Facuté de Technologie | Département des E.B. $\mathcal{S}$. & $\mathcal{T}$.

Epreuve de Moyenne Durée du Module : **Maths 1**
Durée : **1h. 30mn**
Mardi 16/01/2024

Exercice 1. *(Applications 4pts). Montrer que l'application f est bijective et donner l'application inverse f^{-1}.*

$$\begin{array}{rcl} f : [-1,1] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$$

correction

a. f est-elle bijective ?
Soit $y \in [-1,1]$, on résout l'équation $y = f(x)$.
On a

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{2x}{1+x^2} \\ &\Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0. \end{aligned}$$

On résout alors l'équation du second membre dont le discriminant est :
$\Delta = b^2 - 4ac = 4(1-y^2) \geq 0.$ 0.5pt
Donc ses solutions sont

$x_1 = \frac{2-\sqrt{4(1-y)^2}}{2y} = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$

et $x_2 = \frac{2+\sqrt{4(1-y^2)}}{2y} = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$

$x_2 \notin [-1,1]$ car $1 + \sqrt{1-y^2} \geq 1$ et $y \in [-1,1]$
$x_1 \in [-1,1]$ en effet
$x_1 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}}$.
Comme $1 + \sqrt{1+y^2} \geq 1$ et $y \in [-1,1]$, donc $x_1 \in [-1,1]$ 1pt+1pt
Ainsi

$$\forall y \in [-1,1], \exists! x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \in [-1,1],\ y = f(x)$$

ceci montre que f est bijective. 0.5pt
b. L'inverse f^{-1} de f. 01pt

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-1, 1] &\longrightarrow [-1, 1] \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}. \end{aligned}$$

Exercice 2. *(Nombres complexes 4pts). Donner sous forme algébrique, trigonométrique et exponentielle, les racines complexes de l'équation :*

$$z^2 - (1 + 2i)z + (i - 1) = 0.$$

correction
Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation : $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$.
Son discriminant est :

$$\begin{aligned} \Delta = b^2 - 4ac &= (1 + 2i)^2 - 4(i - 1) \\ \Delta &= 1 - 4 + 4i - 4i + 4 \\ \Delta &= 1 \;\; 1pt \end{aligned}$$

Alors

$z_1 = \frac{1+2i+1}{2} = 1 + i$ et $z_2 = \frac{1+2i-1}{2} = i$
La forme algébrique : 1pt
$z_1 = 1 + i$ et $z_2 = i$
La forme trigonométrique : 1pt
$|z_1| = \sqrt{2}$, $Arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$ et $z_1 = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$
et
$|z_2| = 1$, $Arg(z_1) = \frac{\pi}{2}$ et $z_2 = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})$
La forme exponentielle : 1pt
$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Exercice 3. *(Suites 6pts). On considère la suite numérique $(u_n)_n$ telle que :*
$u_0 > 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$

1. *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.*
2. *Etudier la monotonie de cette suite.*
3. *Deduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente et préciser sa limite.*

correction
1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. 2 pts
On va le faire par récurrence. Notons (H_n) : $(u_n > 1)$
a. Pour $n = 0$ on a $u_0 > 1$, donc (H_n) est vérifiée.
b. Supposons que (H_n) est vraie pour un $n > 0$ et montrons que H_{n+1} est aussi vraie. On a :
$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} > 2 - \frac{1}{1}$ car $u_n > 1$
donc $u_{n+1} > 1$ ce qui montre que H_{n+1} est vérifiée.
Du théorème de récurrence on déduit que (H_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 1$$

2.La monotonie de la suite. 2 pt
On étudie le signe de $(u_{n+1} - u_n)$, on a :
$u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{u_n} - u_n = \frac{2u_n - 1 - (u_n)^2}{u_n} = -\frac{(u_n-1)^2}{u_n}$

