



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES
Faculté de Technologie
Département d'Hydraulique



Polycopié

Hydraulique souterraine Cours & exercices

Dr. HALLOUCHE Bachir

Avant-propos

L'hydraulique souterraine est une discipline de la géomécanique, elle étudie mathématiquement l'écoulement gravitaire, naturel (nappe aquifère...) ou provoqué (drainage, pompage...) de l'eau souterraine libre dans les milieux supposés perméables, sous l'effet d'un gradient de charge ou de pression. L'hydraulique souterraine utilise des modèles théoriques de forme et de comportement hydrodynamique conforme aux modèles réalistes de réseaux naturels que décrit l'hydrogéologie. Il est à noter que l'hydraulique souterraine et l'hydrogéologie sont indissociables, interdépendantes et complémentaires. L'hydrogéologie est une discipline scientifique qui recoupe la géologie et l'hydrologie : la géologie traite qualitativement la présence d'eau libre dans le sous-sol, en s'attachant à la nature lithologique (grave, sable, grès, calcaire...) et à l'état (poreux, fissuré, karstique...) des matériaux aquifères appelé "le contenant", et à sa circulation dans les réseaux souterrains réels, organisés selon la structure géologique des formations aquifères superficielles (nappes alluviales...) ou profondes (nappes captives...); l'hydrologie quant à elle, traite de l'eau souterraine appelée "le contenu", en tenant compte des conditions géologiques.

Ce polycopié est un support pédagogique destiné aux étudiants du Master 1 LMD de la filière hydraulique, et de la géologie appliquée. L'objectif essentiel de ce cours porte sur la maîtrise progressive des notions qui interviennent dans la résolution des problèmes liés à la circulation de l'eau dans les sols ou plus généralement dans les milieux poreux, et que l'on rencontre aussi bien en Hydrodynamique, Hydrogéologie qu'en Génie Civil, Géotechnique, etc....

Table des matières

Introduction	1
Chapitre I : Notions de base et définitions	
I.1 Propriétés de l'eau	3
I.1.1 Masse spécifique (ρ)	3
I.1.2 Poids spécifique (γ)	4
I.1.3 Viscosité dynamique (μ)	4
I.1.4 Viscosité cinématique (ν)	4
I.1.5 Coefficient de compressibilité (β)	4
I.2 Caractéristiques du milieu poreux	5
I.2.1 Porosité	5
a. Porosité totale ou porosité relative (n)	8
b. Indice des vides (e)	8
c. Coefficient de saturation (σ)	9
d. Porosité efficace ou porosité effective (ne)	9
I.2.2 Capacité de rétention (S_r)	10
I.3 Propriétés physiques des aquifères	10
I. 3.1 La transmissivité (T)	10
I.3.2 Coefficient d'emmagasinement (S)	11
Chapitre II : Ecoulement dans un milieu poreux	
II.1 Loi d'écoulement de l'eau dans le milieu poreux	12
II.1.1 Charge hydraulique	12
II.1.2 Gradient hydraulique	13
II.2 Loi de Darcy	13
II.2.1 Dispositif expérimental de Darcy	14
II.2.2 Dispositif de laboratoire avec écoulement latéral	16
II.3 Conditions de validité de la loi de Darcy	18
II.4 Généralisation de la loi de Darcy	19
II.4.1 Milieu homogène et isotrope	19
II.4.2 Milieu homogène et anisotrope	20
II.5 Conductivité hydraulique. Perméabilité intrinsèque	21
II.5.1 Conductivité hydraulique	21
II.5.2 Perméabilité intrinsèque	22
II.6 Coefficient de perméabilité des terrains stratifiés	23
II.6.1 Ecoulement parallèle au plan de la stratification	24
II.6.2 Ecoulement perpendiculaire au plan de la stratification	24
Exercices	26

Chapitre III : Caractéristique des écoulements dans le milieu poreux

III.1. Ecoulement permanent	27
III.1.1 Considérations générales :	27
III.1.2 Cas de terrains isotropes – Equation de Laplace.	27
III.1.3 Cas de terrains anisotropes	29
III.1.4 Ecoulement en charge et écoulement à surface libre	32
III.1.4.1 Ecoulement en charge	32
III.1.4.2 Ecoulement à surface libre	33
III.1.4.3 Ecoulement des nappes à surface libre à substratum imperméable	35
III.2 Ecoulement non permanent	39
III.2.1 Considérations générales	39
III.2.2 Ecoulement à surface libre	39
Exercices	43

Chapitre IV : Hydraulique des puits

IV.1 Définition de quelques paramètres hydrodynamiques	44
IV.1.1 Aquifère à nappe libre	44
IV.1 .2 Nappes captives	45
IV.1 .3 La transmissivité (T)	46
IV.1 .4 Le coefficient d'emmagasinement (S)	46
IV.1 .5 Surface piézométrique et Isopièzes	47
IV.1 .6 Lignes de courants et sens d'écoulement	47
IV.2 Captage des eaux souterraines	48
IV.3 Régimes d'écoulement dans le milieu poreux et types de nappe	49
IV.3.1 Ecoulement permanent vers un ouvrage de captage	50
a. Nappes cylindriques	50
a.1 Rabattement par un contre canal	50
a.2 Rabattement dans un canal unique	52
b. Nappes à filets convergents	52
b.1 Rabattement par puits en nappe libre	53
b.2 Rabattement par puits en nappe captive	55
IV.4 Ecoulement en régime transitoire (non équilibre) vers un ouvrage de captage	56
IV.4.1 Equation de Theis pour nappe captive	56
IV.4.2 Approximation de Jacob	58
IV.5 Puits incomplet (puits à pénétration partielle)	59
a. Puits à seul fond perméable	59
b. Puits à fond étanche et à parois partiellement imperméable	59
c. Puits à fond perméable et à parois partiellement perméable	59
d. Puits à fond et à parois latérale entièrement perméable	59
Exercices	60

Chapitre V : Mesure de la perméabilité

V.1 Introduction	61
V.2 Mesure de la perméabilité au laboratoire	61
V.2.1 Perméamètre à charge constante	61
V.2.2 Perméamètre à charge variable	61
V.3 Mesure de perméabilité in situ	62
V.3.1 L'essai de Pompage	61
V.3.2 Essai Lefranc	63
a.1 Essai à niveau constant	63
a.2 Essai à niveau variable	64
V.3.3 Essai Lugeon et la mesure des perméabilités au rocher	66
Corrigé des exercices	69
Références bibliographiques	76

Introduction

L'hydrogéologie est une science qui s'intéresse à l'évaluation de la disponibilité et de la qualité des eaux souterraines. Bien que de nombreuses études sur les eaux souterraines soient de nature qualitative, les études quantitatives font nécessairement partie intégrante de l'évaluation complète de la présence et de la disponibilité des eaux souterraines. La valeur d'un aquifère en tant que source d'eau dépend surtout de deux caractéristiques essentielles : sa capacité à stocker et à transmettre l'eau.

Une connaissance approfondie du cadre géologique est essentielle pour comprendre le fonctionnement du système de conduit naturel existant. L'hydraulique souterraine s'intéresse essentiellement au mouvement naturel ou provoqué de l'eau à travers des terrains perméables. La principale méthode d'analyse en hydraulique souterraine est l'application, généralement à partir des essais sur le terrain (essai dans un puits pompage), des équations aux dérivées partielles pour des conditions aux limites particulières. Avant 1935, de telles équations n'étaient connues que pour la condition relativement simple d'écoulement régulier, qui d'ailleurs ne se produit généralement pas dans la nature. Le développement par Theis (1935), d'une équation pour l'écoulement non stationnaire des eaux souterraines a été une étape importante dans l'hydraulique des eaux souterraines (Lohman, 1972).

La naissance de l'hydraulique souterraine en tant que science quantitative remonte à l'année 1856, où l'ingénieur français Henry Darcy publia son rapport sur l'approvisionnement en eau de la ville de Dijon (France). Dans ce rapport, Darcy décrivait une expérience de laboratoire qu'il avait menée pour analyser l'écoulement de l'eau à travers les sables. Les résultats de son expérience peuvent être généralisés dans la loi empirique qui porte aujourd'hui son nom.

Ce document est divisé en cinq chapitres :

Le premier chapitre traite les notions de base à savoir : les propriétés de l'eau (masse et poids volumique, la viscosité...), les caractéristiques du milieu poreux (type de porosité, porosité effective...).

Le deuxième chapitre traite l'écoulement dans le milieu poreux où on a parlé des paramètres régissant le milieu poreux, de la notion de charge et du gradient hydraulique, la loi de Darcy et sa généralisation et le domaine de validité de cette loi, de la notion du coefficient perméabilité et de la conductivité équivalente pour les terrains stratifiés.

Le troisième chapitre traite les caractéristiques des écoulements dans le milieu poreux, en abordant les écoulements permanent et transitoire, en considérant des terrains homogènes isotropes et anisotropes, en traitant l'écoulement en charge, l'écoulement libre.

Le chapitre IV traite de l'hydraulique des puits dans lequel on a introduit de définitions de quelques paramètres hydrodynamiques, tels que la transmissivité, le coefficient d'emmagasinement, puis on a traité les écoulements permanent et transitoire vers un ouvrage de captage en définissant les équations régissant ces écoulements.

Le cinquième et dernier chapitre à été consacré aux méthodes et techniques de mesure de la perméabilité au laboratoire et au terrain.

Il y a lieu de signaler que j'ai utilisé un certain nombres d'ouvrages pour rédiger le présent polycopié.

Chapitre I : Notions de base et définitions

I.1 Propriétés de l'eau

Avant d'aborder le sujet des écoulements naturels en milieu poreux, il est important de faire un rappel des propriétés physiques de l'eau dans les conditions dites "normales" de température et de pression.

I.1.1 Masse spécifique (ρ)

La masse spécifique d'un corps est la masse de l'unité de volume de ce corps. Elle a pour dimensions : ML^{-3} . Elle est exprimée en kg/m^3 (SI) et en g/cm^3 (CGS).

Pour l'eau, la masse spécifique prise à la pression atmosphérique est assez peu variable en fonction de la température. Elle admet un maximum proche de 1 aux environs de 4° C.

T °C	ρ	T °C	ρ	T °C	ρ
0	0.9999	40	0.9922	80	0.9718
4	1	50	0.9881	90	0.9653
20	0.9982	60	0.9832	100	0.9585
30	0.9957	70	0.9778		

I.1.2 Poids spécifique (γ)

C'est le poids de l'unité de volume. Il est relié à la masse spécifique par la relation :

$\gamma = \rho g$. Elle a pour dimensions : $[M.L^{-2}.T^{-2}]$. Elle est exprimée dans le SI en $Newton/m^3$ (N/m^3), dans le système CGS en $Dyne/cm^3$ (dyn/cm^3).

$$1 \frac{N}{m^3} = \frac{10^5 \text{ dyn}}{10^6 \text{ cm}^3} = 10^{-1} \text{ dyn/cm}^3.$$

I.1.3 Viscosité dynamique (μ)

La viscosité dynamique est la propriété de résistance à la déformation d'un fluide à cause de la cohésion et de l'interaction entre ses molécules. Tous les fluides sont visqueux et obéissent à la loi de viscosité établie par Newton :

$$\frac{F}{S} = \mu \frac{d\vec{V}}{dn} \quad (I.1)$$

$\frac{F}{S}$ = force tangentielle unitaire exercée sur une plaque par un écoulement présentant un gradient de vitesse selon la direction \vec{n} (perpendiculaire à la plaque) égale à $\frac{d\vec{V}}{dn}$

$\frac{d\vec{V}}{dn}$: Gradient de vitesse d'écoulement

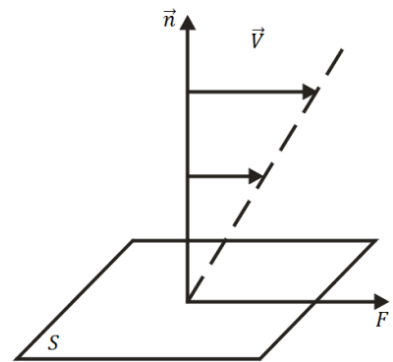
μ : Viscosité dynamique

- Dimension : $[M.L^{-1}.T^{-1}]$

- Unités de la viscosité dynamique :

Système international (SI) : Poiseuille (PI). 1 PI = 1 kg/m/s = 1 Ns/m².

Système CGS : Poise (Po). 1 Po = 1 g/cm/s = 1 Dyn s/cm² = 10⁻¹ PI



I.1.4 Viscosité cinématique (ν)

C'est le rapport de la viscosité dynamique à la masse spécifique.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (I.2)$$

- Dimension : $[L^2.T^{-1}]$

- Unités de la viscosité cinématique :

Système international (SI) : m²/s ;

Système CGS: cm²/s ou Stokes (St). 1 St = 10⁻⁴ m²/s

I.1.5 Coefficient de compressibilité (β)

Coefficient de compressibilité de l'eau (β) est défini par :

$$\beta = -\frac{\Delta V}{V} \cdot \frac{1}{\Delta p} \quad (1.3)$$

$\frac{\Delta V}{V}$ = La variation relative de volume provoquée par la variation de pression (Δp).

- Dimension : $[M^{-1}LT^2]$
- Unités de Coefficient de compressibilité :
 - Systeme international (SI) : Pascal (Pa) ;
 - Systeme CGS: cm^2/s ou Stokes (St). $1 \text{ St} = 10^{-4} \text{ m}^2/s$

I.2 Caractéristiques du milieu poreux

Un milieu poreux peut être défini comme un matériau formé d'une phase solide (des grains solides de différentes tailles) distribuée de manière aléatoire dans le volume du matériau et renfermant des cavités ou des pores. L'ensemble de ces pores constitue un espace interstitiel qui peut être le siège de l'écoulement d'un fluide. Les pores entre les particules solides peuvent être connectés ou non, et sont remplis partiellement ou totalement par un fluide (liquide, gaz). Les milieux poreux peuvent être consolidés, comme les grès, ou non consolidés (meuble) comme le sable.

I.2.1 Porosité

La porosité est l'ensemble des vides (pores) d'un matériau solide.

- *Selon l'origine des pores*, on distingue la porosité primaire et la porosité secondaire.
 - La porosité primaire, formée pendant le dépôt du sédiment, est de type inter granulaire. Son importance dépend du degré de classement des grains et de leur forme. Elle ne dépend pas de leur taille. La porosité primaire que l'on rencontre surtout dans les roches détritiques diminue généralement avec le temps sous l'effet de la cimentation et de la compaction (Figure I.1).

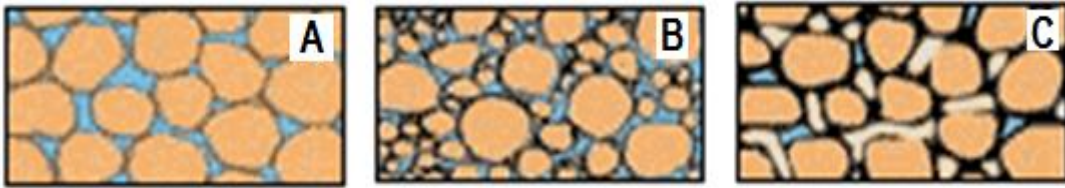


Figure I.1 : Porosité primaire.

A) bon classement ; B) mauvais classement ; C) cimentation

- La porosité secondaire englobe la porosité vacuolaire acquise par dissolution dans les roches d'origine chimique ou biochimique, la porosité de fracture et la porosité due à l'altération (Figure I.2).

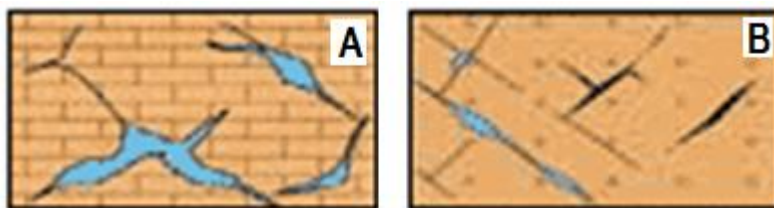


Figure I.2 : Porosité primaire.

A) dissolution ; B) fracture

- *Selon la forme des pores* : on peut distinguer la porosité d'interstice, la porosité de fissure et la porosité de fracture. La porosité d'interstice présente des vides autour des particules solides plus ou moins liées les unes aux autres (roches meubles : sables, graviers, alluvions). Tandis que la porosité de fissure correspond à des fractures, fissures dans le matériau. En général, ces deux types de porosité peuvent coexister comme dans le cas de roches consolidés (grès).

Dans l'étude de la porosité, on distingue deux notions :

- l'existence des vides et leurs caractéristiques géométriques ; il s'agit de la porosité totale,
- la façon dont ces vides sont occupés par le fluide et les relations fluides - solides qui s'établissent.

Selon la nature des vides dans les roches on peut distinguer trois types de porosités (Figure4) :

- *la porosité d'interstices* : Ce type de porosité caractérise les formations meubles (graviers, sables, etc.) ou des roches consolidées non encore complètement colmatées ; les pores sont interconnectés. Ce type de porosité peut disparaître par cimentation des grains comme chez les grès (Figure I.3).

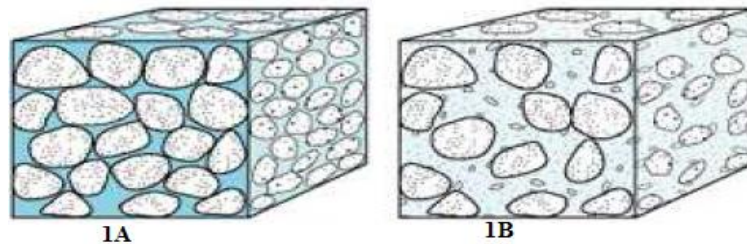


Figure I.3 : Porosité d'interstice
1A : éléments classés ; 1B : éléments hétérométriques

- *la porosité de fissures* : est celle des roches compactes fracturées (roche magmatique, métamorphique ...); elle est due aux déformations tectoniques ou aux plans de stratification, de foliation et de schistosité (Figure I.4).

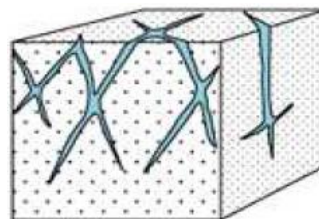


Figure I.4 : Porosité de fissure

- *la porosité de fractures ou chenaux* : elle est causée par la dissolution des roches ou par la croissance des plantes vasculaires dans les plans de failles, cela provoque l'élargissement des fractures (Figure I.5).

