Faculté De Technologie

Université Djillali Liabes Sidi Bel Abbès

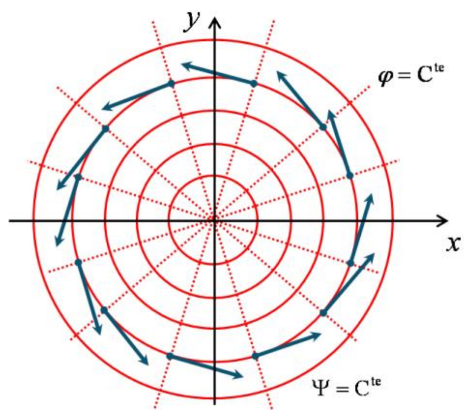
DOMAINE : SCIENCES ET TECHNOLOGIES

FILIERE : GENIE MECANIQUE

SPECIALITE LICENCE L3 ENERGETIQUE

Mécanique des Fluides II

Présenté par :
Dr. MILOUA Hadj
Maitre de conférence A
Département Génie Mécanique



2021-2022

Introduction

Le présent document est un polycopié de cours **"Mécanique des fluides II"** s'adresse aux étudiants de Licence L3 énergétique filière Génie Mécanique, Département Génie Mécanique, Faculté de Technologie, UDL Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbés, Algérie.

Le module MDF II de Semestre S5 comprend 2 séances de cours et travaux dirigés TD de VHS égale 67h30 (Cours: 3h00; TD: 1h30).

Le chapitre I est consacré à la description mathématique de la dynamique de l'écoulement par le Théorème de Transport de Reynolds TTR,

Le chapitre II traite la cinématique des fluides et les écoulements complexes;

Le chapitre III consacré à l'analyse dimensionnelle et similitude et la présentation des équations de conservation sous forme adimensionnelle.

Bonne lecture. MILOUA HADJ
E-mail :miloua_hadj@yahoo.fr

Chapitre I
Equations de bilans dans un fluide: Analyse basée sur le concept du volume de contrôle

I. 1 Introduction

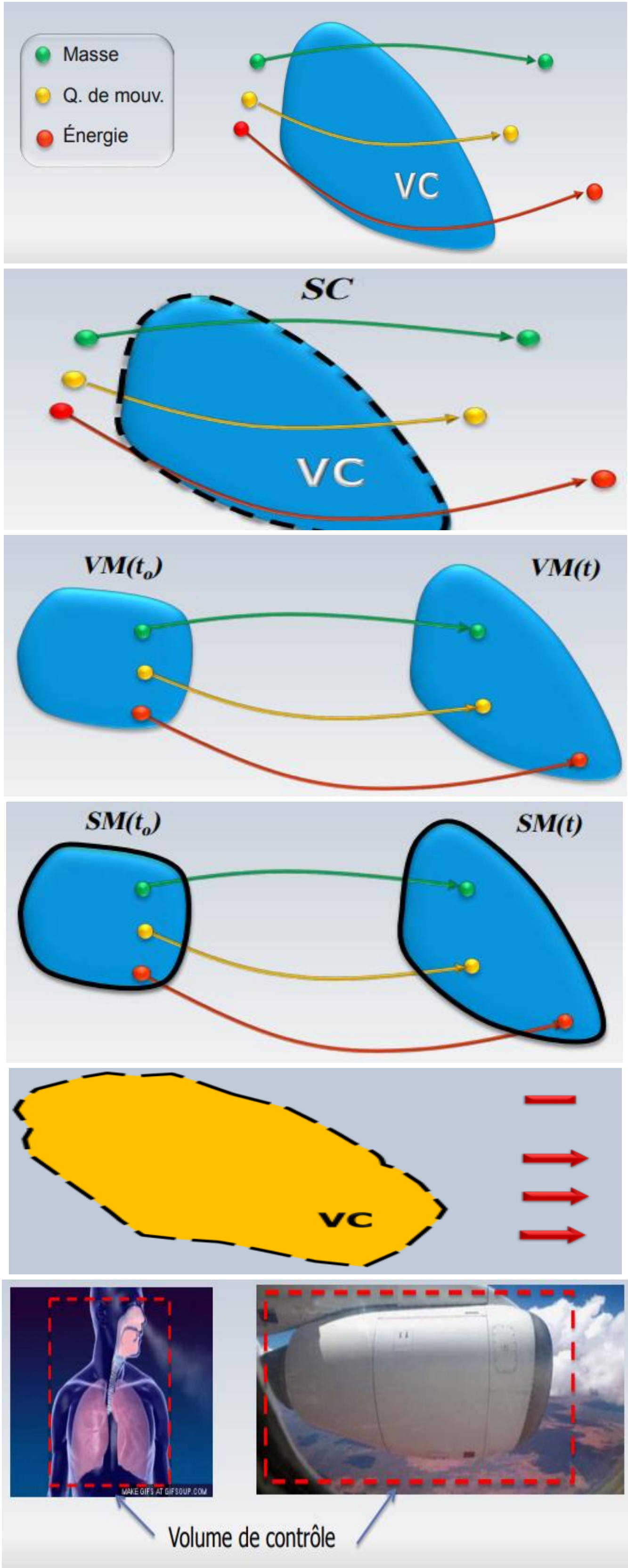
L'étude de tous phénomènes est décrite par des équations dont l'équation de continuité (conservation de la masse), l'équation de conservation de la quantité de mouvement et équation de conservation de l'énergie. Ces équations pour le fluide en mouvement sont établit à travers le théorème de transport de Reynolds TTR.

