Faculté De Technologie

Université Djillali Liabes Sidi Bel Abbès

Département EBST
$2^{\underline{ème}}$ *Année ST*

Année Universitaire: 2023/2024
Dr. MOKHTARI

Correction de Maths-03

Durée de l'examen: 1H30

Exercice 1 *(06 pts)*
1) Étudier la nature des séries suivantes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \ ; \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

2) Calculer le rayon, le domaine de convergence, et étudier la convergence en $(x = \pm R)$ de la série entière:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1)2^{n+1}x^n;$$

3) Montrer que: $f(x) = 8x^2 g''(2x) + 4xg'(2x) + 2g(2x)$, avec

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1)2^{n+1}x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ ; \ x \in]-R, +R[.$$

Correction de l'exercice 1:
1) Soit la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

posons:

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

est convergente par le critère de Leibnitz,
et

$$\sum_{n\geq 1} v_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n},$$

série harmonique divergente.
donc, c'est la somme d'une série convergente + série divergente = série divergente.................................(01)pt

Soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$, on utilise le critère de comparaison on a:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\cos\sqrt{n}|}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

qui converge(série de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$),..(01)pt

donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ converge aussi.

2) **Rayon et domaine de convergence**

soit la série:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)2^{n+1}x^n \text{ avec } a_n = (n^2+1)2^{n+1},$$

on utilise le critère d'Alembert on a :

$$l = \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to+\infty} |\frac{((n+1)^2+1)2^{(n+1)+1}}{(n^2+1)2^{n+1}}| = 2(\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}) = 2,$$

$$\text{Donc, } R = \frac{1}{l} = \frac{1}{2}, \text{et} D_{cv} =]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[...................(02)pt$$

3) Montrons que: $f(x) = 8x^2g''(2x) + 4xg'(2x) + 2g(2x)$,

$$8x^2g''(2x) + 4xg'(2x) + 2g(2x) = 8x^2(\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(2x)^{n-2}) + 4x(\sum_{n=1}^{+\infty} n(2x)^{n-1}) + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n)$$

$$8x^2g''(2x)+4xg'(2x)+2g(2x) \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)2^{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n2^{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)2^{n+1}x^n = f(x)........(02)pt.$$

Exercice 2 *(04 points)*

1) Développer la fonction impaire 2π-périodique en série de Fourier définie par:

$$f(x) = x(\pi - x) \ ; \ x \in [0, \pi],$$

.

2) Calculer la somme:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Correction de l'exercice 2:

1) Comme la fonction 2π-périodique définie par: $f(x) = x(\pi - x) \ ; \ x \in [0, \pi]$, est impaire, alors la série de Fourier ne contnant que sinus. Les coefficients $a_n = 0, n = 0, 1, 2, 3, ...$ Calculons $b_n, n = 1, 2, 3, ...$On a :
Calcul des coefficients b_n**:**............(02)pt

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x\pi - x^2)\sin(nx)dx$$

On intègre par partie, en posant:
$u = x\pi - x^2 \Longrightarrow u' = \pi - 2x$
$v' = \sin(nx) \Longrightarrow v = -\frac{1}{n}\cos(nx)$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\{-\frac{(x\pi - x^2)\cos(nx)}{n}|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\cos(nx)dx\} = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\cos(nx)dx$$

On intègre une deuxième fois par partie, en posant:
$u = \pi - 2x \Longrightarrow u' = -2$
$v' = \cos(nx) \Longrightarrow v = \frac{1}{n}\sin(nx)$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}[\frac{(\pi - 2x)\sin(nx)}{n}|_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx] = \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx = -\frac{4}{n^3\pi}\cos(nx)|_0^{\pi} = -\frac{4}{n^3\pi}((-1)^n - 1)$$

donc, si $n = 2k \Longrightarrow b_n = 0$, et si $n = 2k+1 \Longrightarrow b_n = \frac{8}{\pi(2k+1)^3}$

D'après le théorème de Dirichlet , la série de Fourier est donnée par:

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}...........(0.5)pt$$

2. Pour obtenir la valeur demandée, il suffit de prendre $x = \frac{\pi}{2}$......(0.5)pt, on obtient alors:

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.......(0.5)pt$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}............(0.5)pt$$

Correction de l'exercice 3:
Soit l'équation:

$$-5y'' + 2y' + 3y = 8\sin t + 2\cos t \ ; \ y(0) = 1 \ ; \ y'(0) = 2.$$

pour résoudre cette équation, on applique la transformée de Laplace on obtient:

$$-5L(y''t()) + 2L(y'(t)) + 3L(y(t)) = 8L(\sin t) + 2L(\cos t).................(1)$$

avec:

$$L(y''(t)) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s - 2$$
$$L(y'(t)) = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$
$$L(y(t)) = Y(s)$$
$$8L(\sin t) = \frac{8}{s^2+1} \ ; \ 2L(\cos t) = \frac{2s}{s^2+1}, s > 0.$$

On remplace dans l'équation (1) on obtient:

$$-5(s^2Y(s) - s - 2) + 2(sY(s) - 1) + 3Y(s) = \frac{8}{s^2+1} + \frac{2s}{s^2+1}$$
$$Y(s)(-5s^2 + 2s + 3) + 5s + 8 = \frac{2s+8}{s^2+1}$$
$$Y(s)(-5s^2 + 2s + 3) = \frac{2s+8}{s^2+1} - 5s - 8 = \frac{-5s^3 - 8s^2 - 3s}{s^2+1}$$

Donc,

$$Y(s) = \frac{-5s^3 - 8s^2 - 3s}{(-5s^2 + 2s + 3)(s^2+1)} = \frac{s(-5s^2 - 8s - 3)}{(-5s^2 + 2s + 3)(s^2+1)}$$

on a les racines de $(-5s^2 - 8s - 3)$ sont: $r_1 = -1, r_2 = -\frac{3}{5}$,
, les racines de $-5s^2 + 2s + 3$ sont: $r_3 = +1, r_4 = -\frac{3}{5}$,
et les racines de $(s^2 + 1)$ sont: $r_5 = +i, r_6 = -i$.
Donc, on réécrit le $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s(s+1)(s+\frac{3}{5})}{(s^2+1)(s-1)(s+\frac{3}{5})} = \frac{s(s+1)}{(s^2+1)(s-1)} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s-1},$$

Donc la solution $y(t) = e^t + \sin(t)$.
Correction de l'exercice 4:
Calculer l'aire de D:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \ ; \ x - y + 1 \geq 0 \ ; \ x + 2y - 4 \leq 0\}.$$

L'aire de D c-à-d $f(x,y) = 1$........(0.5)pt
On a $y - 1 \leq x \leq 4 - 2y$.............(0.5)pt
Et $0 \leq y \leq \frac{5}{3}$............(0.5)pt
donc, on intègre:(1.5)pt

$$I = \int_0^{\frac{5}{3}}\int_{y-1}^{4-2y} 1dxdy = \int_0^{\frac{5}{3}}[x]_{y-1}^{4-2y}dy = \int_0^{\frac{5}{3}}(-3y+5)dy$$
$$I = [\frac{-3}{2}y^2 + 5y]_0^{\frac{5}{3}} = \frac{25}{6}.$$