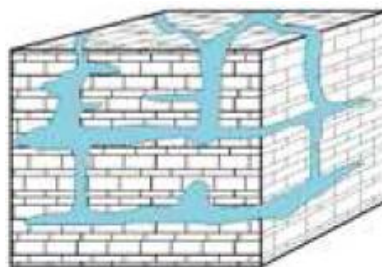


Figure I.5 : Porosité de fractures (chenaux)

La porosité dépend de la forme, de l'agencement des grains constituant la roche, mais aussi de leur degré de classement, de compaction, de cimentation. La fracturation et l'altération par dissolution des niveaux rocheux peuvent également constituer des facteurs favorables au développement de la porosité.

a. Porosité totale ou porosité relative (n)

La porosité totale (n) est la propriété d'un corps ou d'un milieu de comporter des vides interconnectés ou non. Elle représente l'ensemble des vides présents dans une roche. Elle s'exprime par le rapport du volume des vides (V_V) au volume total du milieu (V_T).

$$n(\%) = \frac{\text{volume des vides}}{\text{volume total}} = \frac{V_V}{V_T} \tag{1.4}$$

La porosité " n " est influencée par l'arrangement des grains (Figure I.6). Si on considère un arrangement de grains de forme sphérique et d'égal diamètre on aura:

- pour un arrangement cubique (6A), $n = 47,64 \%$
- pour un arrangement rhomboédrique (6B), $n = 25,95 \%$

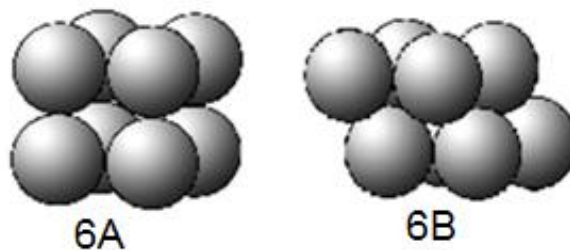


Figure I.6 : Arrangement des grains
6A : cubique ; 6B : rhomboédrique

b. Indice des vides (e)

L'indice des vides noté e est le rapport exprimé en pourcentage entre le volume des vides et le volume solide. L'indice des vides exprime la compacité de l'arrangement granulaire d'un sol : un faible indice des vides

correspond à une faible proportion de vide dans un sol, donc à un arrangement granulaire compact.

$$e(\%) = \frac{\text{volume des vides}}{\text{volume des grains}} = \frac{V_V}{V_G} \quad (1.5)$$

Il existe des relations qui lient la porosité la porosité relative (n) à l'indice des vides (e).

$$e = \frac{n}{1 - n} \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{e}{1 + e} \quad (1.6)$$

c. Coefficient de saturation (σ)

C'est le rapport de la teneur en eau réelle (volumique) d'un milieu poreux non saturé (V_E) au volume des pores (V_P), c'est à dire à la teneur en eau du même milieu lorsqu'il est saturé.

$$\sigma = \frac{V_E}{V_P} \quad (1.7)$$

d. Porosité efficace ou porosité effective (ne)

Elle est de loin la plus intéressante pour l'hydrogéologue. La porosité efficace (ne) correspond au rapport du volume d'eau gravitaire (V_W) qu'un milieu poreux peut contenir en état de saturation puis le libérer sous l'effet d'un drainage complet, à son volume total (V_T).

$$ne (\%) = \frac{\text{Volume d'eau gravitaire dans la roche}}{\text{volume total de la roche}} = \frac{V_W}{V_T} \quad (1.8)$$

Les vides présents dans la roche peuvent être connectés entre eux, on parle alors de porosité « ouverte » ou sans communication, on parle de porosité « fermée ». Dans un milieu poreux, l'eau peut se déplacer uniquement dans les vides interconnectés. De plus, les grains retiennent l'eau par capillarité et l'empêche de circuler librement. La porosité efficace représente le volume d'eau mobilisable par gravité (eau gravitaire), c'est-à-dire l'« eau libre » (non liée aux grains de la roche par capillarité) et circulant dans les pores « ouverts ».

I.2.2 Capacité de rétention (S_r)

C'est le rapport du volume maximal d'eau non mobilisable par gravité (V_r) que peut contenir un milieu poreux, à son volume total (V_T). La capacité de rétention est un terme complémentaire à la porosité efficace (Figure I.7).

$$S_r (\%) = \frac{\text{Volume d'eau non mobilisable}}{\text{volume total de la roche}} = \frac{V_r}{V_T} \quad (1.9)$$

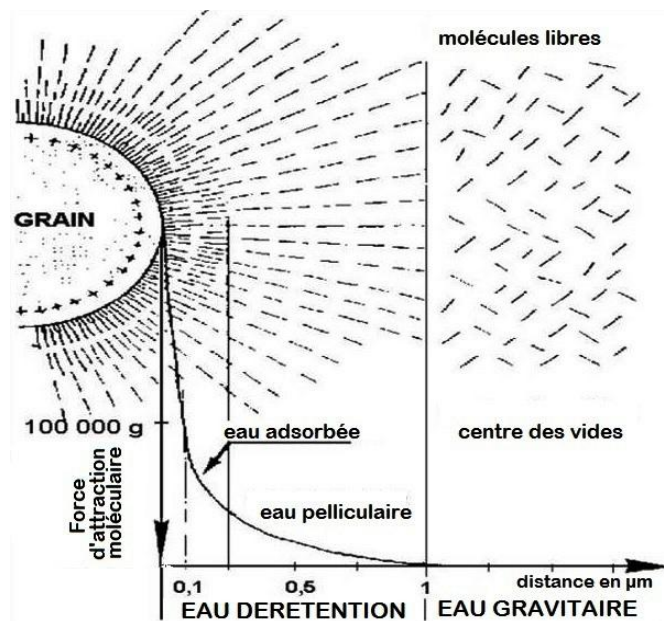


Figure 7 : Structure de l'eau souterraine au voisinage d'un grain. Interaction physique eau/roche. D'après Polubrina-Kochina (1962).

I.3 Propriétés physiques des aquifères

L'aquifère regroupe les fonctions de conducteur et de réservoir d'eau. Cette double propriété s'exprime par les paramètres élémentaires qui caractérisent le même milieu physique, à savoir :

I. 3.1 La transmissivité (T)

Qui commande la fonction conductrice. C'est un paramètre qui régit le flux d'eau transitant par unité de largeur (dimension orthogonale à la direction de l'écoulement) de la zone saturée d'un aquifère continu, par unité de

gradient hydraulique. La transmissivité est égale au produit du coefficient de perméabilité K , par l'épaisseur de l'aquifère, b . Elle s'exprime en m^2/s .

$$T = K \cdot b \quad (I.10)$$

I.3.2 L'emmagasinement (S)

Il commande la fonction de stockage. Il correspond au rapport du volume d'eau libérée ou emmagasinée par unité de surface d'un aquifère, à la variation de charge hydraulique correspondante.

Dans un aquifère captif ce paramètre est lié à la compressibilité et à l'expansibilité de l'eau et du milieu aquifère et à la puissance de la couche aquifère. Dans un aquifère à nappe libre il équivaut en pratique à porosité efficace.

$$S = \frac{V_w}{\Delta h \cdot A} \quad (I.11)$$

Avec : V_w : Volume d'eau libéré ou stocké par l'aquifère.

Δh : Modification de la surface piézométrique

A : Surface orthogonale.

Il en résulte de ces paramètres que le milieu aquifère est le champ de deux phénomènes hydrodynamiques bien distincts, à savoir :

- a. L'écoulement (flux) d'eau souterraine qui dépend de la transmissivité (T) et du gradient hydraulique (i),
- b. La propagation d'influence qui correspond à la transmission d'une différence de niveau ou de pression, qui dépend de la diffusivité (T/S)

De ces propriétés on en déduit que les variations dans le temps et dans l'espace des débits et des niveaux d'eau dans un aquifère sont liées, c'est-à-dire que toute action sur le débit (exploitation, injection), sera suivi d'une action sur le niveau d'eau dans l'aquifère (rabattement, recharge).

Chapitre II : Ecoulement dans un milieu poreux

II.1 Loi d'écoulement de l'eau dans le milieu poreux

On considère ici la porosité efficace (ne), qui est définie comme étant le rapport du volume des vides dans lesquels l'eau libre peut circuler au volume total. Le milieu poreux est supposé saturé dans toute la zone intéressée par l'écoulement. On admet en outre que le milieu est homogène et isotrope.

II.1.1 Charge hydraulique

Pour décrire les mouvements du fluide en milieu poreux, on utilise la notion de charge hydraulique, qui est une énergie potentielle par unité de volume de fluide. Pour l'écoulement de l'eau, la charge hydraulique " h " a pour expression (Equation de Bernoulli):

$$h = \frac{P}{\rho_w g} + z + \frac{V^2}{2g} = \frac{P}{\gamma_w} + z + \frac{V^2}{2g} \quad (\text{II.1})$$

Avec : P : Pression de l'eau (pression interstitielle)

ρ_w : Masse volumique de l'eau,

g : Accélération de la pesanteur,

V : Vitesse d'écoulement de l'eau,

z : Cote (altitude) du point considéré, comptée positivement vers le haut à partir d'un niveau de référence donné (convention de l'hydraulique),

γ_w : Poids volumique de l'eau.

La charge hydraulique contient trois termes : les deux premiers $\left(\frac{P}{\rho_w g} + z\right)$ correspondent à l'énergie des forces extérieures (énergie potentielle de la

particule d'eau considérée) et le troisième $\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ à l'énergie cinétique de l'eau en mouvement.

La vitesse de l'eau dans le milieu poreux est en général très faible, dans les couches d'argile, l'eau parcourt une dizaine de mètres en dix ou vingt ans (quelques millimètres par jour). Dans des cas exceptionnels, elle atteint 1 m/s. Le terme dû à l'énergie cinétique $(V^2/2g)$ reste donc faible devant les deux autres. L'expression de la charge hydraulique, appelée aussi potentiel hydraulique, se réduit donc au terme de l'énergie potentielle :

$$h = \frac{P}{\rho_w g} + z = \frac{P}{\gamma_w} + z \quad (II.2)$$

La charge hydraulique a la dimension d'une longueur et est généralement exprimée en mètres. La pression interstitielle P se déduit de la charge hydraulique par la relation :

$$P = \gamma_w (h - z) \quad (II.3)$$

II.1.2 Gradient hydraulique

Le gradient hydraulique est un vecteur défini comme l'opposé du gradient de la charge hydraulique h :

$$\vec{i} = -\overrightarrow{grad}h \quad (II.4)$$

Il a pour composantes :

$$i_x = \frac{\partial h}{\partial x} \quad i_y = \frac{\partial h}{\partial y} \quad i_z = \frac{\partial h}{\partial z}$$

II.2 Loi de Darcy

La relation entre la vitesse d'écoulement et la charge hydraulique dans un écoulement unidimensionnel a été déterminée expérimentalement en 1856 par Darcy, qui étudiait le débit de l'eau dans un tube rempli de sable. Darcy mesurait à la fois la perte de charge entre les deux extrémités de la

conduite et le débit de filtration correspondant lorsque le régime permanent était atteint.

II.2.1 Dispositif expérimental de Darcy

La théorie des écoulements en milieu poreux est fondée sur les résultats d'expériences réalisées en 1856 par H. Darcy. Le dispositif expérimental comportait des tubes verticaux de 2,50 m de haut et de 0,35 m de diamètre intérieur, remplis de sable naturel homogène sur une hauteur, l (Figure II.1). La partie supérieure du tube est alimentée en eau à un niveau maintenu à une altitude constante, H , au-dessus d'un plan fixe de référence. Le volume d'eau, recueilli à la base, est mesuré en fonction du temps, en secondes ou en heures. Le poids de la colonne d'eau, de hauteur équivalente à H , est la charge hydraulique, notée h , exprimée en mètres de hauteur d'eau.

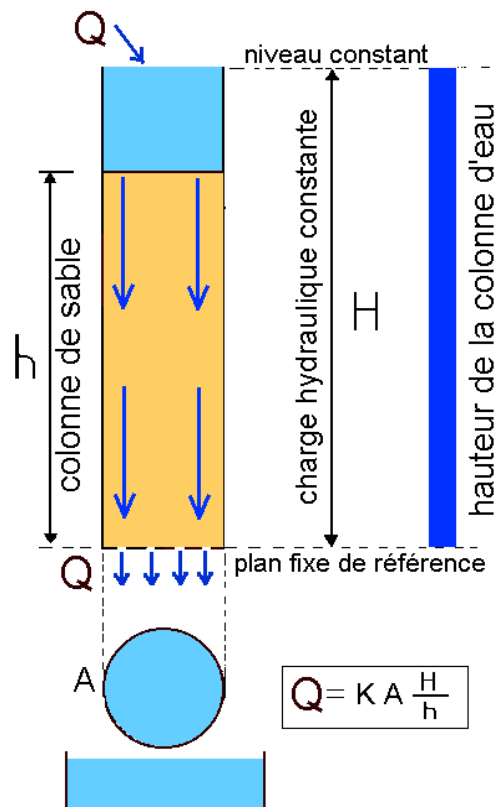


Figure II.1 : Dispositif expérimental de Darcy

Avec ce dispositif, H. Darcy a montré que le volume d'eau, Q en m^3/s , filtrant de haut en bas dans la colonne de sable de hauteur l en mètre, à

travers la section totale, perpendiculaire à la direction verticale d'écoulement, A en (m²) , est fonction d'un coefficient de proportionnalité K (m/s) appelé coefficient de perméabilité qui dépend des caractéristiques du sable et de la perte de charge par unité de longueur du cylindre de sable, $\Delta h/l$ (sans dimension) . D'où l'expression de la loi de Darcy :

$$Q = A \cdot K \cdot \frac{\Delta h}{l} \quad (II.5)$$

Avec : $V = \frac{Q}{A} = K \cdot \frac{\Delta h}{l}$

Le terme, K défini par H. Darcy comme un «coefficient, dépendant de la perméabilité de la couche», est appelé coefficient de perméabilité ou conductivité hydraulique, il a les dimensions d'une vitesse, et il dépend à la fois du milieu poreux (Tableau II.1) et du fluide.

Tableau II.1 : Ordre de grandeur du coefficient de perméabilité des sols en cm/s (d'après Costet et al. 1983).

Nature du sol	Ordre de grandeur de k en m/s	Degré de perméabilité
Graviers moyen à gros	10^{-1} à 10^{-3}	Très élevée
Petits graviers, sable	10^{-3} à 10^{-5}	Assez élevée
Sable fin, sable limoneux, loess	10^{-5} à 10^{-7}	Faible
Limon compact, argile silteuses	10^{-7} à 10^{-9}	Très faible
Argile	10^{-9} à 10^{-12}	Imperméable

Le quotient de la charge, h , par la longueur de la colonne de sable, l , ou perte de charge par unité de longueur, h/l , est défini comme le gradient hydraulique, noté i , sans dimension. D'où avec $h/l = i$, l'expression (II.5) devient :

$$Q = A \cdot K \cdot i \quad (II.5)$$

Le débit unitaire, q , est le débit en m/s traversant l'unité de section, perpendiculaire à la direction d'écoulement en milieu saturé, dans l'unité de temps en secondes. C'est aussi la quantité d'eau traversant le milieu saturé

par unité de surface. Etant le quotient d'un débit par une surface, il a la dimension d'une vitesse et s'exprime en m/s.

$$q = \frac{Q}{A} \quad (\text{II.6})$$

En combinant les expressions (II.5) et (II.6)

$$q = K \cdot i \quad (\text{II.7})$$

La vitesse de filtration, V en m/s, rapportée à la section totale, A , est :

$$V = \frac{Q}{A} = K \cdot i = q \quad (\text{II.8})$$

La vitesse de filtration est la vitesse fictive d'un flux d'eau en écoulement uniforme, à travers un milieu aquifère saturé, déduite du débit d'écoulement, Q , rapportée à la section totale de l'aquifère traversé par ce flux. Elle est égale au débit unitaire (II.8).

II.2.2 Dispositif de laboratoire avec écoulement latéral

Pour une meilleur représentativité de la circulation des eaux souterraines dans un aquifère, on prend le cas d'un dispositif de laboratoire, avec écoulement latéral. Ce dispositif est constitué d'un tube de longueur L , rempli d'un matériau poreux, reliant deux récipients d'un niveau constant constant Z_1 en amont et Z_2 en aval (Figure II.2). Les résultats, obtenus par cette expérience, permettent d'écrire :

$$\vec{q} = -K \cdot \frac{(h_1 - h_2)}{l} \quad (\text{II.9})$$

$h_1 - h_2$: différence de charge Δh ; $(h_1 - h_2)/l$: gradient hydraulique (i)

$$\vec{q} = -K \cdot \frac{\Delta h}{l} = -K \cdot i \quad (\text{II.10})$$

Le signe négatif est introduit devant le membre de droite de l'équation car la charge décroît dans le sens de l'écoulement et (q) ou (V), ne peuvent pas être négatifs.

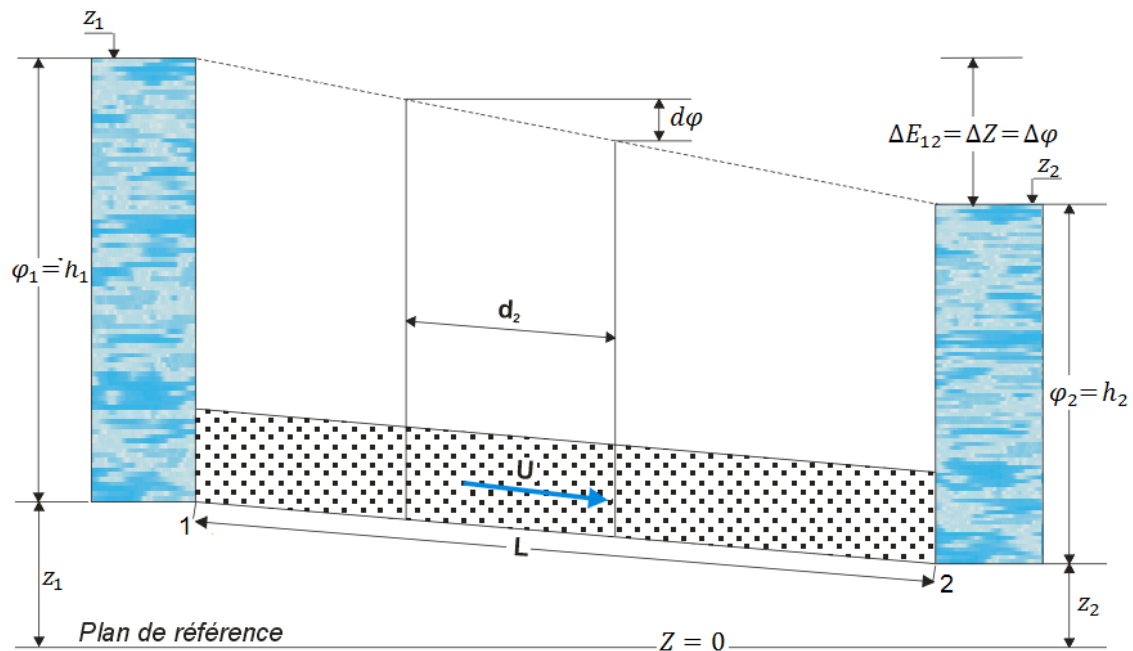


Figure II.2

La charge, ou potentiel piézométrique, qui est représenté généralement par h , sera remplacée par $\varphi = z + P/\gamma$.