Le principe de conservation d'état pour un système isolé prise en compte les quantités physique conservés localement tels que la masse, quantité de mouvement et énergie qui dépendent de l'état du fluide et le phénomène de transfère associer, peut être formuler soient par l'approche **Lagrangienne** ou par l'approche **Eulérienne .**

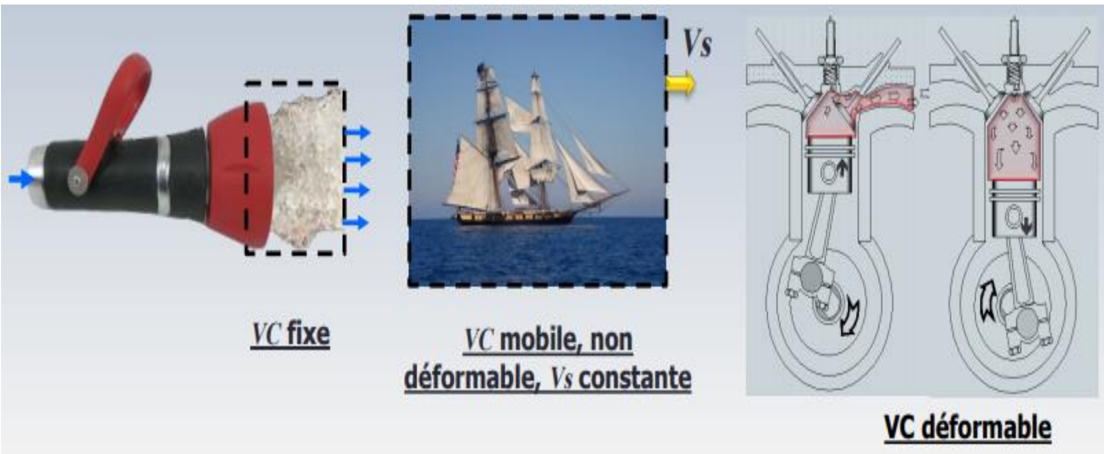
I. 2 Théorème de transport de Reynolds

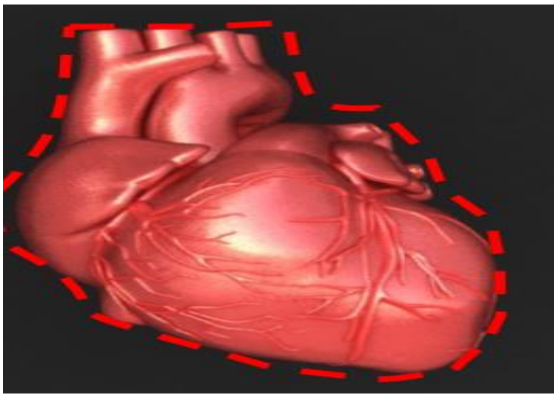
Pour résoudre l'égalité ∑F=m.a et que soit évidente, on analyse plutôt l'évolution des grandeurs physiques (masse, quantité de mouvement, énergie) via les équations intégrales. Il est par conséquent nécessaire d'établir une correspondance entre un bilan et le transport des grandeurs physiques par l'écoulement.

Dans ce contexte, on retrouve les notions de volume de contrôle **VC**, (souvent fixe), associé à la formulation **Eulérienne** et de volume matériel ***VM*** (qui se déplace), raccordé à la cinématique **Lagrangienne.**



Bien que fréquemment le volume de contrôle (**VC**) est fixe, il peut aussi être en mouvement ou se déformer.

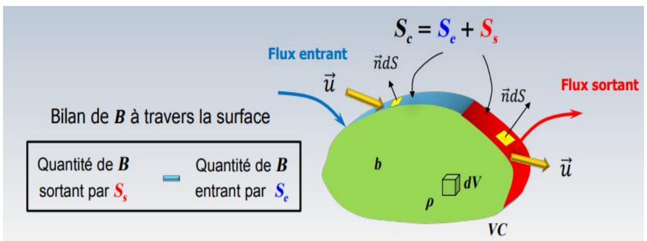


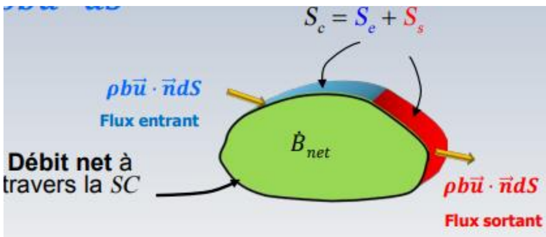


En mécanique de fluides, on propose de trouver la solution dans un système fermé mobile (VM) au moyen d'une seconde approche représentée par un système ouvert (VC). Le système fermé (VM) est associé à la cinématique Lagrangienne, tandis que le système ouvert (VC) à l'approche Eulérienne.

La dualité résultant d'un raisonnement basé sur un volume de contrôle (**Euler**), versus celui s'appuyant sur un volume matériel (**Lagrange**), mène à la recherche d'une équivalence entre les deux formulations. Celle-ci est donné par ***le TTR Théorème de transport de Reynolds.***

On considère un volume **(VC)** (fixe) limité par une surface **Sc**, qui est traversé par un fluide transportant une quantité **B.**





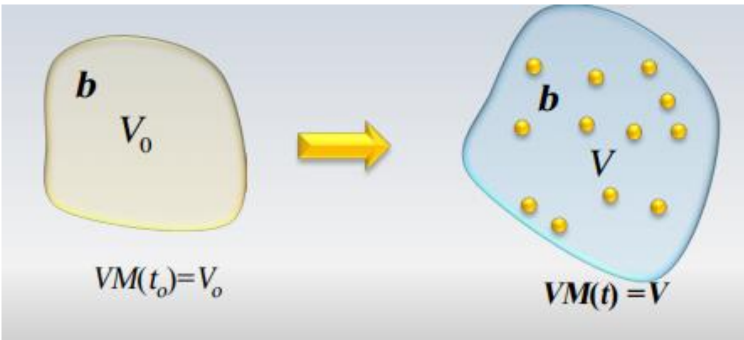
Le débit $\rho b v_r \cdot \vec{n} dS$ traversant la surface d'un volume de contrôle, correspond à la quantité de B qui "s'accumule" (négative ou positive) par unité de temps dans le volume de contrôle. Cette variation de B dans le volume de contrôle peut s'écrire:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{VC} = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} b\rho dV\right)$$

C'est la variation dans le temps dans le volume de contrôle.
On reconnait ainsi le principe de conservation pour un volume de contrôle, dans l'absence de sources (puits):

