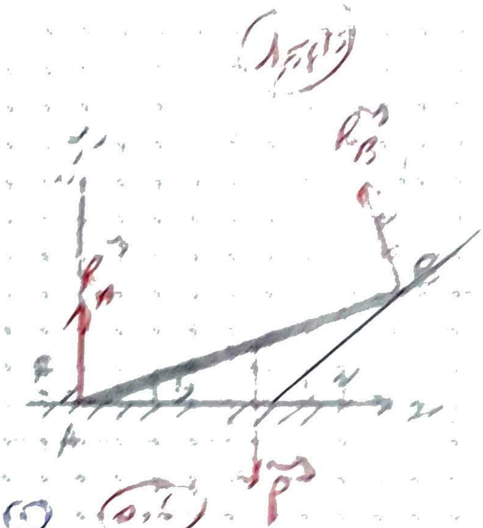
Exo n°1 (6 Pts)

calcul de l'angle $\theta$ à l'équilibre




$\sum \vec{F}/_x = \vec{0}$ (0,5) ; $\sum \vec{F}/_y = \vec{0}$ (0,5)

La projection sur les axes du repère

Sur l'axe $Ox$ : $F - R_B \sin\alpha = 0$ ...(1) (0,5)

Sur l'axe $Oy$ : $-P - R_A + R_B \cos\alpha = 0$ ...(2) (0,5)

(1) $\Rightarrow R_B = \dfrac{F}{\sin\alpha} = 51,38N$ (0,5)

(2) $\Rightarrow R_A = P - \dfrac{F\cos\alpha}{\sin\alpha} = 63,3N$ (0,5)

$\sum M/_B(\vec{F_i}) = 0 \Rightarrow P\dfrac{L}{2}\cos\theta + FL\sin\theta - R_A L\cos\theta = 0$ (0,5) (0,5)

$\Rightarrow (\dfrac{P}{2} - R_A)\cos\theta = -F\sin\theta$

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{-(\frac{P}{2} - R_A)}{F}$

$tg\,\theta = \dfrac{-(\frac{P}{2} - R_A)}{F} \Rightarrow \theta = Arctg\left(\dfrac{-(\frac{P}{2} - R_A)}{F}\right)$

$\theta = 22,7°$ (0,5)

Exo n°2 (7 Pts)

On détermine le moment d'inertie de la plaque au point G, puis par le théorème de Huygens on le déduit au point O

les plans $(xGz)$ et $(yGz)$ sont des plans de symétrie, alors tous les produits d'inertie sont nuls. $I_{Gxy} = I_{Gxz} = I_{Gyz} = 0$ ; (0,5)

la matrice d'inertie en G est diagonale.

Masse de la plaque : $m = \sigma\, 4ab$ (0,5)

Nous avons un solide plan $z=0 \Rightarrow I_{Gzz} = I_{Gxx} + I_{Gyy}$ (0,5)

$I_{Gxx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2)\, dm = \int_{(S)} y^2\, dm = \int_{(S)} y^2 \sigma\, ds = \sigma \int_{(S)} y^2 dx\, dy$ (0,5)

$$I_{Gxx} = \sigma \int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{b} y^2\, dy = \sigma\, 2a\, \frac{2}{3} b^3 = \underbrace{\sigma\, 4ab}_{m} \frac{b^2}{3} = \frac{m b^2}{3} \quad 0{,}5$$

$$I_{Gyy} = \int_{(S)} (x^2 + z^2)\, dm = \quad 0{,}5 \quad \int_{(S)} x^2\, dm = \int x^2 \sigma\, ds = \sigma \int x^2\, dx\, dy$$

$$= \sigma \int_{-a}^{+a} x^2\, dx \int_{-b}^{b} dy = \sigma \frac{2}{3} a^3\, 2b = \sigma\, 4ab \frac{a^2}{3} = \frac{m b^2}{3} \quad 0{,}5$$

$$I_{Gzz} = I_{Gxx} + I_{Gyy} = \frac{m}{3}(a^2 + b^2) \quad 0{,}5$$

La matrice d'inertie au point G s'écrit : $I_G(S) = \begin{bmatrix} \frac{mb^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Mb^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{3}(a^2+b^2) \end{bmatrix}$

on déduit par le théorème de Huygens:

$$I_{Oxx} = I_{Gxx} + m(y_G^2 + z_G^2) \quad 0{,}5$$

$$= \frac{mb^2}{3} + m b^2 = \frac{4}{3} m b^2$$

$$I_{Oxy} = I_{Gxy} + m\, x_G y_G \quad 0{,}5$$

$$= 0 + m a . b$$

$$= m\, a b$$

$$I_{Oyy} = I_{Gyy} + m(x_G^2 + z_G^2) \quad 0{,}5$$

$$= \frac{m a^2}{3} + m a^2 = \frac{4}{3} m a^2$$

$$I_{Oxz} = I_{Gxz} + m\, x_G z_G \quad 0{,}5$$

$$= 0 + m a . 0 = 0$$

$$I_{Ozz} = I_{Gzz} + m(x_G^2 + y_G^2) \quad 0{,}5$$

$$= \frac{m}{3}(a^2 + b^2) + m(a^2 + b^2)$$

$$= \frac{4}{3} m (a^2 + b^2)$$

$$I_{Oyz} = I_{Gyz} + m\, y_G z_G$$

$$0 + m b . 0 \quad 0{,}5$$

$$= 0$$

La matrice d'inertie au point O est égale à

$$I_O(S) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} m b^2 & -mab & 0 \\ -mab & \frac{4}{3} m a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} m (a^2 + b^2) \end{bmatrix}.$$

Exo n°3 : 7 pts

$\vec{OA} = a\vec{x}_1$ ; $\vec{AB} = b\vec{z}_2$ et $\vec{AP} = r\vec{z}_2$

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ : repère fixe.

$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ : en rotation tel que $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ et $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$

$\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\theta}\,\vec{z}_1$

$R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en rotation tel que $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$ et $\psi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$

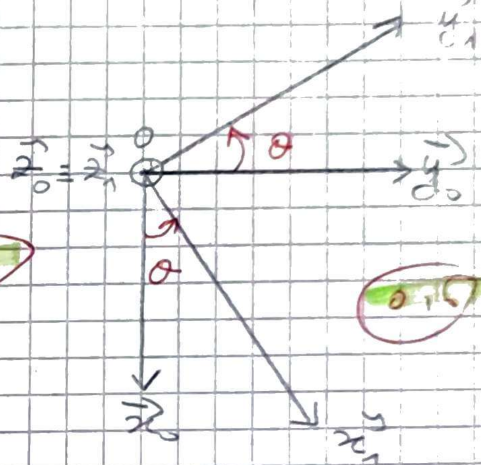
$\vec{\Omega}_2^1 = \dot{\psi}\,\vec{y}_1$

1) Matrice de passage :

Matrice de passage de $R_0$ vers $R_1$

$$\begin{Bmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ +\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{R_0 \to R_1}} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{Bmatrix}$$

0,5

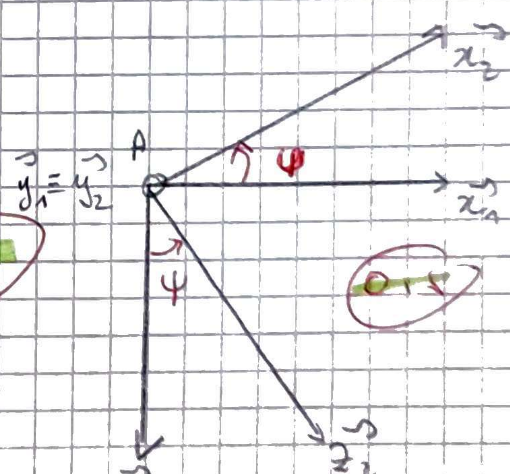



0,5

Matrice de passage de $R_2$ vers $R_1$

$$\begin{Bmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix}}_{P_{R_2 \to R_1}} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{Bmatrix}$$

0,5




0,5

2) calcule de $\vec{\Omega}_2^0$ puis $\vec{V}^0(B)$ et $\vec{\gamma}^0(B)$ par dérivation direct et par la cinématique du solide

a) vitesse instantanée de rotation $\vec{\Omega}_2^0$ 1,5 pt

$$\vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\psi}\,\vec{y}_1 + \dot{\theta}\,\vec{z}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}_{R_1}$$

0,5 0,5 0,5

b) $\vec{V}^0(B)$ par dérivation directe : 2 pts

0,5

Nous avons : $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \begin{Bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{Bmatrix}_{R_2} = \begin{Bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} + \begin{Bmatrix} b\sin\psi \\ 0 \\ b\cos\psi \end{Bmatrix}_{R_1} = \begin{Bmatrix} a + b\sin\psi \\ 0 \\ b\cos\psi \end{Bmatrix}_{R_1}$

0,5

par dérivation nous avons:

$$\vec{V}^0(B) = \frac{d^0 \vec{OB}}{dt} = \frac{d^1 \vec{OB}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OB} \quad 0{,}5$$

$$\vec{V}^0(B) = \begin{cases} b\dot{\psi}\cos\psi \\ 0 \\ -b\dot{\psi}\sin\psi \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} a+b\sin\psi \\ 0 \\ b\cos\psi \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} b\dot{\psi}\cos\psi \\ (a+b\sin\psi)\dot{\theta} \\ -b\dot{\psi}\sin\psi \end{cases} \quad 0{,}5$$