Comme $u_n > 1 > 0$, on déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_{n+1} - u_n) < 0$$

ce qui montre que la suite $(u_n)_n$ est décroissante
3.a. Convergence de la suite $(u_n)_n$. 1 pt
Comme cette suite est décroissante et minorée (par 1) on déduit qu'elle est convergente
3.b. Sa limite. 1 pt
Soit l$= \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$, sachant que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$$

en passant à la limite, on obtient :

$$l = 2 - \frac{1}{l}$$

et la seule solution de cette équation est : $(l = 1)$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

Exercice 4. *(Fonctions réelles 6pts).*
1. *En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation* $(x^3 - 4x^2 + 6)$ *possède au moins une solution* $x_0 \in]-1; 4[$
2. *En utilisant la règle de De l'Hopital, calculer les limites suivantes :* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(1+x^2)}{sin^2(x)}, \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arctan(x)}{x+x^2}$
3. *Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction suivante :*

$$f(x) \;=\; \begin{cases} x^3 \; sin\; (\frac{1}{x}) & si\; x \neq 0 \\ 0 & si\; x = 0 \end{cases}$$

correction
1. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, vérifiez que l'équation $(x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0)$ possède au moins une solution $x_0 \in]0, 1[$. Si on considère la fonction $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$, alors :
f est une fonction continue sur $[0, 1]$ et $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$, donc $(f(0)f(1) < 0)$. 0.5pt+0.5pt
Du théorème des valeur intermédiaires on déduit $(\exists x_0 \in]0, 1[; \; f(x_0) = 0)$, ce qui montre que l'équation $(x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0)$ possède au moins une solution $x_0 \in]0, 1[$ 0.5pt+0.5pt

2. • On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(1+x^2)}{\sin^2(x)} = \dfrac{0}{0}$ c'est une forme indéterminée. Si on pose $f(x) = ln(1+x^2)$ et $g(x) = \sin^2(x)$,

alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{2\sin(x)\cos(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin(x)} \dfrac{1}{(1+x^2)\cos(x)} = 1$, et en utilisant la règle de l'Hopital on obtient :$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(1+x^2)}{ln(1+x^2)} = 1$ 1pt

• On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arctan(x)}{x+x^2} = \dfrac{0}{0}$ c'est une forme indéterminée. Si on pose $f(x) = arctan(x)$ et $g(x) = x + x^2$, alors $\lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{1+2x} = 1$, et en utilisant la règle de l'Hopital on obtient :$\lim_{x\to 0}\dfrac{arctan(x)}{x+x^2} = 1$ 1pt

3.

$$f(x) = \begin{cases} x^3\ sin\ (\frac{1}{x}) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

• La cotinuité 1pt
f est continue sur $\mathbb{R}^*$
Continuité en $x_0 = 0$:
On calcule $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^3\ sin\ (\dfrac{1}{x})$

On a : $-1 \leq sin(\frac{1}{x}) \leq 1 \implies \begin{cases} -x^3 \leq x^3\ sin\ (\frac{1}{x}) \leq x^3 & si\ x > 0 \\ \\ x^3 \leq x^3\ sin\ (\frac{1}{x}) \leq -x^3 & si\ x < 0 \end{cases}$

En passant à la limite on trouve $\lim_{x\to 0} x^3\ sin\ (\dfrac{1}{x}) = 0$

Alors f est continue en 0. Ainsi elle est continue sur $\mathbb{R}$
• La dérivabilité 1pt
f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
Dérivabilité en $x_0 = 0$:
On calcule $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\dfrac{x^3\ sin\ (\frac{1}{x}) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x^2\ sin\ (\dfrac{1}{x})$.

On a $-1 \leq sin(\frac{1}{x}) \leq 1 \Longrightarrow -x^2 \leq x^2\ sin\ (\frac{1}{x}) \leq x^2$

En passant à la limite on trouve $\lim_{x\to 0} x^2\ sin\ (\dfrac{1}{x}) = 0$

Alors f est dérivable au 0. Ainsi elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.