Variation de B dans le **VC** $\frac{d}{dt}\left(\int_{VC} b\rho dV\right)$ + bilan de flux de **B** à travers la **Sc** $\int_{Sc} b\,\rho v_r \cdot \vec{n} dS$ **=0**

le rôle est d'établir un lien entre les points de vue lagrangien et eulérien. On considère l'évolution d'une propriété b dans un système de particules mobile VM



Sur le volume matériel (mobile) VM on peut regarder la totalité de la grandeur B comme

$$B = \int_{VM(t)} b\rho dV$$

Pour obtenir la variation temporelle de B, on doit calculer:

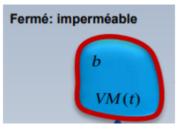
$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{VM} = \frac{d}{dt}\left(\int_{VM(t)} b\rho dV\right)$$

Cette évaluation présente un inconvénient puisque $VM(t)$ est également fonction du temps! Autrement dit, le système est en mouvement et se déforme:

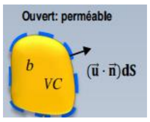
$$VM(t + dt) \neq VM(t)$$

Pour résoudre le problème, on fait coïncider au temps t le volume matériel mobile VM avec un volume de control fixe, VC sur lequel on pourra effectuer les calculs plus facilement

N.B. : **VC** est identique et coïncide avec **VM** au temps t. Les volumes ont été dessinés séparés pour faire l'illustration seulement



$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{VM} = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC(t)} b\rho dV\right) + \int_{Sc(t)} b\,\rho \mathbf{v}_{\mathbf{r}} \cdot \vec{n} dS \qquad \textbf{(I.1)}$$



Variation temporelle de B lorsqu'on suit le système**=**Variation temporelle de B dans le volume VC**+**Débit net de B traversant la surface SC du volume VC

Formulation du Théorème de transport de Reynolds, TTR pour un volume de contrôle déformable (cœur, Chambre du MACI)

B **:** grandeur extensive (peut être une masse, une quantité de mouvement, énergie..etc.)

$\frac{B}{m} = b$: grandeur intensive indépendant de la masse du système

ρ : masse volumique du fluide

VM : volume matériel

VC : volume de contrôle

$\vec{n}$: Vecteur unitaire de **ds**

$\mathbf{v}\ \ (\mathbf{t},\mathbf{x})$**:** la vitesse

v_s(t,x): vitesse de déformation de la surface du volume de contrôle.

$\mathbf{v}_{\mathbf{r}}(\mathbf{t},\mathbf{x})$: vitesse relative entre la parie du fluide entrante /sortante du volume de contrôle [i.e. $\mathbf{v}_{\mathbf{r}}(\mathbf{t},\mathbf{x}) = \mathbf{v}\ \ (\mathbf{t},\mathbf{x}) - \mathbf{v}_{\mathbf{s}}(\mathbf{t},\mathbf{x})$]

Pour un volume de contrôle fixe ($\mathbf{v}_{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$) et que la géométrie est indépendante du temps, cela implique le terme dérivé du temps sur le côté droit de l'équation (I.1) peut être écrit en utilisant la règle Leibniz comme suit :

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V b\rho dV\right) = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(b\rho) dV \qquad \textbf{(I.2)}$$

Par conséquent, après simplification de l'équation I.1, on obtient :

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{VM} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(b\rho)dV + \int_S b\,\rho\mathrm{v_r}\cdot\vec{n}dS \qquad \textbf{(I.3)}$$

Application du théorème de divergence pour transformer l'intégrale de surface en un volume intégrale, l'équation devient :

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{VM} = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(b\rho) + \nabla\cdot(\rho\mathrm{v}b)\right] dV \qquad \textbf{(I.4)}$$

Une forme alternative d'équation peut être obtenue en développant le deuxième terme entre crochets [ ] et en utilisant la dérivée totale ou Lagrange totale '*substantiel* pour obtenir (Lagrange totale= taux locale de changement, dérivé Eulérienne $\frac{\partial}{\partial t}f$ + taux convective de changement $v.\nabla\mathrm{f}$) $\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}f + v.\nabla\mathrm{f}$:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{VM} = \int_V \left[\frac{D}{Dt}(b\rho) + \rho b\nabla\cdot\mathrm{v}\right] dV \qquad \textbf{(I.5)}$$

I.2.1 Equation de continuité (conservation de la masse)

Le principe de conservation de la masse indique qu'en absence d'une source ou d'un puits " *source and sinks*" de production de la masse, la masse reste conservée au niveau local. Compte tenu du volume matériel de fluide représenté sur la figure Fig. I.1 ci-dessous, de masse **m** masse volumique ρ , et vitesse **v,** la conservation de la masse dans les coordonnées matériel (Lagrangien) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\text{On pose } \mathrm{B} = \mathrm{m} \;\Rightarrow\; \text{le grandeur intensive } \mathrm{b} = 1\,;\quad \left(\frac{dm}{dt}\right)_{VM} = \mathbf{0}$$

En terme de dérivée total :

$$\int_V \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\mathrm{v}\right] dV = \mathbf{0} \qquad \textbf{(I.6)}$$

pour que l'intégrale soit évident, la partie intégré doit être nulle, la forme différentiel ou l'équation de continuité sera :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\mathrm{v} = \mathbf{0} \qquad \textbf{(I.7)}$$