- $\vec{V}^0(B)$ par cinématique du solide 2,5 (2$^{me}$ méthode)

Nous pouvons écrire $\vec{V}^0(B) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{AB}$ 0,5

Nous avons: $\vec{V}^0(A) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OA}$ et $\vec{V}^0(A) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} 0 \\ a\dot{\theta} \\ 0 \end{cases}_{R_1}$ 0,5 0,5

car $\vec{V}^0(O) = \vec{0}$ Nous avons aussi:

$$\vec{V}^0(B) = \begin{cases} 0 \\ a\dot{\theta} \\ 0 \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{cases} \wedge \begin{cases} b\sin\psi \\ 0 \\ b\cos\psi \end{cases} = \begin{cases} b\dot{\psi}\cos\psi \\ (a+b\sin\psi)\dot{\theta} \\ -b\dot{\psi}\sin\psi. \end{cases} \quad 0{,}5$$

b) $\vec{\gamma}^0(B)$ par dérivation: 1,5

par dérivation nous avons: $\vec{\gamma}^0(B) = \frac{d^0 \vec{V}^0(B)}{dt} = \frac{d^1 \vec{V}^0(B)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(B)$ 0,5

$$\vec{\gamma}^0(B) = \begin{cases} b\ddot{\psi}\cos\psi - b\dot{\psi}^2\sin\psi \\ (a+b\sin\psi)\ddot{\theta} + b\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi \\ -b\ddot{\psi}\sin\psi - b\dot{\psi}^2\cos\psi \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} b\dot{\psi}\cos\psi \\ (a+b\sin\psi)\dot{\theta} \\ -b\dot{\psi}\sin\psi \end{cases}_{R_1} \quad 0{,}5$$

$$= \begin{cases} b\ddot{\psi}\cos\psi - b\dot{\psi}^2\sin\psi - (a+b\sin\psi)\dot{\theta}^2 \\ (a+b\sin\psi)\ddot{\theta} + 2b\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi \\ -b\ddot{\psi}\sin\psi - b\dot{\psi}^2\cos\psi. \end{cases}_{R_1} \quad 0{,}5$$

- $\vec{\gamma}^0(B)$ par cinématique du solide 1,5 (2$^{me}$ méthode)

Nous pouvons écrire $\vec{\gamma}^0(B) = \vec{\gamma}^0(A) + \frac{d^0 \vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \vec{AB} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge (\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{AB})$ 0,5

Calculons d'abord: $\vec{\gamma}^0(A) = \vec{\gamma}^0(O) + \frac{d^0 \vec{\Omega}_1^0}{dt} \wedge \vec{OA} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge (\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OA})$ 0,5

$\vec{\gamma}^0(O) = \vec{0}$, on obtient:

$$\vec{\gamma}^0(A) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} -a\dot{\theta}^2 \\ a\ddot{\theta} \\ 0 \end{cases}$$

0,5

$$\frac{d^0 \vec{\Omega}_2^0}{dt} = \frac{d^1 \vec{\Omega}_2^0}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\Omega}_2^0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}_{R_1} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}_{R_1} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}_{R_1} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}\dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}_{R_1}$$

$$\frac{d^0 \vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \vec{AB} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}\dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}_{R_1} \wedge \begin{Bmatrix} b \sin \psi \\ 0 \\ b \cos \psi \end{Bmatrix}_{R_1} = \begin{Bmatrix} b \ddot{\psi} \cos \psi \\ b \ddot{\theta} \sin \psi + b \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi \\ -b \ddot{\psi} \cos \psi . \end{Bmatrix}_{R_1}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge (\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{AB}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}_{R_1} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} b \sin \psi \\ 0 \\ b \cos \psi \end{Bmatrix}_{R_1}$$

$$= \begin{Bmatrix} -b \dot{\psi}^2 \sin \psi - b \dot{\theta}^2 \sin \psi \\ b \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi \\ -b \dot{\psi}^2 \cos \psi \end{Bmatrix}_{R_1}$$

En faisant la somme des trois termes nous obtenons :

$$\vec{\gamma}^0(B) = \begin{Bmatrix} b \ddot{\psi} \cos \psi - b \dot{\psi}^2 \sin \psi - (a + b \sin \psi) \dot{\theta}^2 \\ (a + b \sin \psi) \ddot{\theta} + 2 b \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi \\ -b \ddot{\psi} \sin \psi - b \dot{\psi}^2 \cos \psi \end{Bmatrix}_{R_1}$$