Etant donné que les vitesses d'écoulement dans le milieu poreux sont très faibles, la ligne d'énergie coïncide parfaitement avec la ligne piézométrique.

De même que les écoulements en charge La perte totale d'énergie ($\Delta E_{12} = Z_1 - Z_2 = \Delta\varphi$) entre les sections 1 & 2, et la perte de charge unitaire sera définie par la relation suivante :

$$i = \frac{\Delta E}{l} = \frac{\Delta Z}{l} = \frac{\Delta\varphi}{l} = -grad \cdot \varphi \quad (II.11)$$

La vitesse apparente de filtration U est définie comme le quotient du débit écoulé Q , par la section du tube A .

Le nombre de Reynolds de l'écoulement est $Re = Ud/\nu$ où : (d) est un diamètre caractéristique lié à la forme et à l'arrangement des grains, et ν est le coefficient de viscosité cinématique du fluide (eau). En général on prend

pour d la valeur d_{50} de la courbe granulométrique. Dans le cas de terrains fissurés on prend $d = 2e$, où e est la largeur de la fissure.

En général, on peut écrire, de façon similaire aux écoulements en charge,
 $i = f U^2 / 2g$

Pour de faibles vitesses, en régime laminaire, $f = a/R_e = av/ Ud$ d'où :

$$i = \frac{av}{Ud} \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{U^2}{2g} = \frac{av}{2gd^2} * U = \frac{1}{K} U \quad (\text{II.12})$$

On a ainsi :

$$K = \frac{2gd^2}{av} \quad (\text{II.13})$$

K : conductivité hydraulique du milieu [$L.T^{-1}$],

d : diamètre des grains [L.],

ν : viscosité cinématique [$L^2.T$],

g : accélération de la pesanteur [$L.T^{-2}$],

a : constante.

On peut donc écrire :

$$U = K \cdot i = -K \text{grad } \varphi \quad (\text{II.14})$$

II.3 Conditions de validité de la loi de Darcy

La loi de Darcy est établie par des expériences réalisées au laboratoire et répondant à des conditions très strictes. L'application de cette loi exige la présence de quatre conditions : la continuité, l'isotropie, l'homogénéité du réservoir et l'écoulement laminaire.

- La continuité est la caractéristique d'un milieu perméable ayant des vides interconnectés dans le sens de l'écoulement. Exemple : sable, grès, alluvions, graviers, calcaire avec des microfissures...

- L'isotropie se dit d'un milieu dans lequel les caractéristiques physiques (granulométrie en particulier) sont constantes dans les trois directions de l'espace. Dans le cas contraire, le milieu est dit anisotrope.
- Un milieu est dit homogène lorsque ses caractéristiques physiques sont constantes en tous points dans le sens de l'écoulement. Dans le cas contraire, le milieu est dit hétérogène.
- Un écoulement laminaire est caractérisé par des lignes de courant continues, rectilignes, individualisées et occupant entre elles la même position relative. La vitesse de l'écoulement de l'eau est constante et elle est inférieure à la vitesse critique au delà de laquelle apparaît l'écoulement turbulent (perte de charge non proportionnelle au débit).

II.4 Généralisation de la loi de Darcy

II.4.1 Milieu homogène et isotrope

Le coefficient de perméabilité K a la même valeur en tous points et dans toutes les directions.

La loi de Darcy généralisée exprime que le vecteur vitesse de décharge et le gradient hydraulique sont proportionnels :

$$\vec{v} = K \cdot \vec{i}$$

En tout point M du milieu perméable, le vecteur gradient hydraulique est tangent à la ligne de courant passant par ce point et il est orienté dans le mêmes sens.

\vec{v} et \vec{i} sont colinéaires K , est un scalaire.

Comme par ailleurs $\vec{i} = -\overrightarrow{grad} h$, la loi de Darcy peut s'écrire :

$$\vec{v} = -K \cdot \overrightarrow{grad} h = \overrightarrow{grad}(-h \cdot K)$$

ce qui revient à postuler l'existence d'une fonction $\varphi(x,y,z) = -Kh$ appelée potentiel des vitesses (c'est-à-dire donnant les composantes de la vitesse dérivation:)

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -K \frac{\partial h}{\partial x} \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -K \frac{\partial h}{\partial y} \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -K \frac{\partial h}{\partial z}$$

La loi de conservation $\text{div}(\vec{v}) = 0$ s'écrit : $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\varphi) = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0$

De la même façon, après simplification par $-K$ on obtient : $\Delta h = 0$

La charge hydraulique est aussi une fonction harmonique

II.4.2 Milieu homogène et anisotrope

Dans ce cas, les vecteurs gradients hydraulique et vitesse de décharge ne sont plus colinéaire, ils se déduisent l'un de l'autre par un opérateur linéaire : tenseur de perméabilité (K) indépendant de x , y et z (homogénéité), symétrique et diagonalisable.

$$K = \begin{pmatrix} K_x & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_y & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{yy} & K_z \end{pmatrix}$$

Si les axes de coordonnées utilisées sont les directions principales, le tenseur de perméabilité (K), il est ramené à la forme diagonale et s'écrit :

$$K = \begin{pmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{pmatrix}$$

La loi de Darcy s'écrit : $\vec{v} = -K \cdot \overrightarrow{\text{grad}} h$

Les composantes de la vitesse de décharge ont pour expression :

$$v_x = -K \frac{\partial h}{\partial x} \quad v_y = -K \frac{\partial h}{\partial y} \quad v_z = -K \frac{\partial h}{\partial z}$$

La condition de continuité s'écrit

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

Ce n'est pas une équation de Laplace, la charge hydraulique n'est pas une fonction harmonique.

II.5 Conductivité hydraulique. Perméabilité intrinsèque

La perméabilité est l'aptitude d'un réservoir à se laisser traverser par l'eau sous l'effet d'un gradient hydraulique. Elle exprime la résistance du milieu à l'écoulement de l'eau qui la traverse. Elle est mesurée par deux paramètres : la conductivité hydraulique et la perméabilité intrinsèque.

II.5.1 Conductivité hydraulique

La conductivité hydraulique (ou coefficient de perméabilité) noté K qui a les dimension d'une vitesse $[L.T^{-1}]$, est défini par la loi de Darcy : $K = \frac{Q}{A} \cdot i$. La conductivité hydraulique dépend à la fois du liquide par l'intermédiaire de la viscosité ν , et du milieu poreux par l'intermédiaire du paramètre k (perméabilité intrinsèque). Théoriquement tous les matériaux conduisent de l'eau, mais à des degrés de perméabilité différents. Les valeurs du coefficient de perméabilité s'échelonnent entre 10 et 10^{-11} m/s.

Selon leur niveau de perméabilité, on distingue (Tableau II.2) :

- Les formations très perméables : $K > 10^{-2}$ m/s. (Gravier, gros sable)
- Les formations perméables : $10^{-2} > K > 10^{-5}$ m/s. (Sable)
- Les formations semi-perméables : $10^{-5} > K > 10^{-9}$ m/s. (Grès, calcaire)
- Les formations imperméables : $K < 10^{-9}$ m/s. (Argile, marne).

Tableau II.2 : Valeurs de perméabilité selon G. Castany, 1992.

Perméabilité K en m/s	10	1	10 ⁻¹	10 ⁻²	10 ⁻³	10 ⁻⁴	10 ⁻⁵	10 ⁻⁶	10 ⁻⁷	10 ⁻⁸	10 ⁻⁹	10 ⁻¹⁰	10 ⁻¹¹
Granulométrie homogène	Gravier pur				Sable Pur		Sable très fin			Limons		Argile	
Granulométrie variée	Gravier gros et moyen		Gravier Et Sable			Sable et limons argileux							
Degrés de perméabilité	TRES BONNE - BONNE					MAUVAISE					NULLE		
Type de formation	PERMEABLE					SEMI-PERMEABLE					IMPER- MEABLE		

II.5.2 Perméabilité intrinsèque

Ce paramètre caractérise la perméabilité propre de la formation aquifère indépendamment des caractéristiques du fluide. D'après l'équation II.13, la conductivité hydraulique appelée également coefficient de perméabilité, K dépend d'un côté du liquide par l'intermédiaire de la viscosité ν , et d'un autre côté du milieu poreux par l'intermédiaire du paramètre k appelé perméabilité intrinsèque ou géométrique, dont les dimensions $[L^2]$, elle s'exprime en m^2 ou en darcy. ($1 \text{ darcy} = 10^{-12} m^2$)

$$k = \frac{d^2}{a} \quad (\text{II.15})$$

Plusieurs formules empiriques permettent de calculer la perméabilité intrinsèque k

a. Formule de Kozeny

$$k = C \left(\frac{e_g}{S_g} \right) \frac{n^2}{(1 - n^2)} \quad (\text{II.16})$$

où (e_g/S_g) est le rapport entre le volume e_g et la surface S_g des grains.

b. Formule de Hazen valide pour un coefficient de conformité $C_u < 5$ et $d_{10} < 3 \text{ mm}$ ($C_u = d_{60}/d_{10}$).

$$k = A \cdot d_{10}^2 \quad (\text{II.17})$$

Où d_{10} est exprimée en cm et en $k \text{ cm}^2$. Les valeurs de A varient entre 46 pour le sable très argileux et 142 pour des sables. On prend en général $A = 100$

La conductivité hydraulique est liée à la perméabilité intrinsèque par la relation suivante :

On aura alors,

$$K = \frac{2g}{\nu} k \quad (\text{II.18})$$

II.6 Coefficient de perméabilité des terrains stratifiés

Dans le cas de terrains composés en couches superposées (cas des formations sédimentaires) et au lieu de traiter chaque couche séparément, on définit un terrain fictif qu'on considère comme homogène pour calculer la perméabilité qu'on qualifie d'équivalente. Deux situations peuvent se présenter (Figure II.3) :

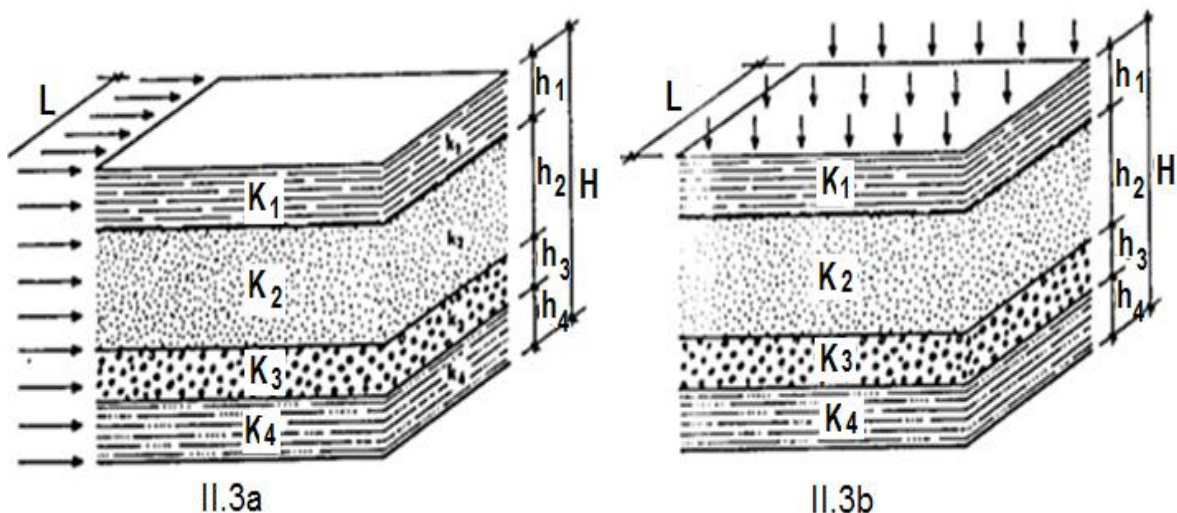


Figure II.3 : Configuration des sols stratifiés pour le calcul de coefficient de perméabilité équivalent

II.6.1 Ecoulement parallèle au plan de la stratification

Dans une telle situation (Figure II.3a), la perte de charge sera identique pour toutes les couches et le débit total correspond à la somme de débits de chaque couche.

- Pour une seule couche

$$v_j = K_j \cdot i \quad \rightarrow \quad q_j = K_j \cdot i \cdot h_j \cdot L$$

$$\frac{q_j}{a_j} = \frac{q_j}{h_j \cdot L}$$

- Le débit total vaut : $Q = \sum q_j = i \cdot L \sum K_j \cdot h_j$

- Soit un débit fictif homogène (dimensions identiques, même débit et perméabilité K_h)

$$v = K_h \cdot i \quad \rightarrow \quad q_h = K_h \cdot i \cdot H \cdot L$$

Puisque les débits sont identiques: $i \cdot L \sum K_j \cdot h_j = K_h \cdot i \cdot H \cdot L$

Le débit équivalent pour un écoulement parallèle à stratification sera donc :

$$K_h = \frac{1}{H} \cdot \sum_{i=1}^n K_j \cdot h_j \quad (II.19)$$

II.6.2 Ecoulement perpendiculaire au plan de la stratification

Dans une telle situation (Figure II.3b), la perte de charge totale sera la somme de perte de charge de chaque couche et le débit est identique pour toutes les couches.

- Pour une couche : $v_j = \frac{Q}{A} = Cte.$

$$v_j = K_j \cdot i_j \quad \rightarrow \quad v = K_j \cdot \frac{\Delta h_j}{H}$$

- Perte de charge totale : $\Delta H = \sum \Delta h_j = v \cdot \sum \frac{h_j}{K_j}$

- soit un sol fictif homogène de dimension identique, de même débit et de perméabilité K_V

$$v = K_V \cdot i = v = K_V \cdot \frac{\Delta h}{H} \quad \rightarrow \quad \Delta h = v \cdot \frac{H}{K_V}$$

Puisque les deux perte de charges sont les même :

$$v \cdot \sum \frac{h_j}{K_j} = v \cdot \frac{H}{K_V}$$

Le débit équivalent pour un écoulement perpendiculaire à stratification sera donc :

$$K_V = \frac{H}{\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{K_i}} \quad (II.20)$$

Exercice II. 1 :

1. Quel est le domaine de validité de la loi de Darcy ?
2. Définir les termes de cette loi.
3. Expliquer la différence entre vitesse de percolation de Darcy et vitesse réelle de l'eau.

Exercice II.2

Un essai de perméabilité à charge constante a été réalisé sur un échantillon de sable 10.06 cm de diamètre et 15.25 cm de hauteur. On a recueilli 163.87 cm³ d'eau pendant un temps $t=1.75$ min. sous une hauteur de 30.48 cm.

1. calculer K
2. calculer V en m/s

Chapitre III : Caractéristique des écoulements dans le milieu poreux

III.1 Ecoulement permanent

III.1.1 Considérations générales :

L'écoulement de Darcy est caractérisé par la loi de Darcy :

$$\vec{V} = -\bar{K} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \quad \text{III.1}$$

Dans un écoulement permanent la vitesse est constante au cours du temps, c'est dire que $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$. Ce régime d'écoulement est défini uniquement par le champ de la charge hydraulique qui lui correspond. La connaissance de φ et de ses dérivées, permet de déterminer en tout point au facteur K les composantes de la vitesse de filtration $V(u, v, w)$. Pour un écoulement permanent, φ ne va dépendre que des variables x, y, z

La mise en équation d'un écoulement permanent selon la loi Darcy consiste à rechercher les équations selon lesquelles doit satisfaire cette fonction dans le domaine de l'écoulement et également sur les limites de ce domaine.

III.1.2 Cas de terrains isotropes – Equation de Laplace.

Dans le cas de terrains isotropes, la loi de Darcy généralisé s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} u &= -K \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v &= -K \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w &= -K \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad \text{III.2}$$

Où u, v, w sont les composantes du vecteur de vitesse \vec{V} .

A ces équations s'ajoute la relation qui tient compte du comportement du fluide filtrant "Equation de continuité".

Soit un petit volume élémentaire (Figure III.1), et en supposant que le liquide filtrant et le milieu poreux sont incompressibles, et en admettant que la somme de débits entrants (dq_E) pour les trois faces soient égales à la somme des débits sortants (dq_S) par les faces opposées.