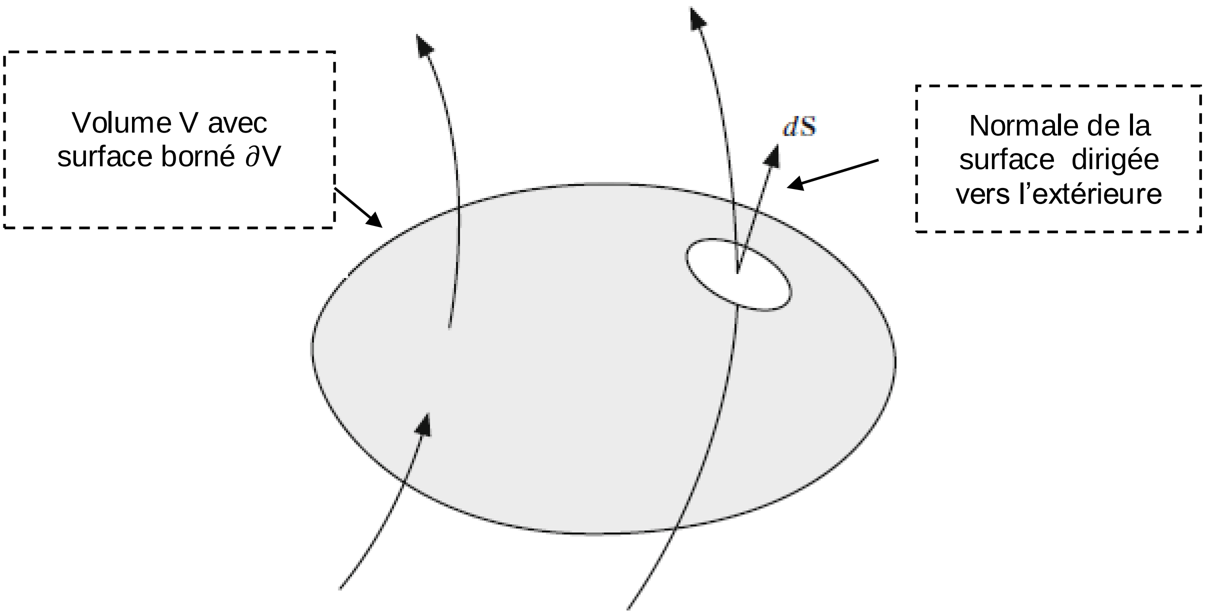


Fig. I.1 Conservation de la masse dans le volume matériel de fluide de masse m

On utilisant l'équation (I.4) pour exprimera l'équation en forme du flux i.e. terme en dérivé totale vers terme en dérivé locale ***'Théorème de divergence S vers V'***

En termes de dérivée locale

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}\right] dV = 0 \qquad \textbf{(I.8)}$$

Même chose, pour que l'intégrale soit évident, la partie intégré doit être nulle

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] = 0 \qquad \textbf{(I.9)}$$

Cas particulier

Lorsque l'écoulement est permanent, alors la dérivée partielle de la masse volumique par rapport au temps est nulle (i.e. le changement de pression n'influe pas sur la masse volumique fluide généralement pour les fluide et l'écoulement gazeux de vitesse au dessus de vitesse du son **a**) dans ce cas l'équation de la masse est inutilisable pour déduire la masse volumique du fluide :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] = 0 \qquad \textbf{(I.10)}$$

Si d'autre part, l'écoulement est incompressible alors la masse volumique est constante sur tout le domaine de l'écoulement et donc:

$$\nabla\rho=0 \tag{I.11}$$

Dans ce cas, l'équation devient **:**

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0 \tag{I.12}$$

Cette relation correspond bien à un écoulement incompressible et stationnaire;

Sous forme intégrale et a partir de l'équation (I.3), cette équation devient sous la forme suivante : $\int_S \cancel{b}\,\rho\mathbf{v_r}\cdot\vec{n}dS$ et que $\mathbf{v_r}(\mathbf{t},\mathbf{x})=\mathbf{v}\ \ (\mathbf{t},\mathbf{x})-\cancel{\mathbf{v_s}(\mathbf{t},\mathbf{x})}$

$$\int_s \mathbf{v}\ \ \cdot\vec{n}dS=0\Rightarrow\int_s(\mathbf{v}.\mathbf{n})dS=0 \tag{I.13}$$

l'équation déduite montre que pour un écoulement incompressible le flux net (flux entrant = flux sortant) *'flow out = flow in'*.

$\boxed{\text{N.B:}}$ $\mathbf{D}\frac{D\rho}{Dt}=\mathbf{0}$ ne justifier pas forcément que ρ c'est la même partout 'voir application hydraulique', il signifier que $\boldsymbol{\rho}$ reste constante sur la ligne du courant (pour un mélange du fluide chaque fluide incompressible lors de sont mouvement par exemple eau avec le sel la concentration et la différence de température créant une force de flottabilité 'Bouyancy force'

I.2.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement

Deuxième loi de Newton en description Lagrangienne :

$$\left(\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}\right)_{VM}=\left(\int_V f dV\right)_{VM} \tag{I.14}$$

Le terme sur le côté droit de l'equation I.14 est un intégrale de volume sur les coordonnées matérial effectué sur le volume occupé instantanément par le fluide en mouvement, donc

$$\left(\int_V f dV\right)_{VM}=\int_V f dV \tag{I.15}$$

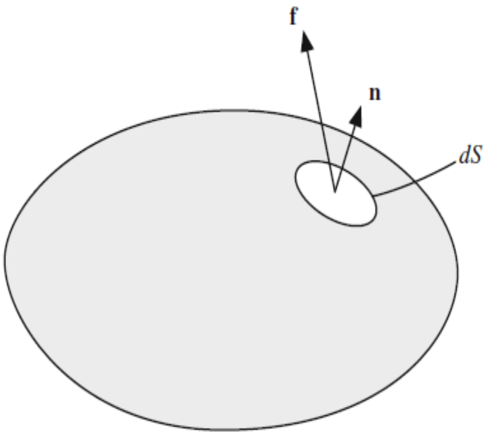


Fig.I.2 conseravation de la quantité du mouvement linéaire pour un volume de matière d'un fluide de masse m

Où f est la force externe par unité de volume agissant sur le volume de matière VM.

