} = 0,02\ m$$

$$S_0 = 0,02\ m \quad 0,5$$

2 Le nombre de la longueur d'onde (k)

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 0,5 ; D'après la figure $(\lambda = 0,2\ m)$

$= \frac{2\pi}{0,2}$

$k = 10\pi$ 0,5

③ La célérité (v) :

$$v = \lambda f = 0{,}2 \cdot 20 = 4 \; m/s$$ 0,25 0,5

Donc l'equation de la propagation d'onde s'écrit :

$$S(x,t) = S_0 \cos\left(k(x \pm vt) + \varphi\right)$$

$$S(x,t) = 0{,}02 \cos\left(10\pi(x + 4t)\right)$$ 0,5

0,25 0,25