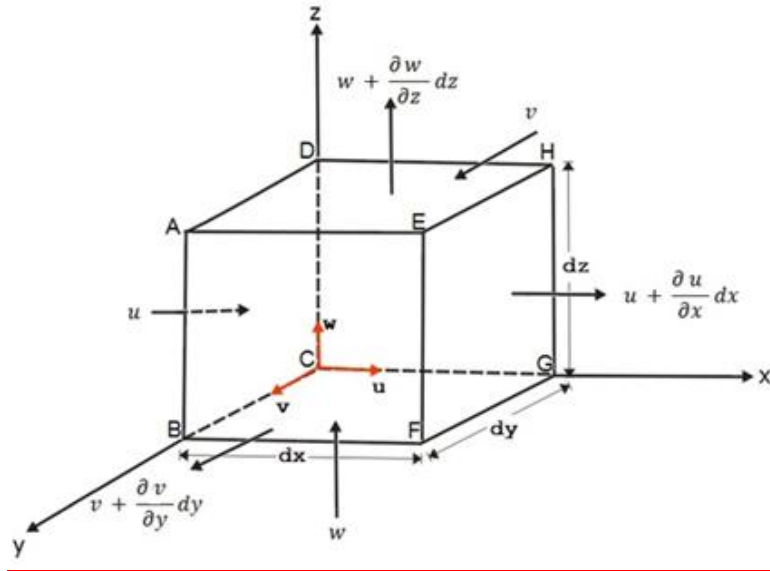


Figure III.1

Débit entrant :

$$\sum dq_E = \mu dydz + v dx dz + w dx dy \quad \text{III.3}$$

Débit sortant :

$$\begin{aligned} \sum dq_S = & \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \right) dy dz + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dy \right) dx dz \\ & + \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot dz \right) dx dy \end{aligned} \quad \text{III.4}$$

$$\sum dq_E = \sum dq_S \quad \Rightarrow \quad \sum dq_E - \sum dq_S = 0$$

$$[\mu dydz + v dx dz + w dx dy] - \left[\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \right) dy dz + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dy \right) dx dz + \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot dz \right) dx dy \right] = 0$$

$$\mu dydz + v dx dz + w dx dy - \mu dydz - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx dy dz - v dx dz - v \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dy dx dz - w dx dy - w \frac{\partial w}{\partial z} \cdot dz dx dy = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dy dx dz - \frac{\partial w}{\partial z} \cdot dz dx dy = 0 \Rightarrow - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz dx dy = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{III.5}$$

C'est l'équation de continuité qui peut être écrite vectoriellement $\text{div} \vec{V} = 0$ (divergence du vecteur de vitesse de filtration est nul).

Le champ de la charge hydraulique est caractérisé par éq. III.2 et III.5. En dérivant respectivement chacune des composantes de la vitesse de III.2 par rapport à x , y , z et en les additionnant, nous obtenons l'équation de Laplace qui est donnée dans III.6.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \equiv \Delta \varphi = 0 \quad \text{III.6}$$

Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel (écoulement en plan), l'équation de Laplace se réduit à :

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{III.7}$$

III.1.3 Cas de terrains anisotropes

Dans un milieu anisotrope, la loi de Darcy se généralise en considérant, les vitesses parallèles aux axes de coordonnées et les coefficients de perméabilités qui correspondent :

$$\left. \begin{aligned} u &= -K_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v &= -K_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w &= -K_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad \text{III.8}$$

Partant de l'équation de continuité (éq.III.5) et en dérivant les composantes de la vitesse on obtient :

$$K_x \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + K_y \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + K_z \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{III.9}$$

L'équation (III.9) n'est plus l'équation de Laplace comme en terrain isotrope, mais elle peut être ramenée à l'équation de Laplace en transformant le milieu géométrique réel en un milieu fictif en prenant :

$$x' = \frac{x}{a} \quad ; \quad y' = \frac{y}{b} \quad ; \quad z' = \frac{z}{c}$$

x, y, z Sont les coordonnées d'un point M du milieu réel et x', y', z' les coordonnées transformé M' du milieu fictif, a, b, c sont des constantes arbitraires. On aura alors :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} \quad \text{III.10a}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} \quad \text{III.10b}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial z'} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} \quad \text{III.10c}$$

En portant ces expressions dans l'équation (éq.5.9), on obtient :

$$\frac{K_x}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{K_y}{b^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{K_z}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = 0 \quad \text{III.11}$$

Pour que cette équation soit l'équation de Laplace, il faut et il suffit que :

$$\frac{K_x}{a^2} = \frac{K_y}{b^2} = \frac{K_z}{c^2} = K$$

On en déduit alors :

$$\frac{1}{a} = \sqrt{\frac{K_x}{K}} \quad ; \quad \frac{1}{b} = \sqrt{\frac{K_y}{K}} \quad ; \quad \frac{1}{c} = \sqrt{\frac{K_z}{K}}$$

Où K est une constante arbitraire ayant la dimension du coefficient de perméabilité. La transformation recherchée est donc :

$$\left. \begin{aligned} x' &= \sqrt{\frac{K}{K_x}} x \\ y' &= \sqrt{\frac{K}{K_y}} y \\ z' &= \sqrt{\frac{K}{K_z}} z \end{aligned} \right\} \quad \text{III.12}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} = \sqrt{\frac{K_x}{K}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} \right) \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{K_x}{K} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \text{III.13a}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} = \sqrt{\frac{K_y}{K}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial y'} = \frac{K_y}{K} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad \text{III.13b}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z'} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z'} = \sqrt{\frac{K_z}{K}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z'} \right) \frac{\partial z}{\partial z'} = \frac{K_z}{K} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad \text{III.13c}$$

En tenant compte de l'équation (III.9) on retrouve l'équation de Laplace.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = 0 \quad \text{III.14}$$

Soit $\vec{V}(u, v, w)$ la vitesse de filtration dans le domaine réel où :

$$u = \frac{dx}{dt} \quad v = \frac{dy}{dt} \quad \text{et} \quad w = \frac{dz}{dt}$$

Le débit qui traverse un parallélépipède de cotés dx , dy et dz est :

$$dQ = \mu dydz + v dx dz + w dx dy \quad \text{III.15}$$

Dans le domaine transformé, la vitesse de filtration $\vec{V}'(u', v', w')$:

$$u' = \frac{dx'}{dt} = \frac{1}{a} \frac{du}{dt} = \frac{u}{a} \quad v' = \frac{v}{b} \quad \text{et} \quad w' = \frac{w}{c}$$

Le débit qui traverse un parallélépipède de coté dx' , dy' et dz' est donc :

$$dQ' = \mu' dy' dz' + v' dx' dz' + w' dx' dy' \quad \text{III.16a}$$

$$dQ' = \frac{1}{abc} (\mu dy dz + v dx dz + w dx dy) = \frac{dQ}{abc} \quad \text{III.16b}$$

Compte tenu des équations (III.12) et (III.14) on obtient :

$$dQ = \sqrt{\frac{K_x K_y K_z}{K^2}} dQ' \quad \text{III.17}$$

III.1.4 Ecoulement en charge et écoulement à surface libre

III.1.4.1 Ecoulement en charge

Un écoulement est défini comme étant un écoulement limité par deux sortes de surfaces :

a. **Surfaces imperméables** : ce sont soit des assises de formations imperméables, soit des parois étanches. L'imperméabilité se traduit par le fait qu'aucun débit ne traverse les limites étanches. Pour un milieu isotrope, on aura :

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = -K \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

C'est-à-dire que la composante de la vitesse de filtration selon la normale n à la surface imperméable est nulle. La condition à la limite est valable sur une surface imperméable sera :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad \text{III.18}$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ est une « condition de Neumann ». Elle implique que les équipotentiels recoupent les surfaces imperméables suivant un angle droit

b. **Surfaces filtrantes** : dans ces surfaces, l'écoulement souterrain est en contact avec la masse d'eau libre. Dans cette masse les pertes de charge sont négligeables, de telle sorte que la charge hydraulique y est constante. La condition à la limite est :

$$\varphi = 0 \quad \text{III.19}$$

C'est une « condition de Dirichlet » les surfaces filtrantes s'identifient avec les surfaces équipotentiels.

III.1.4.2 Ecoulement à surface libre

Il est caractérisé par la présence d'une surface libre limitant cet écoulement vers le haut (ex : Nappes phréatiques ; Ligne de saturation de l'écoulement à travers une digue enterrée)

La surface libre est soumise à la pression atmosphérique. En prenant comme origine des pressions, la pression atmosphérique, on aura :

$$p = 0 \text{ ou son équivalent } \varphi = z \quad \text{III.20}$$

Donc on a sur la surface libre la double condition :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ et } \varphi = z \quad \text{III.21}$$

Les figures III.2a et III.2b montrent un écoulement à surface libre vers un puits est à travers une digue, où on remarque dans les deux cas que la surface libre ne se raccorde pas au plan d'eau aval appelée surface de suintement à travers laquelle l'eau sort à l'air libre où règne la pression atmosphérique, et la condition à la limite qui correspond à cette surface est :

$$\varphi = z \quad \text{III.22}$$

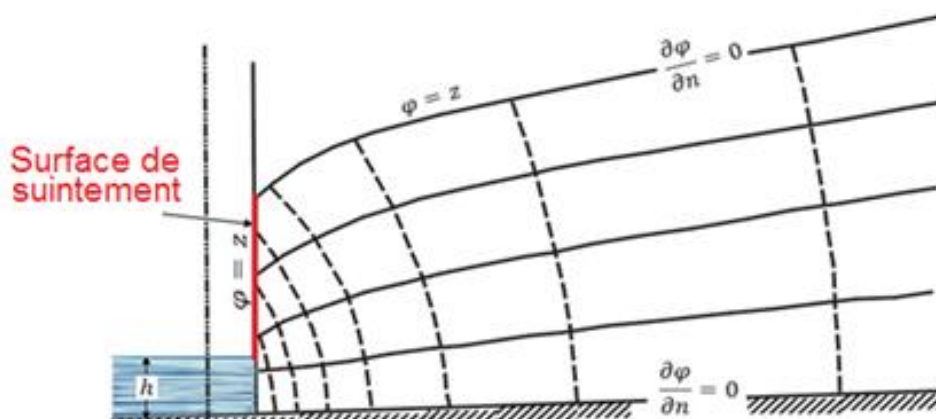


Figure III.2a : Ecoulement à surface libre vers un puits

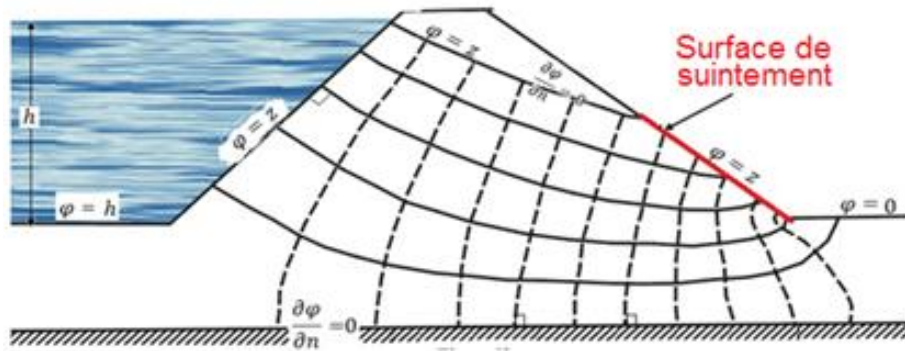


Figure 2b : Ecoulement à surface libre à travers une digue

Exemples de conditions aux limites

Soit un barrage en terre de section droite ABCD (Figure III.3) reposant sur un substratum imperméable. La hauteur de l'eau dans la retenue est H. Le plan de référence est le niveau du substratum. Il correspond au niveau de l'eau en aval.

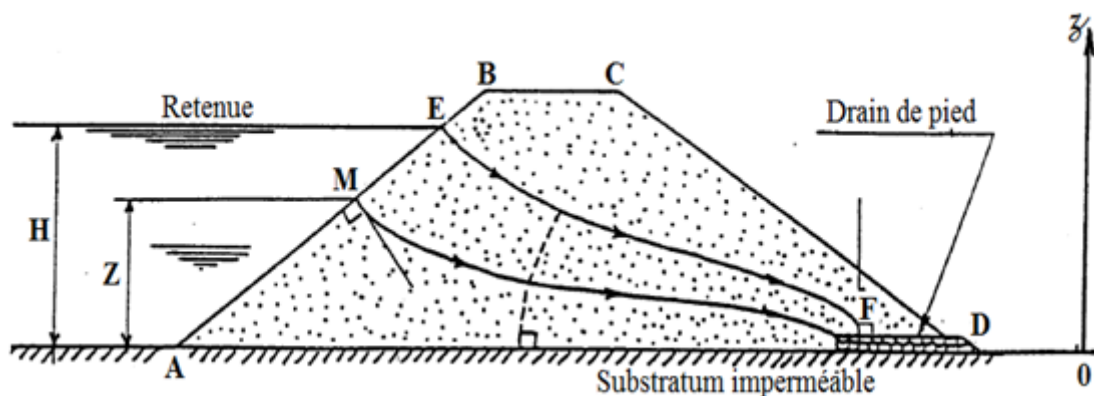


Figure 3 Les conditions aux limites de l'écoulement sont les suivantes :

- AF est une **surface imperméable** : aucun débit ne la traverse, la composante de la vitesse de charge selon la normale \vec{n} à la surface imperméable est nulle : le gradient hydraulique transversal est nul.

$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$. La dérivée normale est nulle (**condition de Neumann**) et AF est une ligne de courant.

- AE est une **surface filtrante** : c'est une surface en contact avec la masse d'eau libre. Dans la masse d'eau libre, les pertes de charge sont négligeables :

$$\varphi = \text{constante}$$

La condition à la limite sur AE est donc : $\varphi = c^{ste}$. (**condition de Dirichlet**)

Les surfaces filtrantes sont des surfaces équipotentiels.

AE est normale aux lignes de courant.

- EF est la **surface libre** (surface de la nappe) : le débit qui la traverse est nul : le gradient hydraulique transversal est nul : $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ (\vec{n} normal à EF au point considéré). C'est une ligne de courant. Elle n'est soumise qu'à la pression atmosphérique. En négligeant la capillarité $\varphi = z$

On a donc la double condition : $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ et $\varphi = z$

- Au point F et dans le drain de pied : $\varphi = 0$
L'écoulement considéré, limité dans sa partie supérieure par une surface libre est dit **écoulement à surface libre**

III.1.4.3 Ecoulement des nappes à surface libre à substratum imperméable

Considérons un prisme élémentaire de section horizontale $dx dy$ découpé dans un écoulement des nappes à surface libre (Fig.4). Le traversant la face AacC de largeur dy normale à ox , est :

$$dQ_x = \int_0^h u dy dz = -K dy \int_0^h \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz$$

Le débit traversant d'unité de largeur dy de la nappe dont la dimension $[L^2 T^{-1}]$, est :

$$q_x = \frac{dQ_x}{dy} = \int_0^h u dz = -K \int_0^h \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz \quad \text{III.22}$$

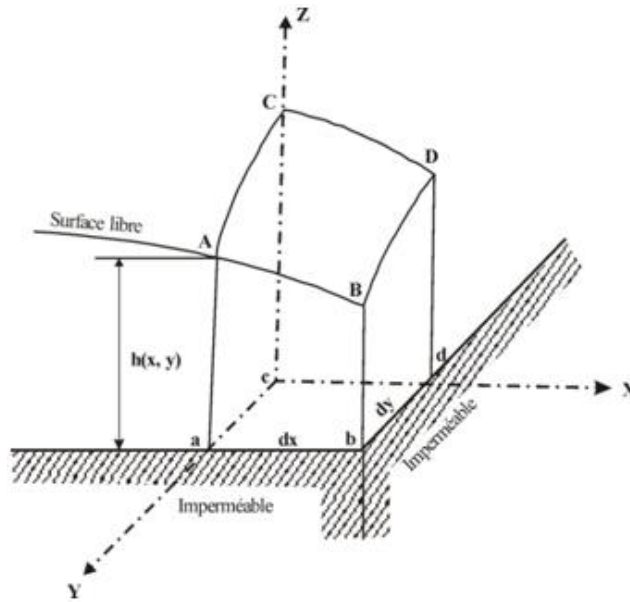


Figure 4

En dérivant l'équation III.22 selon la règle de Leibnitz et en tenant compte de ce que la limite supérieure de l'intégrale est une fonction de x et y , $h(x, y)$ on obtient :

$$q_x = -K \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \varphi dz - \varphi(z=h) \frac{\partial h}{\partial x} \right\} \quad \text{III.23}$$

En négligeant l'effet de capillarité (car à la surface libre règne la pression atmosphérique) alors :

$$\varphi(z=h) = z = h \quad \text{III.24}$$

On peut donc écrire :

$$q_x = -K \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^h \varphi dz - \frac{h^2}{2} \right\}$$

La quantité $\left\{ \int_0^h \varphi dz - \frac{h^2}{2} \right\}$ est fonction de x et y qu'on va exprimer par $I(x, y)$:

$$I(x, y) = \left\{ \int_0^h \varphi dz - \frac{h^2}{2} \right\} \quad \text{III.25}$$

Règle de Leibnitz

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{B(x)}^{A(x)} f(x, y) dy = \int_{B(x)}^{A(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy + f(x, A) \frac{\partial A}{\partial x} - f(x, B) \frac{\partial B}{\partial x}$$

Nous obtenons :

$$q_x = -K \frac{\partial I}{\partial x} \quad \text{III.26}$$

De même le débit par unité de largeur dx à travers la fac AabB

$$q_y = -K \frac{\partial I}{\partial y} \quad \text{III.27}$$

Etant donné que l'écoulement est permanent et partant du principe de débit entrant est égale au débit sortant (équation de continuité), on obtient :

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad \text{III.28}$$

Partant de l'équation III.26 et l'équation III.27 on retrouve l'équation de Laplace dans un plan horizontal :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = 0 \quad \text{III.29}$$

Comme il a été vu au paragraphe 5.1, la fonction I sera déterminée par les conditions aux limites auxquelles est soumis le contour de l'écoulement.

Deux cas peuvent se présenter :

1^{er} Cas : Nappe limitée par une paroi verticale étanche (imperméable)

La condition sur une paroi imperméable est :

$$\frac{\partial I}{\partial n} = 0 \quad \text{III.30}$$

\vec{n} étant la normale imperméable. C'est-à-dire qu'aucun débit q_n ne traverse cette limite.

2^{ème} Cas : Nappe limitée par une surface filtrante (perméable)

Deux cas peuvent se présenter :

- Surface filtrante AB sépare la nappe d'eau d'une masse d'eau (Fig.III.5a)

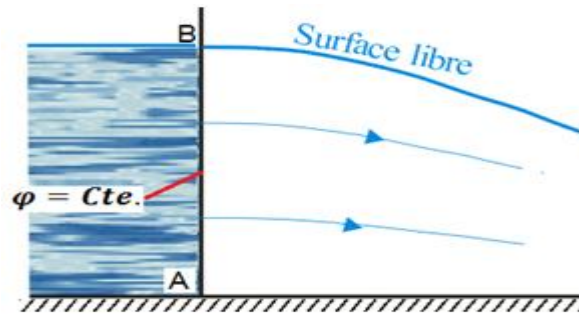


Figure III.5a

Le long de la surface AB, la charge reste constante et égale à h_1 (AB est une surface équipotentielle). La valeur de I sur AB sera.

$$I = \int_0^{h_1} h_1 dz - \frac{h_1^2}{2}$$

$$I = \frac{h_1^2}{2} = Cte. \quad \text{III.31}$$

- Nappe s'écoule à travers une surface (exemple paroi de puits ou de tranchée drainante) (Fig.III.5b)

Dans ce cas la surface de la masse d'eau dans les ouvrages (puits, tranchée drainante) ne se raccorde pas à surface libre de la nappe. Il y a "surface de suintement" BC.