L'expression équivalente de l'équation I.14 en coordonnées Eulériennes peut s'écrire en deux façons différentes appelées ***les formes conservatrice et non conservatrice.***

I.2.2.1 Forme non conservative

Dans l'equation de transport de Reynolds (I.5), on pose le terme intensive:
b=v⇒ B=mv

$$\int_V \left[\frac{D}{Dt}(\mathbf{v}\rho) + (\rho\mathbf{v}\nabla\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{f}\right] dV = 0 \;\Rightarrow\; \frac{D}{Dt}(\mathbf{v}\rho) + (\rho\mathbf{v}\nabla\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{f} = 0 \qquad \textbf{(I.16)}$$

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt}(\mathbf{v}\rho) + (\rho\mathbf{v}\nabla\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{f} \Rightarrow \;\; \rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \mathbf{v}\underbrace{\left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla.\mathbf{v}\right]}_{\substack{Eq.\ continuité\ en \\ differentiel\ totale=0}} = \mathbf{f} \qquad \textbf{(I.17)}$$

On a aussi 'derivée totale de lagrange ou derivée particulaire= derivée locale par rapport au temps locale +derivées convective par rapport a x, y, z'

$$\left(\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}.grad\right)\vec{v} \qquad \textbf{(I.18)}$$

Donc $\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{f}$, $v = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

$\frac{Du}{Dt}, \frac{Dv}{Dt}$ et $\frac{Dw}{Dt}$ doivent etre calculer :

$$\begin{cases} Du/Dt = \partial u/\partial t + \vec{v}.grad\vec{v} \\ Dv/Dt = \partial v/\partial t + \vec{v}.grad\vec{v} \\ Dw/Dt = \partial w/\partial t + \vec{v}.grad\vec{v} \end{cases} \qquad \textbf{(I.19)}$$

$$grad = \nabla$$

En développant la dérivée matérielle, la forme non conservative de l'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right]=\mathbf{f}.\rho \;\; donc \;\; \left[\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \vec{v}.grad\right)\vec{v}\right]=\mathbf{f} \qquad \textbf{(I.20)}$$

I.2.2.2 Forme conservative

La forme conservative obtenue en appliquant le théorème de transport de Reynolds TTR (Eq.I.4) :

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) + \nabla\cdot\{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\} - f\right] dV = 0 \;\; \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) + \nabla\cdot\{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\} - f = 0 \qquad \textbf{(I.21)}$$

où ρvv est le produit dyadique (produit tensoriel dont la divergence est un vecteur**).**

$$\{\mathbf{vv}\} = (u\vec{i} + v\vec{j} + w\overrightarrow{k})(u\vec{i} + v\vec{j} + w\overrightarrow{k}); \;\; \{\mathbf{vv}\} = \begin{bmatrix} uu & uv & uw \\ vu & vv & vw \\ wu & wv & ww \end{bmatrix} \qquad \textbf{(I.22)}$$

La force f est divisée en deux parties, l'une désignée par $\mathbf{f_s}$ représentant les forces de surface et la seconde par $\mathbf{f_b}$ représentant les forces volumique telles que:

$$\mathbf{f}=\mathbf{f_s}+\mathbf{f_b} \qquad \textbf{(I.23)}$$

a. force surfacique

Pour un élément de volume macroscopique arbitraire représenté sur la figure I.3, les forces agissant à sa surface sont dues au pression et des contraintes visqueuses.

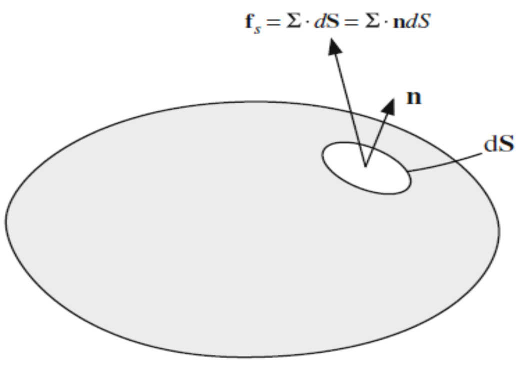


Fig.I.3 Les forces de surfaciques exprimé en termes de tenseur de contrainte.

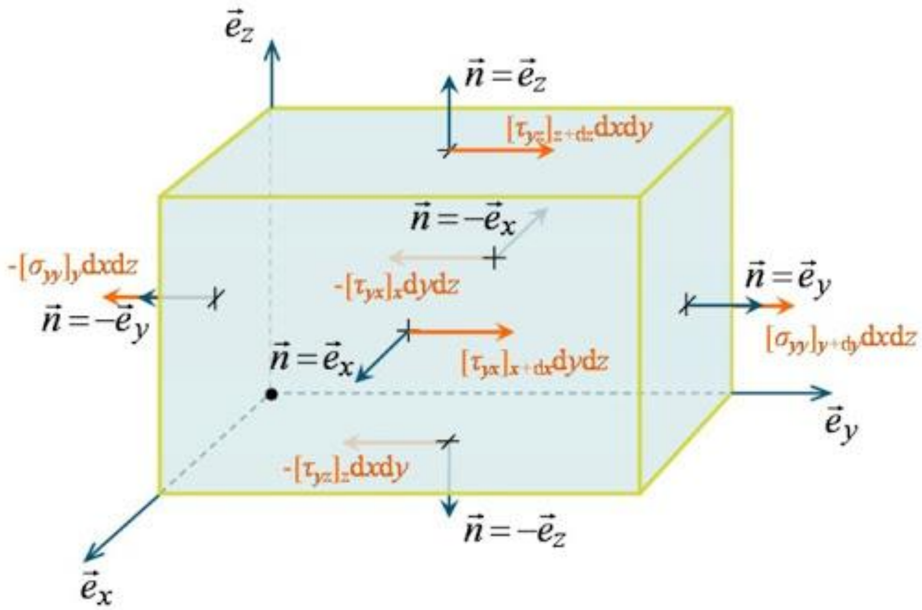
En terme du tenseur de contrainte total Σ, comme le montre la figure ci dessus. En général, il y a neuf composantes de la contrainte en tout point donné; une composante normale et deux composantes de cisaillements (parallèles à la surface qui reçoit la contrainte) dans chaque coordonnée plane. Ainsi en coordonnées cartésiennes le tenseur de contrainte est donné par

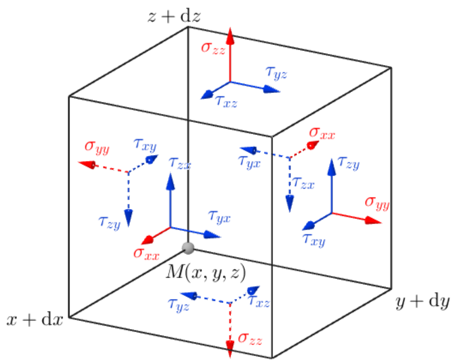
$$\Sigma=\begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} & \Sigma_{xz} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} & \Sigma_{yz} \\ \Sigma_{zx} & \Sigma_{zy} & \Sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad \textbf{(I.24)}$$

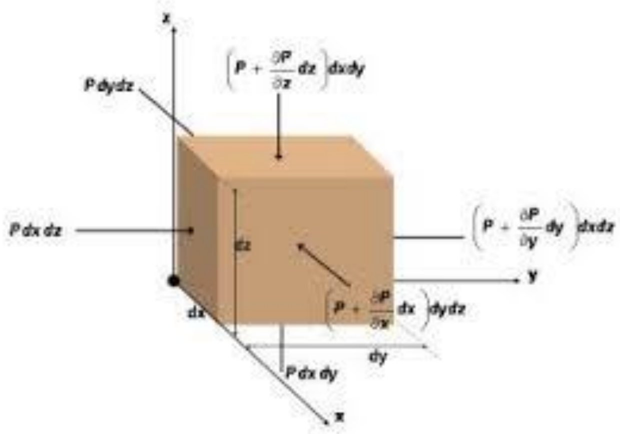
Où les termes de la forme Σ_{ii} représentent les contraintes normales et les termes Σ_{ij} representent contraintes de cisaillement.

Une contrainte normale peut être soit une compression, si $\Sigma_{ii} \leq \mathbf{0}$, soit une traction, si $\Sigma_{ii} \geq \mathbf{0}$ la contrainte normale de compression la plus importante est généralement due à la pression plutôt qu'à effets visqueux. La composante Σ_{ij} représente la contrainte agissante sur la face **i** dans la direction de **j** avec la direction **i** positive si la vecteur unitaire est sortant arbitrairement.

En pratique, le tenseur de contraintes est divisé en deux termes tels que :







$$\Sigma = -\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overbrace{\boldsymbol{\Sigma_{xx+p}}}^{\tau_{xx}} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \overbrace{\boldsymbol{\Sigma_{yy+p}}}^{\tau_{yy}} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \overbrace{\boldsymbol{\Sigma_{zz+p}}}^{\tau_{zz}} \end{pmatrix} = -p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\tau} \qquad \textbf{(I.25)}$$

où $\boldsymbol{I}$ est le tenseur d'identité de dimension (3 × 3), p est la pression, et $\boldsymbol{\tau}$ est le déviatorique ou le tenseur de contrainte visqueuse. La pression est la négative de la moyenne des contraintes normales et elle est donnée par :

$$\mathbf{p} = \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{\Sigma_{xx}} + \boldsymbol{\Sigma_{yy}} + \boldsymbol{\Sigma_{zz}}\right) \qquad \textbf{(I.26)}$$

La force surfacique agissante sur un élément de surface différentiel ds 'surface infinitisimale' d'orientation n, comme illustré sur la Fig. I.3, est ($\boldsymbol{\Sigma}$·n)ds. En appliquant le **théorème de divergence**, la force surfacique totale agissante sur le volume de contrôle VC est donnée par :

$$\int_V \boldsymbol{f_s} dV = \boxed{\int_S \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathrm{nds} = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Sigma dV}} \Rightarrow f_s = [\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Sigma}\,] = -\boldsymbol{\nabla}_p + [\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}\,] \qquad \textbf{(I.27)}$$

b. Forces de volume

Les forces volumique, qui sont présentées sous la forme de forces par unité de volume, peuvent également variée sous plusieurs effets. Il existe de nombreux exemples, mais les principaux sont :

b.1 Force gravitationnelle

La force représentant le poids du volume de matière par unité de volume dans la présence d'un champ gravitationnel est désignée par la force gravitationnelle (Figure I.4) et donné par :

$$f_b = \rho g \tag{I.28}$$

où g est le vecteur d'accélération gravitationnelle'gravité'.

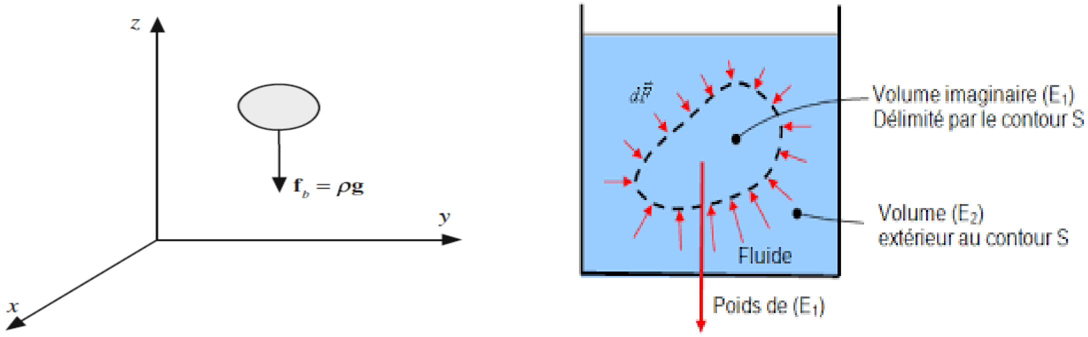


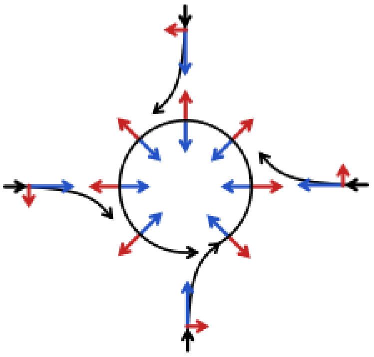
Fig.I.4 Forces de gravité agisset sur un élément différentiel.