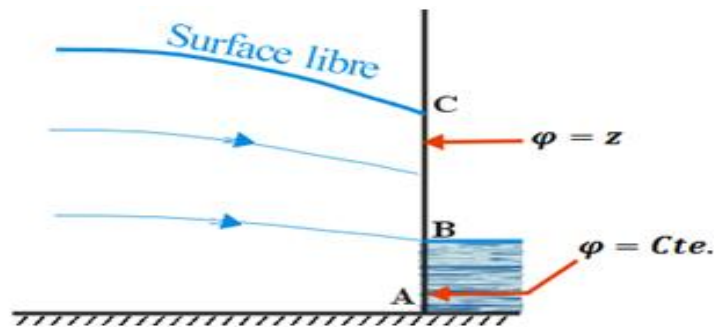


Figure III.5b

Il faut considérer ici deux conditions aux limites imposées à φ .

- de A à B : $\varphi = Cte. = h_2$
- de B à C : $\varphi = z$

$$I = \int_0^{h_2} h_2 dz + \int_{h_2}^h z dz - \frac{h^2}{2}$$

$$I = h_2^2 + \frac{h^2}{2} - \frac{h_2^2}{2} - \frac{h^2}{2} = \frac{h_2^2}{2} = Cte. \quad \text{III.31}$$

III.2 Ecoulement non permanent

III.2.1 Considérations générales

La loi de Darcy a été établie à partir des expériences réalisées en régime permanent :

$$\vec{V} = -K \overrightarrow{grad} \varphi \quad \text{III.32}$$

Dans le cas d'un « écoulement non permanent », la loi fondamentale de filtration doit avoir une forme qui tient compte de l'effet tel que :

$$\vec{V} - \alpha \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -K \overrightarrow{grad} \varphi \quad \text{III.33}$$

Compte tenu des valeurs faibles de vitesse de filtration, donc les accélérations seront également faibles et le terme $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ sera généralement négligé. On peut alors considérer que la loi de Darcy comme valable à chaque instant en tenant compte de \vec{V} et φ qui sont fonction non seulement des variables géométriques (x, y, z), mais également du temps (t).

III.2.2 Ecoulement à surface libre

On considère que l'écoulement se caractérisant par la présence d'une surface libre qui se déforme dans le temps suite à la variation brusque ou continue d'une ou plusieurs conditions aux limites. Tels que l'écoulement qui se produit dans une digue en terre suite à la vidange de la retenue, ou bien écoulement d'une nappe aux voisinages d'un puits dans les premiers instants qui suivent le démarrage du pompage.

Les hypothèses à retenir dans l'étude de ces types d'écoulements sont :

- a. Validité de la loi de Darcy à chaque instant de l'écoulement :

$$\vec{V} = -K \overrightarrow{grad} \varphi$$

Où \vec{V} et φ sont fonctions du temps "t".

b. Incompressibilité du liquide filtrant, ce qui conduit à l'équation de continuité valable en tout point et à chaque instant :

$$\overline{\text{div}\vec{V}} = 0$$

Ces deux équations se condensent pour donner l'équation de Laplace :

$$\Delta\varphi = 0$$

Où φ dépend du temps "t".

La solution du problème à un instant donnée (i.e. la détermination du champ de la charge hydraulique φ à cet instant), nécessite la connaissance :

✓ des limites géométriques de l'écoulement, qu'on peut déterminer à chaque instant, il s'agit :

- des limites imperméables,
- des limites équipotentielles

✓ des conditions auxquelles doit satisfaire φ sur ces limites, à savoir :

- sur toute surface imperméable, quelque soit le temps "t" on a:
 $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ (Condition de Neumann)
- sur les surfaces équipotentielles par lesquelles l'écoulement est en contact avec des masses d'eau libre : $\varphi = \varphi_0 = \text{constant}$ (Condition de Dirichlet)
- sur les surfaces le long desquelles l'écoulement est en contact avec l'air, la pression est atmosphérique, on a : $\varphi = z$

Considérant un écoulement à deux dimensions dont l'une verticale, et en prenant deux positions successives de la surface libre (Figure III.6), correspondant successivement au temps (t) et ($t + dt$).

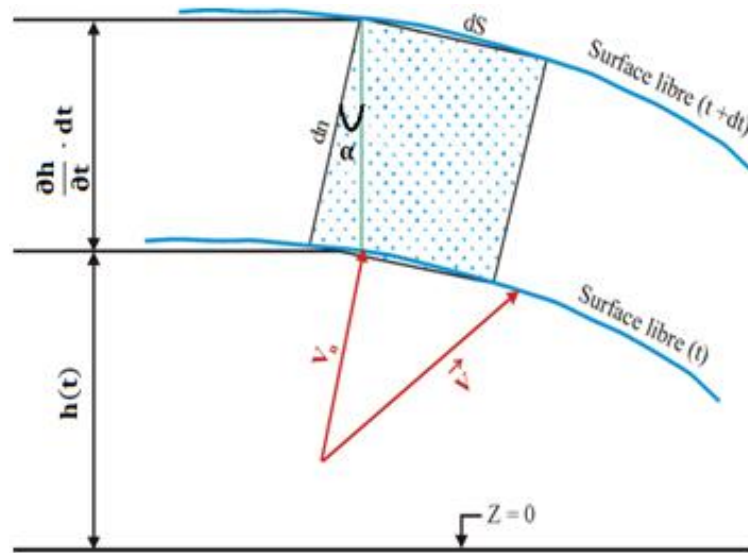


Figure III.6

v_n , composante de la vitesse de filtration dirigée selon la normal \vec{n}

dS , élément de la surface $h(x, t)$

$v_n dS$, le flux qui traverse l'élément dS

En raison de la continuité de l'écoulement, la quantité d'eau ayant traversée l'élément dS pendant le temps (t) correspond aux vides du petit volume : $n_e dS dn$ (n_e porosité effective)

On peut alors écrire :

$$v_n dS dt = n_e dS dn = -K \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \quad \text{III.34}$$

Dans un intervalle de temps dt la cote de la surface libre passe de h à $h + \frac{\partial h}{\partial t} dt$

D'après la figure ci-dessus, on aura : $dn = \frac{\partial h}{\partial t} dt \cos \alpha$

D'autre part, la composante v_n du vecteur de la vitesse $\vec{V}(u, w)$ est :

$$v_n = \vec{V} \cdot \vec{n} = u \sin \alpha + w \cos \alpha$$

En remplaçant ces termes dans l'équation 6.3, on obtient :

$$n_e \frac{\partial h}{\partial t} dt \cos \alpha = u \sin \alpha dt + w \cos \alpha dt \quad \text{III.35}$$

En disant les termes de l'équation 6.4 par $\cos \alpha$ on obtient :

$$n_e \frac{\partial h}{\partial t} dt = u \operatorname{tg} \alpha dt + w dt$$

En tenant compte que :

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\partial h}{\partial x} \quad u = -K \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad w = -K \frac{\partial \varphi}{\partial Z}$$

L'équation III.35 se réduit à :

$$\frac{n_e}{K} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial Z} \quad \text{III.36}$$

C'est l'équation du mouvement de la surface libre. Dans cette équation aux dérivées partielles figure à la fois, la fonction $h(x, t)$ qui définit la surface libre et la fonction de la charge hydraulique $\varphi(x, z, t)$.

L'équation du mouvement de la surface libre peut être généralisée à un écoulement à trois dimensions :

$$\frac{n_e}{K} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial Z} \quad \text{III.37}$$

Dans le cas d'un terrain anisotrope de perméabilités principales K_x , K_y et K_z

$$n_e \frac{\partial h}{\partial t} = K_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + K_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} - K_z \frac{\partial \varphi}{\partial Z} \quad \text{III.38}$$

Exercice III.1

On considère un écoulement permanent défini dans un repère $(0, x, y, z)$ par le champ des vitesses suivant, en variables d'Euler :

$$\vec{V} = \begin{cases} u = 2x - 3z \\ v = 0 \\ w = 3x - 2z \end{cases}$$

- 1) Montrer que le fluide est incompressible.
- 2) Calculer le champ de vecteurs accélération \vec{a} .
- 3) Déterminer les équations du réseau des lignes de courant.

Quelques notions pour rappel

- 1) Montrer que le fluide est incompressible, il suffit de montrer que

$$\mathbf{div}\vec{V} = 0$$

- 2) L'accélération est définie par la relation suivante.

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$$

- 3) Les lignes de courant sont définies par l'équation :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

Chapitre IV : Hydraulique des puits

IV.1 Définition de quelques paramètres hydrodynamiques

IV.1.1 Aquifère à nappe libre

Un aquifère à nappe libre est une nappe souterraine dont la surface supérieure est à pression atmosphérique : c'est la surface piézométrique. Le niveau de l'eau dans un forage indique la surface piézométrique ou surface à pression atmosphérique (Figure IV.1). En pression relative, la cote piézométrique est confondue à la cote altimétrique; la pression dynamique est négligée du fait des écoulements assez lents dans les domaines aquifères.

La recharge de cette nappe se fait directement par les eaux de pluie. La capacité d'emmagasinement de la nappe est égale à sa porosité efficace.

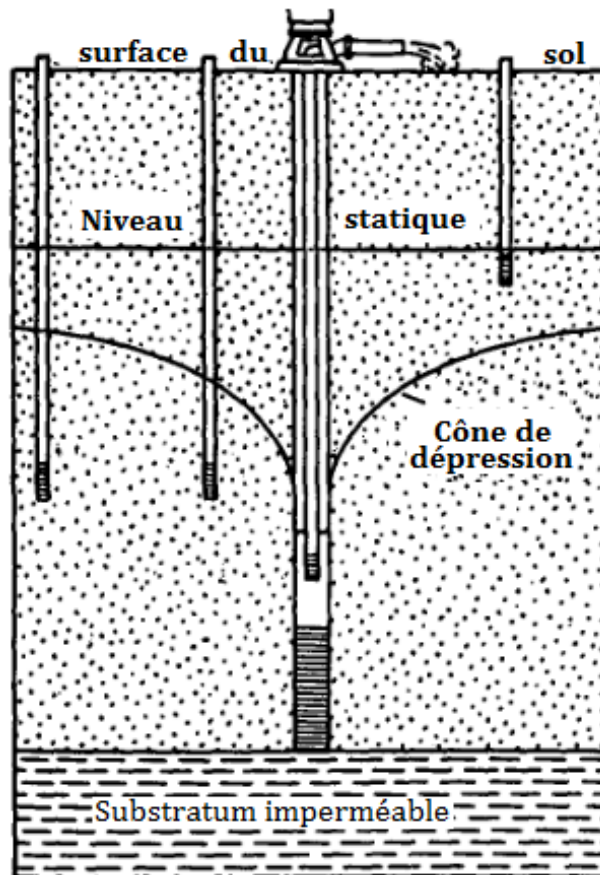


Figure IV.1 : Nappe libre

IV.1 .2 Nappes captives

La situation d'une nappe captive (ou d'une partie de nappe) est celle où la formation aquifère est contrainte entre deux niveaux imperméables (Figure IV.2). L'eau d'infiltration provient de zones éloignées qui imposent leurs conditions (flux, pression d'eau). Dans ce cas, le remplissage de la nappe se fait comme dans le cas de la nappe libre (à une pression proche de la pression atmosphérique) tant qu'il reste des vides. Lorsque le toit de la formation est atteint, l'eau ne peut entrer dans le milieu poreux que par d'autres processus, tels que le réarrangement des grains solides, la compressibilité de l'eau, ou la compressibilité de la matrice poreuse. La capacité d'emmagasinement de la nappe est donc plus complexe à évaluer et dépend des propriétés du fluide et du milieu.

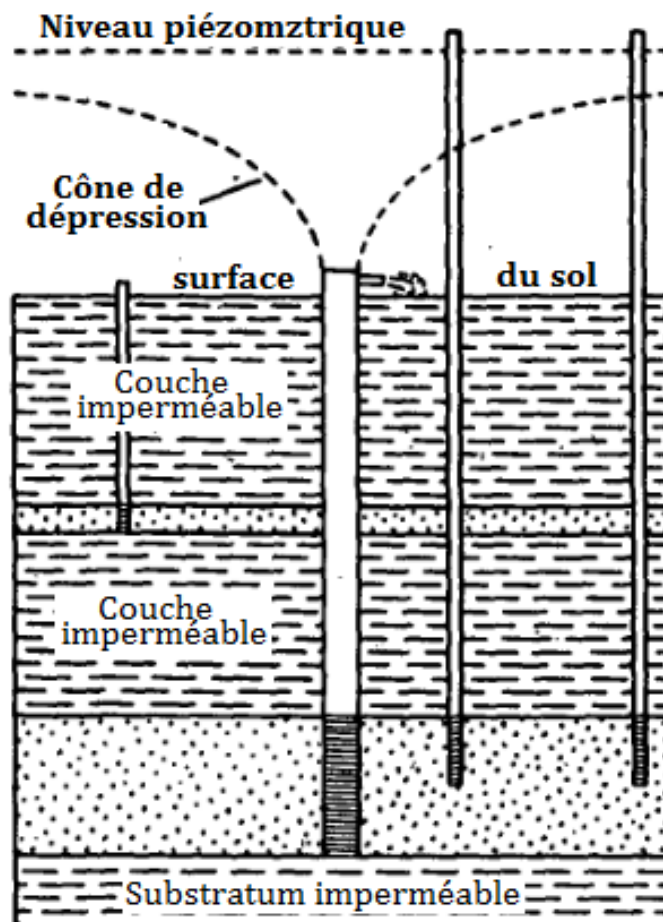


Figure IV.2 : Nappe captive

IV.1 .3 La transmissivité (T)

Dans un aquifère d'une épaisseur (e) et d'une conductivité hydraulique à saturation d'un aquifère (K_S), la transmissivité correspond au débit par unité de largeur d'une nappe d'eau souterraine sous un gradient de charge unitaire. Dimension : $[L^2T^{-1}]$

$$T = K_S \cdot e \quad \text{IV.1}$$

Connaissant la transmissivité d'un aquifère on peut calculer le Q traversant une section transversale d'une nappe de puissance (épaisseur) e et de largeur L , sous un gradient .

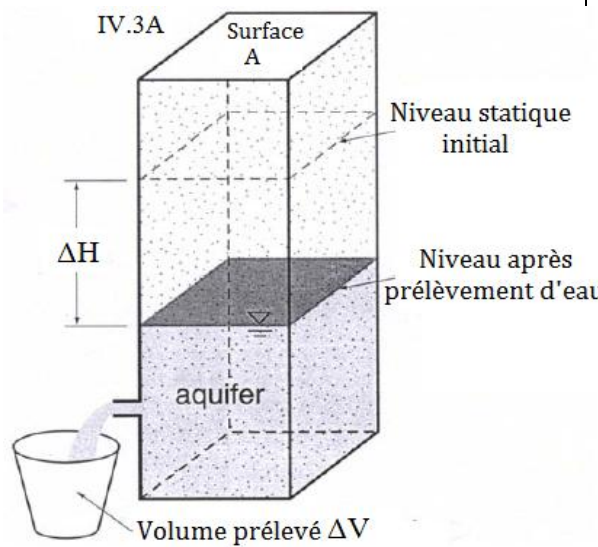
$$Q = TL \text{ grad } H \quad \text{IV.2}$$

IV.1 .4 Le coefficient d'emmagasinement (S)

C'est le rapport du volume d'eau libéré ou emmagasiné, par unité de surface de l'aquifère, à la variation de charge hydraulique ΔH correspondante. Le coefficient d'emmagasinement (sans dimension) est utilisé pour caractériser plus précisément le volume d'eau exploitable, il conditionne l'emmagasinement de l'eau souterraine mobile dans les vides du réservoir. Dans le cas d'une nappe à surface libre (Figure IV.IIIA), S représente la porosité efficace (n_e) du milieu poreux.

Pour une nappe captive (Figure IV.3B) le coefficient d'emmagasinement est extrêmement faible, c'est essentiellement la compressibilité de l'eau de l'aquifère qui interviennent dans la libération de l'eau. Durant le pompage, le niveau piézométrique (NP) baisse et l'eau dans l'aquifère subit une décompression accompagnée d'une libération de l'eau. Au même temps que la pression de l'eau diminue, la compression de l'aquifère par les couches géologiques supérieures augmente en expulsant l'eau vers l'ouvrage de captage.

Cas d'aquifère à nappe libre



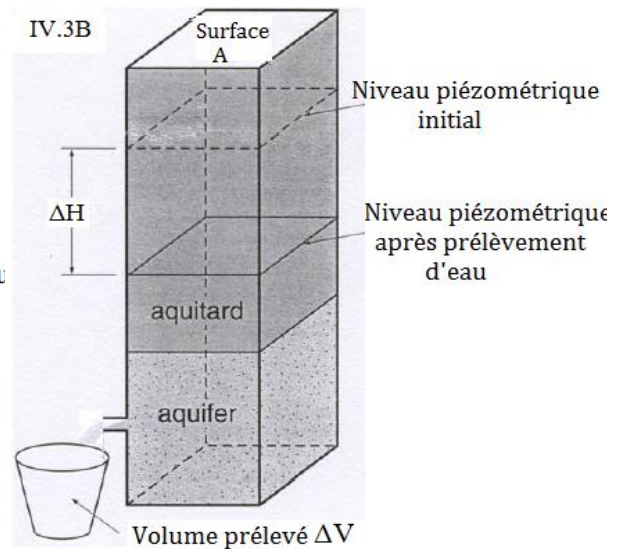
$$S = n_e = \frac{\Delta V}{A \cdot \Delta H}$$

$$n_e = \frac{\text{Volume d'eau libéré}}{\text{Volume de l'aquifère ayant cédé l'eau}}$$

S : Coefficient d'emmagasinement

n_e : Porosité efficace

Nappe captive



$$S = n_e = \frac{\Delta V}{A \cdot \Delta H}$$

ΔV : Volume d'eau libéré suite à un abaissement ΔH de la surface piézométrique

Figure 3 :

IV.1 .5 Surface piézométrique et Isopièzes

Surface piézométrique d'une nappe, la surface sur laquelle la pression des particules liquides est égale à la pression atmosphérique. Les isopièzes correspondent à l'ensemble des points ayant le même niveau piézométrique. La représentation des isopièzes permet de déterminer les sens des écoulements dans une nappe.