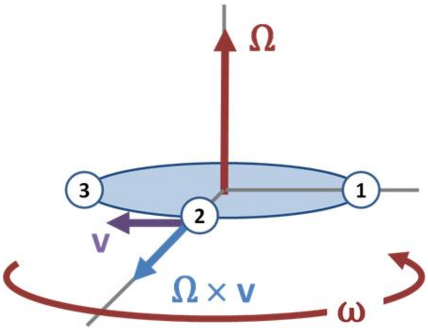
b.2 Fluide en rotation

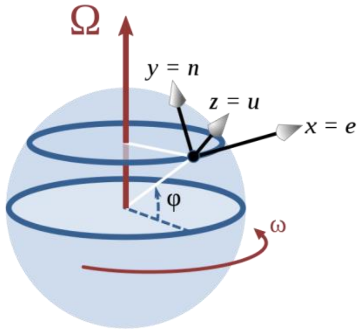
Lors de la résolution de problèmes d'écoulement de fluide dans un cadre de rotatif, les forces en raison de la rotation doit être prise en compte.Ceux-ci peuvent être considérés comme des forces volumique de forme:

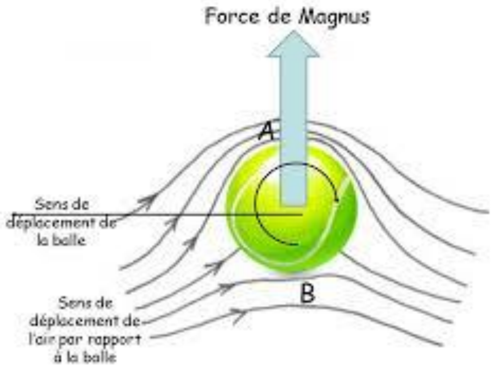
$$f_b = \underbrace{-2\rho[\boldsymbol{w}\times \mathbf{v}]}_{force\ de\ coriolis} - \underbrace{\rho[\boldsymbol{w}\times[\boldsymbol{w}\times \boldsymbol{r}]]}_{force\ centrifuges} \tag{I.29}$$

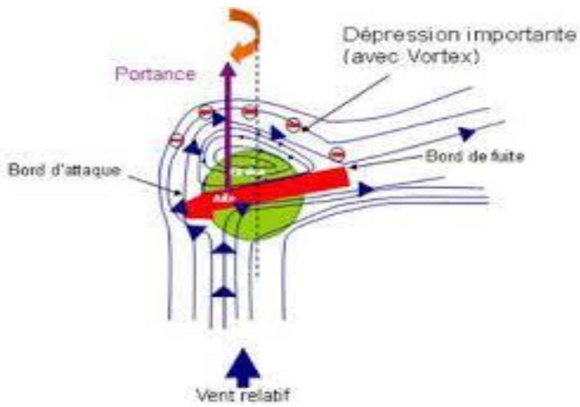
Où $\boldsymbol{w}$ est la vitesse angulaire du référentiel en rotatif et $\mathbf{r}$ est la position du vecteur (Fig. I.4). Notez que les forces gravitationnelles et centrifuges dépendent de la position mais pas sur la vitesse. Ainsi, ils peuvent être absorbés dans une pression modifiée et donc effectivement ignoré, sauf s'ils apparaissent dans les conditions aux limites. Les forces de Coriolis doivent cependant être traitées explicitement 'dépend de vitesse'. D'autres forces, telles magnétique et électrique e fonction de la charge électrique, peuvent être ajoutées en fonction de la situation étudier. Dû aux nombreux types de forces volumique possibles.

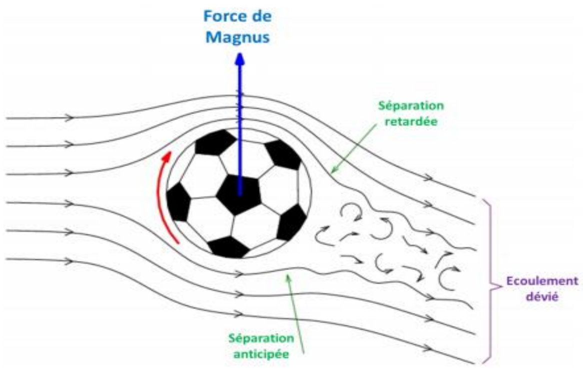


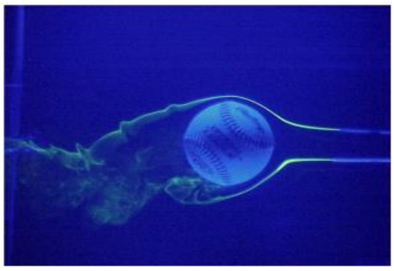

Ω
1
2
3
v
Ω × v
ω

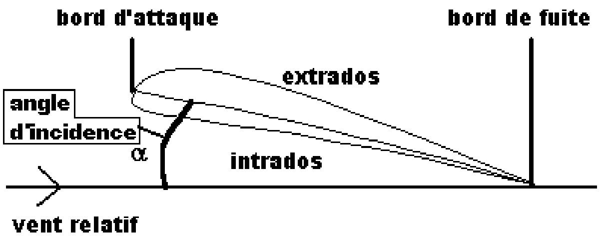

Ω
y = n
z = u
x = e
φ
ω

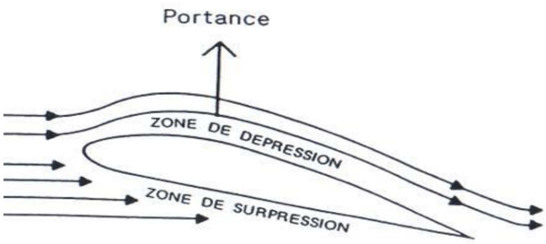

Force de Magnus
A
B
Sens de déplacement de la balle
Sens de déplacement de l'air par rapport à la balle