IV.1 .6 Lignes de courants et sens d'écoulement

Dans un milieu homogène et isotrope, les lignes de courant sont les droites perpendiculaires aux isopièzes. Le sens d'écoulement caractérisant chaque ligne de courant sera de l'isopièze de valeur élevée vers l'isopièze de faible valeur.

IV.2 Captage des eaux souterraines

Lorsqu'un aquifère à nappe libre ne présente pas de sources ou bien s'il n'existe pas de points favorables pour en creuser des tranchées, la seule solution serait de réaliser des puits ou forages. Mais la réalisation de ces derniers nécessite l'opération de pompage, ce qui va entraîner des charges et des frais d'exploitation permanent. Mais, les possibilités d'abaisser le volume, la surface piézométrique, l'action non linéaire mais rayonnante sur la nappe avantagent les puits par rapport aux tranchées. Dans le cas des nappes captives les forages et les puits restent le seul moyen de captage. Des formules permettent de relier le débit extrait, la transmissivité des terrains au rabattement de la nappe dans le puits et à une distance du point de pompage. Cependant, il faut préciser les conditions suivantes :

- a.** Les systèmes "Forage – Nappe" sont en équilibre hydrodynamique, c'est-à-dire en mouvement permanent, cette condition correspond à l'exploitation de la nappe (après de longue durée de pompage).
- b.** Les systèmes "Forage – Nappe" ne sont pas en équilibre hydrodynamique, ils sont en régime transitoire, cette condition est observée au commencement d'un essai de pompage et au début de l'exploitation d'une nappe d'eau. Le régime de mise en pompage donne toujours un débit supérieur par rapport à ce que peut indiquer le rabattement observé du niveau piézométrique de la nappe.

Les ouvrages de captage permettent de mobiliser ou d'évacuer l'eau gravitaire des formations aquifères, et sont regroupés en deux types :

- a.** Ouvrages de captage pour l'approvisionnement en eau tels que les puits (diamètre important et faible profondeur) et les forages (faible diamètre et profondeur élevée).

- b. Ouvrages de captage pour l'élimination des eaux excédentaires nuisibles aux cultures (fossés de drainage, drains, puits de drainage)

Lorsque les ouvrages de captage atteignent le substratum imperméable et captent la nappe sur toute sa hauteur, on parle d'ouvrage "**PARFAIS**" ou "**COMPLET**". Lorsque le fond de l'ouvrage de captage est situé plus haut que le niveau imperméable, le forage est dit "**IMPARFAIS**" ou "**IMCOMPLET**".

IV.3 Régimes d'écoulement dans le milieu poreux et types de nappe

Lors de l'exploitation à débit constant d'un ouvrage de captage, la courbe de dépression de la surface piézométrique des eaux souterraines atteint un profil d'équilibre lié au rayon d'action constant et à un niveau constant caractérisant un **régime permanent**, c'est l'écoulement en **régime d'équilibre**. Par ailleurs l'expérience a montré qu'en réalité, la surface de dépression ne présente que rarement une forme stable et que la zone d'influence croît avec le temps c'est le **régime de non-équilibre**, qui conduit à un **régime d'écoulement non permanent**. Dans le régime de non-équilibre, le débit est constant et le mouvement non permanent. Après un certain temps de pompage vers une stabilisation apparente sera établie et l'écoulement devient **quasi-permanent**.

Dans l'étude dynamique des eaux souterraines au voisinage des ouvrages de captage en régime d'équilibre, on distingue les deux principaux types de nappes, à savoir :

- **Nappes cylindrique** : elles sont représentées par la circulation des eaux souterraines vers un drain à partir d'une tranchée d'alimentation écoulement. L'écoulement présente deux dimensions et peut être étudié dans un plan vertical parallèle aux filets liquides

- **Nappes à filets convergents** : elles sont créées par un puits, où la nature du mouvement est caractérisée par trois composantes (écoulement à trois dimensions).

IV.3.1 Ecoulement permanent vers un ouvrage de captage

Les travaux de J. Dupuit en 1863 sont à la base de l'étude dynamique des eaux souterraines au voisinage des ouvrages de captage en régime d'équilibre et d'écoulement permanent. Ces travaux lui ont permis d'établir des formules en admettant les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Le milieu homogène, isotrope et indéformable,
- La composante verticale des vitesses négligeable,
- La vitesse identique en tous points d'une même verticale
 - Les équipotentiels théoriques sont verticales
 - La loi de Darcy est applicable :

Sous les hypothèses retenues, le flux en chaque point est donc proportionnel à la pente de la nappe.

c. Nappes cylindriques

Dans l'écoulement vers une tranchée ou un drain les génératrices de la surface de la nappe sont parallèles à la tranchée ou aux drains et l'écoulement dans un plan vertical est perpendiculaire.

a.1 Rabattement par un contre canal

Dans le cas le plus courant d'un cours d'eau et de son contre-canal reposant sur le substratum imperméable et à parois verticales (Figure IV.4), le débit par mètre linéaire Q_Y franchissant une section quelconque d'abscisse x s'écrit selon la loi de Darcy, on aura :

$$Q_Y = q S = q z (1 m) \quad \text{IV.3}$$

$$q = -K_s \frac{dH}{dx} = -K_s \frac{dz}{dx} \quad \text{IV.4}$$

$$Q_y = -K_s z \frac{dz}{dx} \quad \text{IV.5}$$

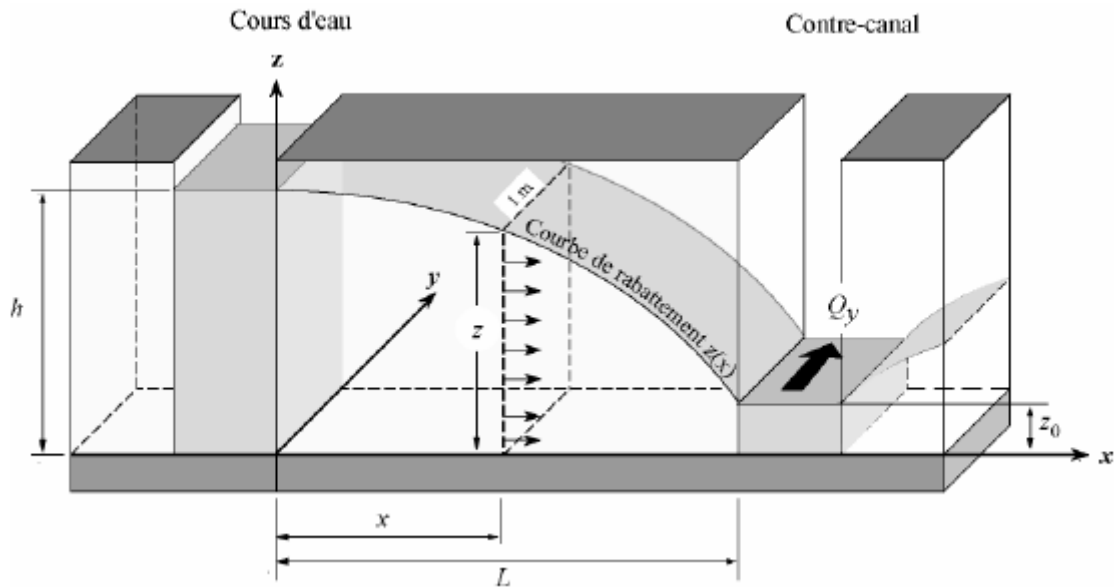


Figure IV.4 : Rabattement par un contre-canal

Soit, en intégrant :

$$Q_y \int_0^L dx = -K_s \int_h^{z_0} z dz \quad \Rightarrow \quad Q_L L = \frac{K_s}{2} (h^2 - z_0^2) \quad \text{IV.6}$$

$$Q_y = \frac{K_s}{2L} (h^2 - z_0^2) \quad \text{IV.7}$$

Pour un canal de longueur D :

$$Q = \frac{K_s D}{2L} (z^2 - z_0^2) \quad \text{IV.8}$$

K_s : Perméabilité à saturation;

L : Distance séparant la rivière du canal;

h : Hauteur de l'eau dans la rivière

z_0 : Hauteur d'eau dans le contre-canal;

Q : Débit du canal.

Equation $z(x)$ de la courbe de rabattement de la nappe

Pour un point (x, z) quelconque, l'équation du débit devient :

$$Q_y = \frac{K_s}{2x} (h^2 - z_0^2) \quad \text{IV.9}$$

En égalant les équations IV.7 et IV.9, on obtient :

$$\frac{K_s}{2L} (h^2 - z_0^2) = \frac{K_s}{2x} (z^2 - z_0^2) \quad \Rightarrow \quad (z^2 - z_0^2) = \frac{x}{L} (h^2 - z_0^2)$$

On obtient

$$z^2 = \frac{x}{L} (h^2 - z_0^2) + z_0^2 \quad \text{IV.10}$$

La surface de la nappe est donc cylindrique, d'axe parallèle au canal et de forme parabolique.

a.2 Rabattement dans un canal unique

Les équations de rabattement par un contre-canal peuvent être étendues au cas de rabattement d'une nappe par un canal unique (tranchée ou fossé), sans l'existence d'un ouvrage d'alimentation. Dans ce cas la distance L représente la zone d'influence du canal sur le niveau de la nappe, qu'on appelle distance d'action ou distance d'influence.

$$L = \frac{K_s}{2Q_y} (h^2 - z_0^2) \quad \text{IV.11}$$

d. Nappes à filets convergents

Dans nappes à filets convergents, la surface de la nappe présente une surface conique de révolution (cône de dépression) autour de l'axe du puits

et l'influence du pompage se fait sentir sur une certaine distance **R** (rayon d'action = rayon d'influence) de l'axe du puits.

b.1 Rabattement par puits en nappe libre

Le débit Q à travers un puits de rayon x et de hauteur z concentrique est donné par suivante (Fig.3):

$$Q = q S \text{ et } S = 2 \pi \cdot x \cdot z$$

$$q = K_S \frac{dH}{dx} = K_S \frac{dz}{dx}$$

$$Q = 2 \pi \cdot x \cdot z \cdot K_S \frac{dz}{dx} \quad \text{IV.12}$$

En intégrant :

$$Q \int_r^R \frac{dx}{x} = 2 \pi K_S \int_{z_0}^h z dz \quad \Rightarrow \quad Q (\ln R - \ln r) = \frac{2 \pi K_S}{2} (h^2 - z_0^2)$$

$$Q = \pi K_S \frac{(h^2 - z_0^2)}{\ln(R/r)} \quad \text{IV.13}$$

Où **R** est le rayon d'action et **r** est le rayon du puits de pompage.

L'utilisation de la formule de Dupuit nécessite la connaissance du rayon d'action **R**. Ce dernier peut être évalué de différentes manières, soit simplement par le relevé du niveau de la nappe au cours du pompage, soit à l'aide de formules empiriques, soit encore par un calcul théorique en régime transitoire.

- Par observation du rabattement in-situ au moyen de piézomètres implantés à des distances croissantes de l'ouvrage de captage.
- A partir des lois de Dupuit :

- Pour un canal :

$$R = \frac{K_S L}{2Q} (h^2 - z_0^2)$$

- Pour un puits :

$$\text{Ln } R = \frac{\pi K_S}{Q} (h^2 - z_0^2) + \text{Ln } r$$

- A partir de la formule d'approximation log.

$$R = 1,5 \sqrt{\frac{T t}{S}}$$

- A partir de formules empiriques

- Sichardt :

$$R = 3000 (H - z_0) \sqrt{K_S}$$

- Choultsse :

$$R = \sqrt{\frac{6 h K_S t}{n_e}}$$

h : Hauteur de l'aquifère (mètre)

t : Temps de pompage (seconde)

n_e : Porosité efficace

Pour un point de coordonnées (x, z) quelconque, l'équation de débit devient :

$$Q = \pi K_S \frac{(z^2 - z_0^2)}{\text{Ln}(x/r)} \quad \text{IV.14}$$

En égalant les expressions IV.13 et IV.14 qui fournissent le débit, on obtient :

$$\pi K_S \frac{(z^2 - z_0^2)}{\text{Ln}(x/r)} = \pi K_S \frac{(h^2 - z_0^2)}{\text{Ln}(R/r)}$$

$$(z^2 - z_0^2) = (h^2 - z_0^2) \frac{\text{Ln}(x/r)}{\text{Ln}(R/r)}$$

D'où l'équation de la surface de la nappe libre $z(x)$ est :

$$z^2 = (h^2 - z_0^2) \frac{\text{Ln}(x/r)}{\text{Ln}(R/r)} + z_0^2 \quad \text{IV.15}$$

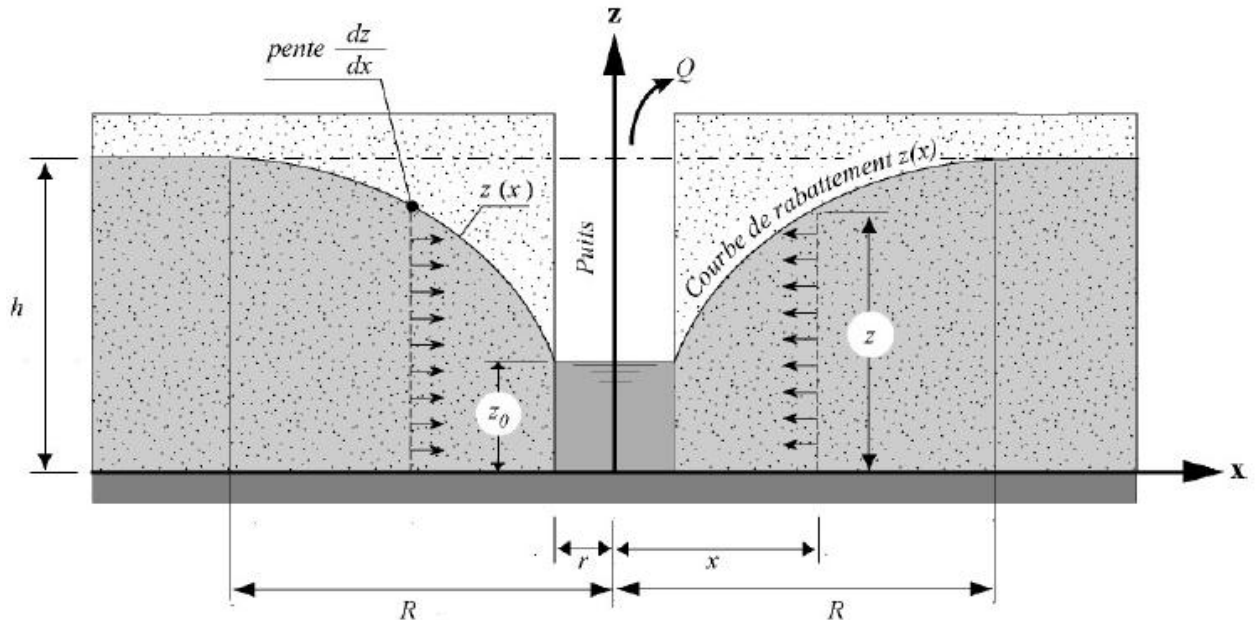


Figure IV.5 : Rabattement par un puits en nappe libre

La surface de la nappe est convergente ou conique et z^2 varie linéairement avec le logarithme de la distance x au puits. La surface est donc représentée par une surface de révolution à écoulement convergent de type logarithmique.

b.2 Rabattement par puits en nappe captive

Considérant que l'eau est incompressible, le débit Q à travers une surface cylindrique concentrique au puits de rayon x et d'épaisseur de la nappe e peut se calculer par :

$$Q = q S = q 2 \pi \cdot x \cdot e$$

$$q = K_S \frac{dH}{dx} = K_S \frac{dz}{dx}$$

$$Q = 2 \pi x e K_S \frac{dz}{dx} \quad \text{IV.16}$$

En intégrant :

$$Q \int_r^R \frac{dx}{x} = 2 \pi e K_s \int_{z_0}^h dz$$

NB : La hauteur h de la surface piézométrique dans la zone n'est pas influencée par le puits, donc

$$Q = \frac{2 \pi K_s e}{\text{Ln}(R/r)} (h - z_0) \quad \text{IV.17}$$

$$(z - z_0) = \frac{Q}{2 \pi K_s e} \text{Ln}(x/r)$$

L'équation de la surface piézométrique sera :

$$z = \frac{Q}{2 \pi K_s e} \text{Ln}(x/r) + z_0 \quad \text{éq.8.17}$$

IV.3.2 Ecoulement en régime transitoire (non équilibre) vers un ouvrage de captage

Le régime transitoire, ou de non-équilibre, se produit entre le début du pompage et le moment où l'on atteint le régime permanent. Par conséquent, si l'on pompe à débit constant dans une nappe parfaitement captive, horizontale, infinie et d'épaisseur constante, on observera toujours un régime transitoire. Dans la réalité, on considérera que l'écoulement vers un puits est en régime transitoire tant que, dans les piézomètres, l'évolution des rabattements causés par le pompage seul est mesurable dans le temps, OU bien tant que le gradient hydraulique varie de façon mesurable.

IV.3.2.1 Equation de Theis pour nappe captive

Theis a développé en 1935 l'équation différentielle du régime variable en fonction des conditions aux limites des nappes infinies captives non réalimentées et d'épaisseur constante (Fig.4) :

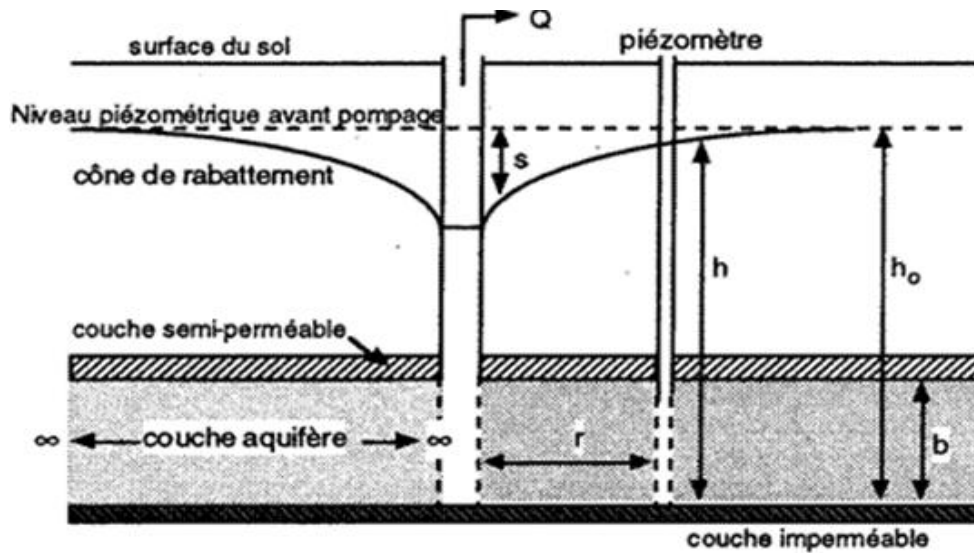


Figure 5 : Puits parfait en nappe captive.

La formule de Theis s'exprime comme suit (éq.8.18) :

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W(u) \quad \text{éq.8.18}$$

$$W(u) = \int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \quad u = \frac{x^2 S}{4Tt}$$

- Avec :
- s** : rabattement dans le piézomètre en m ;
 - Q** : débit de pompage du puits en m³/s ;
 - T** : transmissivité en m²/s ;
 - S** : coefficient d'emmagasinement ;
 - t** : temps en s ;

W(u) : peut-être calculé à partir d'une table des fonctions exponentielles intégrales (*Tableau 1*)

Tableau 4 : Valeurs de W(u) pour les valeurs de u (d'après WENZL, 1942).

U	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x 1	0.219	0.049	0.013	0.0038	0.0011	0.00036	0.00012	0.000038	0.00
x 10 ⁻¹	1.82	1.22	0.91	0.7	0.56	0.45	0.37	0.31	0.26
x 10 ⁻²	4.04	3.35	2.96	2.68	2.47	2.3	2.15	2.03	1.92
x 10 ⁻³	6.33	5.64	5.23	4.95	4.73	4.54	4.39	4.26	4.14
x 10 ⁻⁴	8.63	7.94	7.53	7.25	7.02	6.84	6.69	6.55	6.44
x 10 ⁻⁵	10.94	10.24	9.84	9.55	9.33	9.14	8.99	8.86	8.74
x 10 ⁻⁶	13.24	12.55	12.14	11.85	11.63	11.45	11.29	11.16	11.04
x 10 ⁻⁷	15.54	14.85	14.44	14.15	13.93	13.75	13.60	13.46	13.34
x 10 ⁻⁸	17.84	17.15	16.74	16.46	16.23	16.05	15.9	15.76	15.65
x 10 ⁻⁹	20.15	19.45	19.05	18.76	18.54	18.35	18.2	18.07	17.95
x 10 ⁻¹⁰	22.45	21.76	21.35	21.06	20.84	20.66	20.5	20.37	20.25
x 10 ⁻¹¹	24.75	24.06	23.65	23.36	23.14	22.96	22.81	22.67	22.55
x 10 ⁻¹²	27.05	26.36	25.96	25.67	25.44	25.26	25.11	24.97	24.86
x 10 ⁻¹³	29.36	28.66	28.26	27.97	27.75	27.56	27.41	27.28	27.16
x 10 ⁻¹⁴	31.66	30.97	30.56	30.27	30.05	29.87	29.71	29.58	29.46
x 10 ⁻¹⁵	33.96	33.27	32.86	32.58	32.35	32.17	32.02	31.88	31.76

IV.3.2.2 Approximation de Jacob

Partant de la formule de Theis, Jacob (1950) a explicité la fonction de puits pour une valeur de u suffisamment petite ($u < 0,01$) :

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \operatorname{Ln} \frac{2,25 Tt}{x^2 S}$$

La formule de Theis et sa dérivée simplifiée, celle de Jacob, permettent de déterminer rapidement la transmissivité et le débit sans que le niveau de la nappe soit stabilisé comme en régime permanent.

Ces formules expriment le rabattement s d'une nappe à une distance r du puits de pompage avec un débit Q constant au bout d'un temps de pompage t .

Pour les essais, on réalise un piézomètre d'observation à proximité du puits afin d'obtenir les données nécessaires au calcul de la transmissivité, du coefficient d'emmagasinement et de la capacité spécifique.

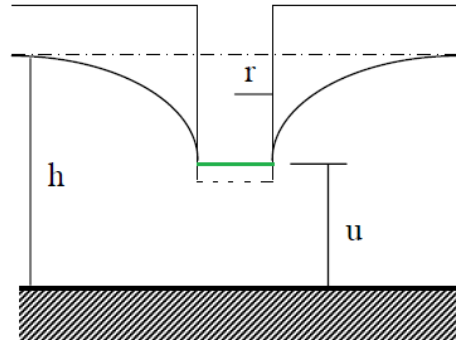
IV.4 Puits incomplet (puits à pénétration partielle)

C'est ouvrage de captage (puits, forage) ne traversant pas l'aquifère sur toute sa hauteur de sa zone saturée. Pour l'estimation du débit plusieurs formules empiriques ont été développées.

a. Puits à seul fond perméable

Formule de Forchheimer

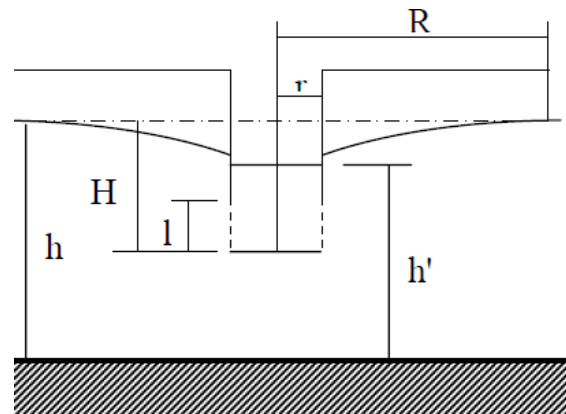
$$Q = 4 K_S r (h - u)$$



b. Puits à fond étanche et à parois partiellement imperméable

Formule de Babouchkine et Guirinsky

$$Q = 2\pi K_S l \left(\frac{h - h'}{\text{Ln} \left(0,66 \frac{l}{r} \right)} \right)$$



c. Puits à fond perméable et à parois partiellement perméable

Formule de Porchet

$$Q = \pi K_S \frac{(h + 1/2)^2 - (h' + 1/2)^2}{\text{Ln}(R/r)}$$

d. Puits à fond et à parois latérale entièrement perméable

Formule de Vibert

$$Q = \pi K_S \frac{hh'}{\text{Ln}(R/r)}$$

Exercice IV.1

Soient 3 forages réalisés dans des aquifères indépendants et dont les fluides sont de nature différentes.

Aquifère	Masse volumique ρ en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	Cote base du tube z en m	Charge H en m
A	999	50,00	55,00
B	1040	31,34	54,67
C	1100	7,95	51,88

1. Représentez schématiquement la configuration des 3 forages
2. Calculez la charge hydraulique équivalente à la masse volumique de l'eau douce ($\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) dans chaque forage. On donne ($9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)
3. Dans quel sens se font les transferts entre aquifères ?

Exercice IV.2

On souhaite déterminer la porosité efficace (n_e) et le coefficient d'emmagasinement (S) d'un aquifère libre, dont la superficie est de 10^5 hectares. Cet aquifère qui est situé en zone semi-aride est soumis à un pompage intensif où l'on extrait annuellement un volume d'eau souterraine de 500 Hm^3 , ce qui conduit à un rabattement annuel du niveau de la nappe de l'ordre de 3 m.

(Hm^3 : hectomètre cubes $\rightarrow 1 \text{ Hm}^3 = 10^6 \text{ m}^3$, 1 hectare = $10\,000 \text{ m}^2$)

Exercice IV.3

Une commune est alimentée par un puits dans une nappe captive de 100 m d'épaisseur et dont la hauteur à l'équilibre est aussi de 100m. Le débit pompé est $Q = 628$ litres par seconde. La conductivité hydraulique est $K = 0.001 \text{ m/s}$. Le diamètre du puits est $d = 1 \text{ m}$ et le rayon d'influence est $R = 450 \text{ m}$.

1. Calculer le rabattement dans le puits et à 100 mètres du puits.
2. On creuse un deuxième puits à 200 mètres du premier, et ayant des caractéristiques identiques à celui-ci. Calculer le rabattement en un point situé au milieu entre les deux puits (à 100 mètres de chacun).
3. Mêmes questions que 1 et 2 en considérant que la nappe est libre.

Chapitre V : Mesure de la perméabilité

V.1 Introduction

Le calcul du coefficient de perméabilité des sols est un des problèmes essentiels dans toute étude hydrogéologique. Ce facteur joue un rôle important à la fois sur la vitesse de circulation de l'eau et sur la mesure de pression interstitielle exercé par l'eau sur la matrice. Plusieurs procédés peuvent être utilisés pour la mesure de ce paramètre :

V.2 Mesure de la perméabilité au laboratoire

Cette mesure peut être réalisée à l'aide de perméamètres. Deux méthodes sont possibles :

V.2.1 Perméamètre à charge constante

Le dispositif expérimental utilisé est constitué d'un tube de section A rempli de sable sur une hauteur donnée (Figure V.1). Ce tube est alimenté de préférence à la base pour pouvoir éliminer l'air dans l'échantillon, avec une alimentation à niveau constant. Il est équipé de 2 piézomètres qui permettent de mesurer la charge imposée h sur un parcours de longueur l .

On mesure la quantité Q d'eau percolant dans l'échantillon pendant un temps donné t . Ceci donne le débit unitaire $q = Q/t$ et le coefficient de perméabilité K est donné par :

$$K = \frac{q l}{A h}$$

V.2.2 Perméamètre à charge variable

Le schéma du dispositif expérimental est constitué d'un échantillon de section A et de hauteur l placé dans un bac plein d'eau assurant un niveau constant de sortie (Figure V.2). L'alimentation est réalisée au sommet de l'échantillon par un tube de faible section a . On démarre l'expérience avec

une charge initiale h_0 et on mesure au cours du temps les hauteurs h_t , pour construire un tableau h_t en fonction de t .

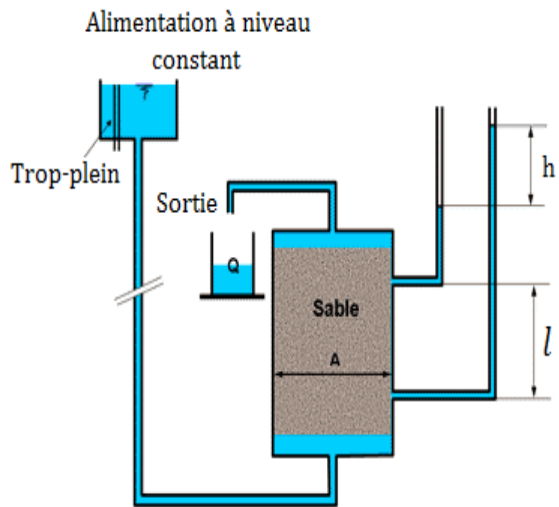


Figure V.1 : Perméamètre à charge constante

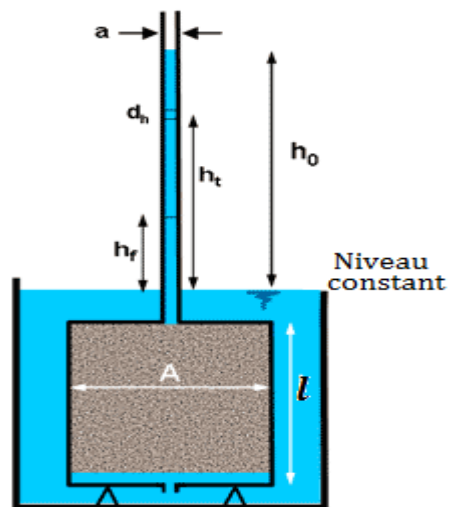


Figure V.2 : Perméamètre à charge variable

Pour obtenir le coefficient de perméabilité, on se place à un temps t , avec un intervalle de temps dt pendant lequel le niveau descend de dh dans le tube. Le débit instantané est alors :

$$q = -a \frac{dh}{dt}$$

Dans l'échantillon : $q = AKi$; i est le gradient au temps t : $i = \frac{h_t}{l}$

Par intégration, on obtient en considérant à la fin de l'expérience que le niveau h_f est atteint au temps t_f :

$$K = 2,3 \frac{a \cdot l \cdot \log_{10} \frac{h_0}{h_f}}{A \cdot t_f}$$

V.3 Mesure de la perméabilité in situ

V.3.1 L'essai de Pompage

Le pompage dans un aquifère selon un mode opératoire rationnel permet

d'en calculer la perméabilité. Ce type d'essai dure longtemps et réclame généralement une préparation importante (forage et tubage du puits, pose de piézomètres au voisinage). Il est surtout mis en œuvre en vue de l'exploitation des nappes. En génie civil, on l'utilise moins fréquemment, en préférant le plus souvent des essais plus ponctuels, plus rapides, moins coûteux.

V.3.2 Essai Lefranc

Pour mesurer la perméabilité d'un sol, un essai de pompage n'est pas toujours justifié ni même possible. L'essai Lefranc permet d'obtenir des résultats corrects, sans nécessiter un matériel important. Il peut être réalisé dans les sondages de reconnaissance, au fur et à mesure de l'avancement.

a. Principe

L'essai consiste à injecter ou à pomper de l'eau dans une cavité de forme invariable, appelée lanterne, réalisée en fond de forage après un léger relèvement du tubage et à observer les variations du niveau d'eau qui s'ensuivent. Un graphique établissant la relation hauteur/débit ou hauteur/temps permet de calculer la perméabilité. La mise en œuvre est rapide et le matériel nécessaire est réduit (Figure V.3).

On distingue deux modes opératoires :

a.1 L'essai à niveau constant

On pompe ou on injecte de l'eau à débit constant dans la cavité jusqu'à la stabilisation du niveau dans le forage. Seules les mesures après stabilisation sont retenues pour la détermination du coefficient de perméabilité. Ce type d'essai est réalisé dans les sols perméables ($K > 10^{-4}$ m/s).

a.2 L'essai à niveau variable

On prélève ou on injecte un volume d'eau donné dans la cavité. On suit, en fonction du temps, les variations du niveau dans le tube piézométrique. Ce type d'essai est réalisé dans les sols peu perméables.

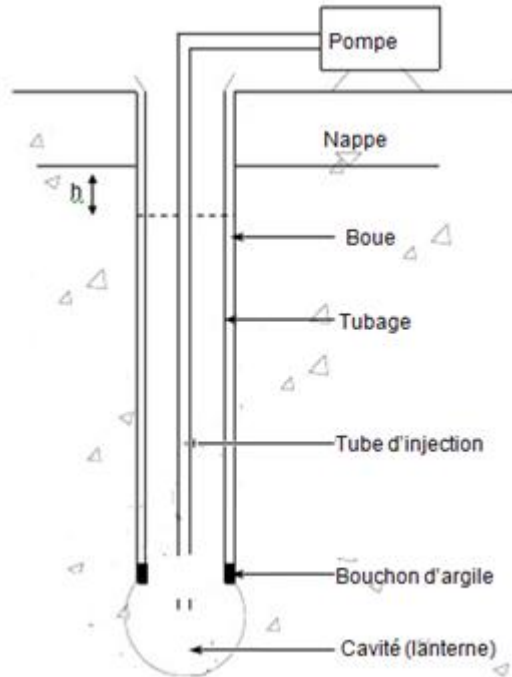


Figure V.3 : Principe de l'essai Lefranc

b. Interprétation

b.1 Essai à niveau constant

On suppose que :

- La loi de Darcy applicable
- Le régime est permanent
- Le milieu est homogène et isotrope

La relation entre le débit Q , la dénivellation h (la charge) dans le puits et la perméabilité k est donné par l'expression suivante :

$$Q = k . C . h$$

Avec C : Coefficient de la forme de la cavité.

Pour une cavité cylindrique de hauteur L , et de diamètre D , dans un milieu infini, on utilise généralement la formule approchée :

$$C = \frac{2\pi D \sqrt{\left(\frac{L}{D}\right)^2 - 1}}{\text{Ln} \left[\frac{L}{D} + \sqrt{\left(\frac{L}{D}\right)^2 - 1} \right]}$$

Elle se simplifie si $\frac{L}{D} > 2$

$$C = \frac{2\pi L}{\text{Ln} \frac{2L}{D}}$$

Si on connaît **C**, une mesure suffit en principe pour calculer **K**. Mais l'on préfère réaliser toujours une série d'essai avec des débits variables. On trace alors la courbe dénivellation/débit dont les points vont s'aligner sur une droite passant par l'origine et de pente $1/k.C$ (Figure V.4). Celle-ci donne la valeur moyenne de la perméabilité de la passe étudiée.

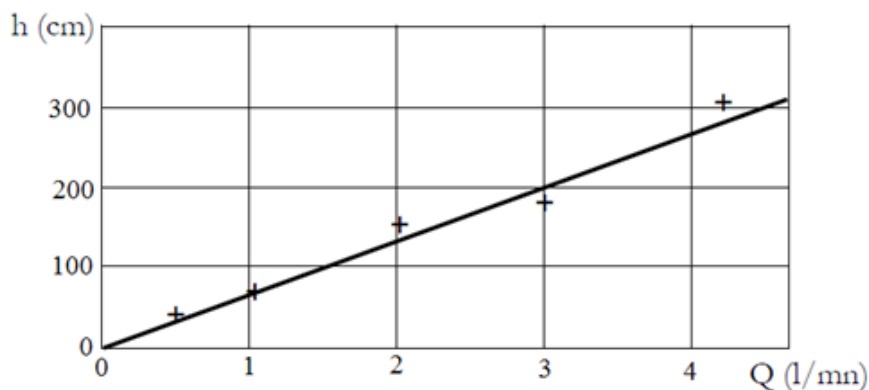


Figure V.4 : Graphique Hauteur – Débit pour un essai à niveau constant

b.2 Essai à niveau variable :

Le mode opératoire de cet essai est plus simple mais l'interprétation plus délicate que dans le cas précédent. La formule théorique généralement utilisée est :

$$h = h_0 \cdot e^{\frac{k.C}{S}(t-t_0)}$$

Avec : **h** et **h₀** : rabattement en temps **t** et **t₀**

k : perméabilité du terrain

C : coefficient de poche

S : section du forage

En coordonnée semi-logarithmique les points expérimentaux du graphique rabattement/temps doivent s'aligner sur une droite de pente : $-\frac{k.C}{2,3S}$

Il est donc possible de déduire la perméabilité **K**.

V.3.3 Essai Lugeon et la mesure des perméabilités au rocher

a. Principe de l'essai

L'essai d'eau Lugeon est un essai en place réalisé en sondage. Il s'applique aux roches et aux sols à cohésions élevées de résistance mécanique compatible avec la pression d'eau imposée pendant l'essai et ne s'applique pas aux sols meubles.

Il consiste à injecter de l'eau sous pression dans une cavité constituée d'une portion de forage de dimensions connues, et à mesurer le débit d'injection pour différents paliers de pression, pendant un temps donné

b. Appareillage

Outre le matériel de forage, il faut disposer pour réaliser l'essai (Figure V.5):

- d'un système d'obturation d'une longueur supérieure ou égale à 10 fois le diamètre du forage avec une longueur minimale de 1 m. Il est dilaté par injection d'un fluide sous pression,
- d'un dispositif d'injection d'eau avec une pompe permettant un débit de 100 l/min sous une pression de 1,1 MPa, un jeu de vannes pour réglage du débit et une réserve d'eau clair d'au moins 1 m³.
- d'un système de mesurage avec un compteur volumétrique, un capteur de pression de l'eau injectée, une sonde permettant la mesure de la profondeur du niveau d'eau, un chronomètre, un capteur de la pression du fluide injecté dans l'obturateur.

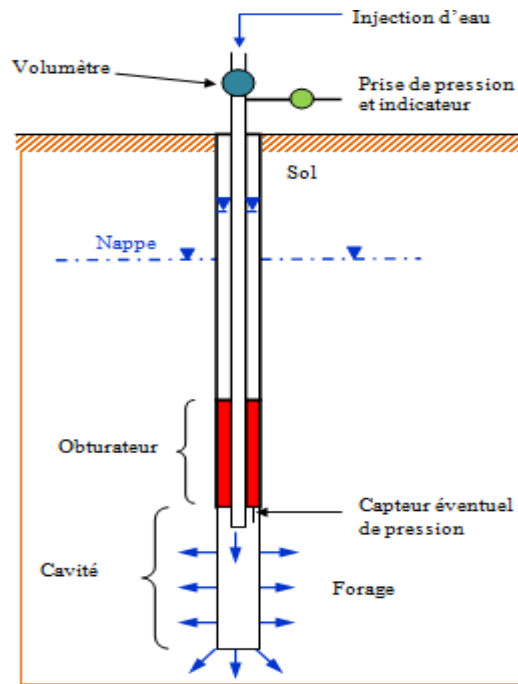


Figure V.5 : Principe de l'essai de Lugeon

c. Mode opératoire

- **Niveau statique**

Le niveau statique de la nappe est celui qui règne avec le forage d'essai.

- **Confection de la cavité**

En l'absence d'indication sa hauteur est de 3 m et son diamètre est d'entre 75 mm et 140 mm. Le fluide de forage utilisé est l'eau claire ou l'air. Le forage est nettoyé par lavage avant essai afin d'éliminer les particules dues à la perforation. L'isolation de la partie supérieure du forage est réalisée à l'aide de l'obturateur dilatable.

d. Déroulement de l'essai

L'eau est injectée dans la cavité sous les pressions de 0,2 MPa - 0,4 MPa - 0,6 MPa - 0,8 MPa et 1 MPa. Ensuite les pressions sont décroissantes : 0,7 MPa – 0,5 MPa – 0,3 MPa – 0,1 MPa. Durant chaque palier, la pression est maintenue constante pendant 10 minutes et les volumes injectés sont mesurés toutes les minutes. Au cours de chaque palier croissant ou

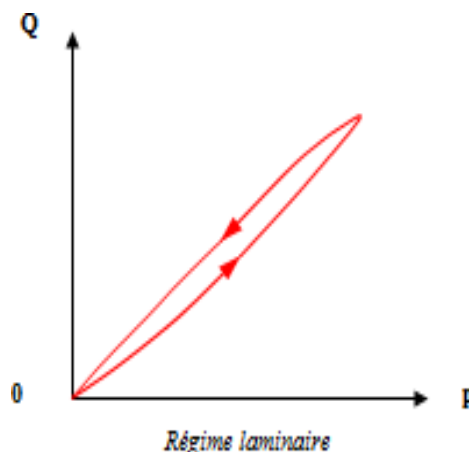
décroissant sont contrôlés, la pression (pg) sur le circuit de l'obturateur et le niveau de l'eau au-dessus de la cavité.

e. Interprétation des résultats

Le tracé de la courbe pression-débit permet d'estimer l'état de fissuration du massif rocheux. Si l'écoulement est laminaire, la courbe débit pression passe par l'origine et présente une allure à peu près linéaire, légèrement concave vers les débits croissants.

Le résultat de l'essai Lugeon se traduit par un paramètre d'absorption d'eau qui s'exprime en unité Lugeon (U_L).

Par définition : **1 lugeon = débit d'un litre par minute**, injecté dans un tronçon de forage d'**un mètre de longueur** sous une **pression d'un MPa**, maintenue constant pendant **10 minutes**.



$$U_L = \frac{Q_l}{L}$$

Avec L : longueur de la cavité

Si le débit ramené à 1,0 m de forage est de n litres/minute on dira que la perméabilité de la roche est de n lugeons.

Corrigé des exercices

Corrigé 1

1. Domaine de validité de la loi de Darcy

Cette loi exprime la proportionnalité entre la vitesse de filtration V et la perte de charge par unité de longueur i , dans un sol de perméabilité k .

$$V = K \cdot i = K \cdot \frac{\Delta H}{\Delta L}$$

Cette loi est soumise à 2 hypothèses ;

- Le sol est saturé $\rightarrow Sr = 1$ (*Saturation du sol* (Sr) est le rapport du volume du fluide V_w au volume des pores $V_p \rightarrow Sr = V_w / V_p$).
- L'écoulement est laminaire : selon Poiseuille, en milieu poreux, l'écoulement est laminaire si :

$$Re = \frac{V \cdot D_{10}}{\nu} \leq 10$$

2. Termes de la loi de Darcy

- V : vitesse de filtration (inférieur à la vitesse réelle)
- k : coefficient de perméabilité de Darcy \rightarrow dépend de la porosité n , granulométrie D_{10} ,

$$K = k \cdot \frac{\rho_w \cdot g}{\mu_w}$$

- Température T (exprimant la viscosité du fluide).
- i : gradient hydraulique $\rightarrow \mathbf{i} = \frac{\Delta H}{\Delta L}$

$$\Delta H = H_2 - H_1 = \left(\frac{U_2}{\gamma_w} + z_2 \right) - \left(\frac{U_1}{\gamma_w} + z_1 \right)$$

C'est la perte de charge totale entre les sections 1 et 2. On obtient alors \mathbf{i} en divisant ΔH par la longueur curviligne de la ligne de courant.

3. Différence entre la vitesse filtration de Darcy et la vitesse réelle

La vitesse de filtration de Darcy est une vitesse fictive et moyenne. Elle est calculée en divisant le débit dans un tube de courant par la section de ce même tube.

$$\text{Vitesse de filtration} \quad V = \frac{Q}{S}$$

La vitesse réelle de l'eau qui passe les interstices du sol est sensiblement plus grande que la vitesse de filtration, car on ne connaît pas le chemin exact que l'eau emprunte dans le milieu poreux par contourner les grains. La vitesse réelle n'est donc pas unidimensionnelle.

Corrigé 2

1- Calcul de K:

$$V = K \cdot i \quad \text{où } V = \frac{Q}{S} \quad \text{et } i = \frac{\Delta h}{L}$$

$$\text{d'où } \frac{Q}{S} = K \cdot \frac{\Delta h}{L} \quad \rightarrow \quad K = \frac{Q}{S} \cdot \frac{L}{\Delta h}$$

$$Q = \frac{163,87 * 10^{-6}}{1,75 * 60}$$

$$Q = 1,56 * 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$K = \frac{1,56 \cdot 10^{-6} * 15,24 \cdot 10^{-2}}{8,1 \cdot 10^{-3} * 30,48 \cdot 10^{-2}} = 9,36 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

2- Calcul de V:

$$V = K \cdot i = 9,63 \cdot 10^{-5} * \frac{30,48}{15,24} = 19,26 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$V = 16,6 \text{ m/jour}$$

Corrigé II.1

1) *Démonstration que le fluide est incompressible.*

Pour montrer que le fluide est incompressible, devons montrer que

$$\text{div} \vec{V} = 0$$

Il nous suffit de vérifier que l'équation suivante est vraie :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Puisque $u = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ (dérivé d'une constante est égale à 0)

Il nous reste à vérifier que : $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

Or : $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2x - 3z)$: (en dérivant par rapport à (x) on obtient) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2$

De même : $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (3x - 2z)$: (en dérivant par rapport à (z) on obtient)
 $\frac{\partial u}{\partial z} = -2$

Après calcul nous obtenons : $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 2 + (-2) = 0$

La somme de ces 3 termes $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\right)$ vaut zéro, le fluide est incompressible.

2) Calcul du champ du vecteur accélération \vec{a}

L'accélération est définie par : $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$

L'écoulement est permanent d'où $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ et donc $\vec{a} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$

$$\vec{a} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial v}{\partial z} \\ u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y} + z \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Puisque la composante de la vitesse (v) est égale à 0, l'expression précédente va se réduire à :

$$\vec{a} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} \\ u \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Après calcul nous obtenons :

$$\vec{a} = \begin{cases} 2x - 3z \frac{\partial}{\partial x} (2x - 3z) + (3x - 2z) \frac{\partial}{\partial z} (2x - 3z) \\ 0 \\ 2x - 3z \frac{\partial}{\partial x} (3x - 2z) + (3x - 2z) \frac{\partial}{\partial z} (3x - 2z) \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \vec{a} = \begin{cases} 2(2x - 3z) + (3x - 2z) - 3 \\ 0 \\ (2x - 3z) \cdot 3 + (3x - 2z) \cdot (-2) \end{cases} \quad \text{Donc : } \vec{a} = \begin{cases} -5x \\ 0 \\ -5z \end{cases}$$

3) Détermination de l'équation du réseau des lignes de courant

Les lignes de courant sont définies par :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

Nous avons $v = 0$. Pour que cette équation soit définie, il faut que $dy=0$. L'écoulement se situe donc dans le plan Oxz.

Nous allons transformer cette équation

$$\frac{dx}{2x - 3z} = \frac{dz}{3x - 2z}$$

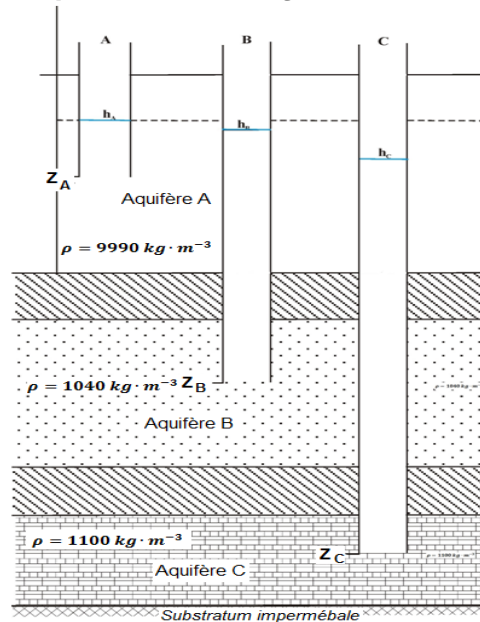
Ce qui nous donne : $(3x - 2z) \cdot dx = (2x - 3z) \cdot dz$

Puis : $3x \cdot dx - 2d(xz) + 3z \cdot dz$

On obtient enfin : $\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}z^2 - 2xz = Cte.$

Corrigé IV.1

1. Représentation schématiquement la configuration des 3 forages



2. Calcul de la charge hydraulique équivalente à la masse volumique de l'eau douce dans chaque forage

L'équation de la charge hydraulique est :

$$H = \frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z$$

Dans le cas d'un écoulement dans un milieu poreux la valeur de $(\frac{V^2}{2g})$ est très petite qu'on a tendance à la négliger, et la charge hydraulique se réduit à :

$$H = \frac{P}{\rho g} + z \Rightarrow \frac{P}{\rho g} = H - z$$

Aquifère	Masse volumique	Charge H (m)	Cote Z (m)	$\frac{P}{\rho g} = H - z$ (m)	P (kg · m ⁻² · s ⁻²)
A	999	55,00	50,00	5,00	49001
B	1040	54,67	31,34	23,33	238022

C	1100	51,88	7,95	43.93	474048.6
---	------	-------	------	-------	----------

On sait que : $P = P_{fluide} = P_{eau\ douce} = \rho_w g h_w \Rightarrow \frac{P}{\rho_w g} = h_w$

Aquifère A : ($\rho_{fluideA} = 999\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) :

$$h_{Aw} = \frac{P}{\rho_w g} = \frac{49001}{1000 * 9,81} \approx 5\text{ m} \Rightarrow H_{AW} = \frac{P}{\rho g} + z = 5 + 50 = 55\text{ m}$$

Aquifère B : ($\rho_{fluideB} = 1040\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) :

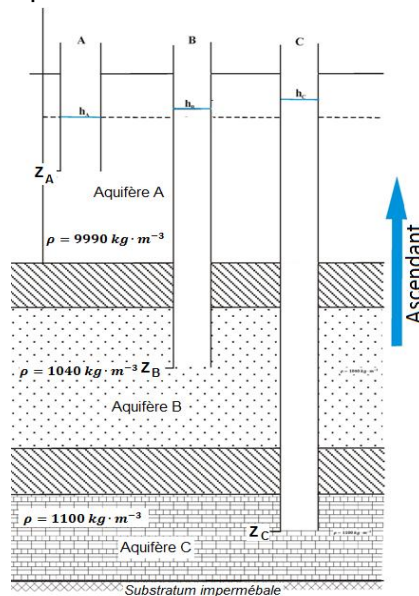
$$h_{Aw} = \frac{P}{\rho_w g} = \frac{238022}{1000 * 9,81} = 24,26\text{ m} \Rightarrow H_{BW} = \frac{P}{\rho g} + z = 24,26 + 31,34 = 55,6\text{ m}$$

Aquifère C : ($\rho_{fluideC} = 1100\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) :

$$h_{Aw} = \frac{P}{\rho_w g} = \frac{474048,6}{1000 * 9,81} = 48,32\text{ m} \Rightarrow H_{CW} = \frac{P}{\rho g} + z = 48,32 + 7,95 = 56,27\text{ m}$$

3 Le sens des transferts

Le sens des transferts entre aquifères se fait du bas vers le haut (**transfert ascendant**)



Corrigé IV.2

Données : - Surface de l'aquifère A : 10^5 hectares = 10^9 m^2
 - Volume extrait V : $500\text{ Hm}^3 = 5 \cdot 10^8\text{ m}^3$
 - Rabattement de la nappe ΔH : 3 m

$$S = \frac{\Delta V}{A \Delta H} \Rightarrow S = \frac{5 \cdot 10^8}{10^9 \cdot 3} = 0,167$$

Dans le cas d'un aquifère libre, la porosité efficace (n_e) correspond au coefficient d'emmagasinement (S), donc :

$$S = n_e = 16,7\%$$

Corrigé IV.3

Données

- Epaisseur de l'aquifère e (ou H) = 100 m ;
- Perméabilité $K = 0.001$ m/s ;
- Débit $Q = 628$ l/s = 0.628 m³/s ;
- Diamètre du puits $d = 1$ m → Rayon du puits $r = 0.5$;
- Rayon d'action $R = 450$ m.

A. Formule de Dupuit pour une nappe captive

$$Q = \frac{2\pi K e (H - h_0)}{\ln \frac{R}{r}} \Rightarrow (H - h_0) = \Delta s = \frac{Q}{2\pi K e} \ln \frac{R}{r}$$

1. Rabattement dans le puits et à 100 m du puits

a. Rabattement dans le puits

$$\Delta s = \frac{0,628}{2 * 3,14 * 0,001 * 100} * \ln \frac{450}{0,5} \Rightarrow \Delta s = 6,8 \text{ m}$$

b. Rabattement à 100 m du puits

$$\Delta s = \frac{0,628}{2 * 3,14 * 0,001 * 100} * \ln \frac{450}{100} \Rightarrow \Delta s = 1,5 \text{ m}$$

2. Le rabattement est double par rapport à un puits seul donc, car le débit pompé sera doublé.

$$\Delta s = \frac{2 * 0,628}{2 * 3,14 * 0,001 * 100} * \ln \frac{450}{100} \Rightarrow \Delta s = 3,0 \text{ m}$$

B. Formule de Dupuit pour une nappe libre

$$Q = \frac{\pi K (H^2 - h_0^2)}{\ln \frac{R}{r}} \Rightarrow (H^2 - h_0^2) = \frac{Q}{\pi K} \ln \frac{R}{r}$$

$$h_0 = \sqrt{H^2 - \frac{Q}{\pi K} \ln \frac{R}{r}} \Rightarrow \Delta s = H - h_0$$

3. On connaît la valeur de H (100 m), on calcule h_0 , puis le rabattement Δs .

a. Rabattement dans le puits ($r = 0.5$)

$$h_0 = \sqrt{100^2 - \frac{0,628}{\pi * 0,001} \ln \frac{450}{0,5}} = 92.95$$

$$\Delta s = 100 - 92.95 = 7,05 \text{ m}$$

b. Rabattement à 100 m du puits ($r = 100$ m)

$$h_0 = \sqrt{100^2 - \frac{0,628}{\pi \cdot 0,001} \ln \frac{450}{100}} = 98.48$$

$$\Delta s = 100 - 98.48 = 1,52 \text{ m}$$

Références bibliographiques

Bonnet M (1978) : Mémento d'hydraulique souterraine. 2^{ème} édition BRGM – Orléans (France) 70 pages

Cassan M. (1994). Aide-mémoire d'hydraulique souterraine. Edition : presse de l'école nationale des ponts et chaussé. 193 pages.

Castany G. (1998). Hydrogéologie: Principes et Méthodes Edition Eyrollrd 236 pages.

Lencastre A (2005). Hydraulique général. 4^{ème} Edition Eyrolles 633 pages.

Lohman S.W. (1972). Groundwater Hydraulics. Edition: US Geological Survey. Accès libre au : <https://pubs.usgs.gov/pp/0708/report.pdf>.

Schneebeli G. (1987). Hydraulique souterraine. Edition : Eyrolles. 362 pages.