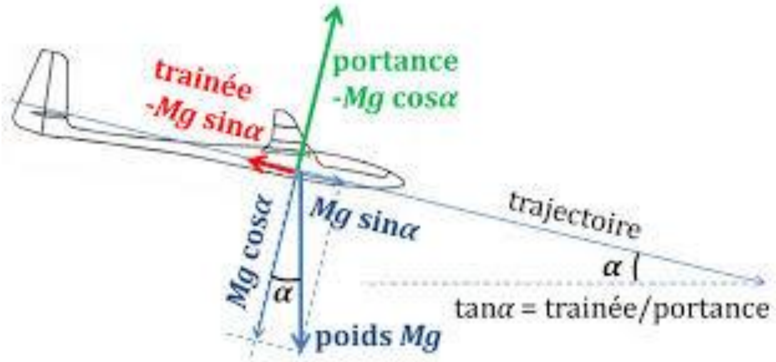

Dépression importante (avec Vortex)
Portance
Bord d'attaque
Bord de fuite
Vent relatif

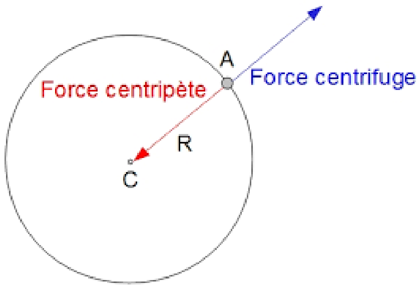

Force de Magnus
Séparation retardée
Ecoulement dévié
Séparation anticipée

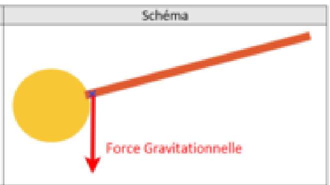
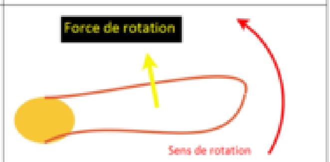
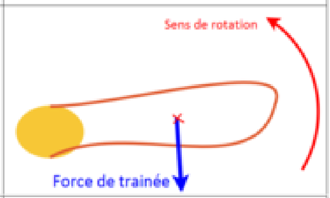
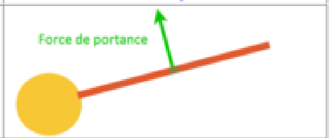
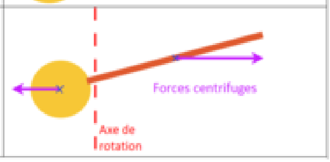



bord d'attaque
bord de fuite
extrados
angle d'incidence
α
intrados
vent relatif


Portance
ZONE DE DEPRESSION
ZONE DE SURPRESSION





Nom de la force	Expression	Schéma
Force Gravitationnelle *S'applique au point de gravité*	$p = m.g$	
Force qui permet la rotation *S'applique sur le point central de l'aile*	$F = m.a$	
Force de trainée *S'applique sur le point central de l'aile*	Force de trainée auquel est soumis un corps x : $F_x = \frac{1}{2}\rho S C_x V^2$	
Force de portance *S'applique sur le point central de l'aile*	$F = \frac{1}{2}\rho V^2 SC$	
Forces centrifuges *S'appliquent de part et d'autre de l'axe de rotation*	$F = \frac{m.v^2}{R}$	

La substitution de la force externe **f** dans l'équation $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot \{\rho \mathbf{v}\mathbf{v}\} = \boldsymbol{f}$ par son expression équivalente, la forme conservative générale de l'équation de quantité de mouvement est obtenue comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho \mathbf{v}] + \nabla \cdot \{\rho \mathrm{v}\mathrm{v}\} = -\nabla_p + \underset{Tenseur\ de\ contrainte}{[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]} + \boldsymbol{f_b} \qquad \textbf{(I.30)}$$

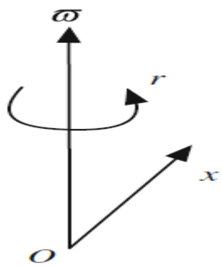


Fig. I.5 Forces corporelles dues à une rotation rigide du corps dans un cadre de référence rotatif

c. Tenseur de contrainte τ et équation de quantité du mouvement pour les fluides newtoniens

Pour poursuivre avec l'équation de la quantité de mouvement, le type de fluide doit être connu afin de relier le tenseur de contrainte $\boldsymbol{\tau}$ aux variables d'écoulement. Pour un fluide Newtonien $\boldsymbol{\tau} = -\mu \frac{\partial Uz}{\partial r}$ (non newtonien $\boldsymbol{\tau} = -\lambda \frac{\partial Uz}{\partial r}$ avec λ c'est la viscosité apparente variable et que le taux de cisaillement est fonction de cette viscosité:

- dilatant comme sable mouvants 'Quicksand'
- pseudo plastique comme latex
- Bingham plastique comme sang, pâte 'sludge', ..etc.

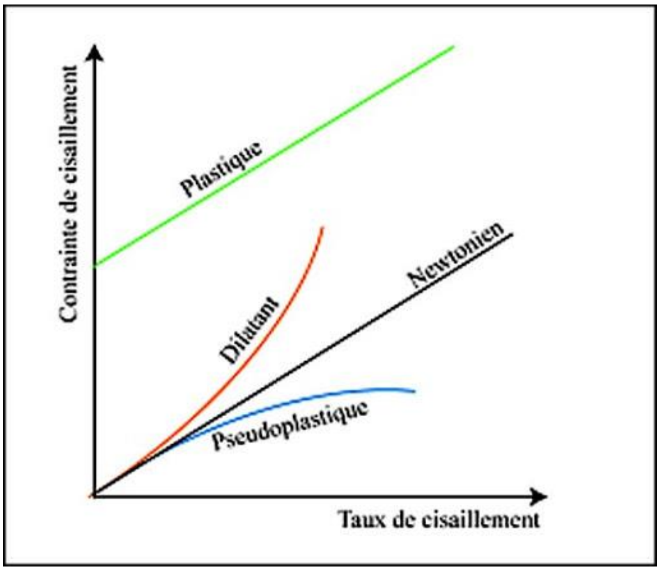
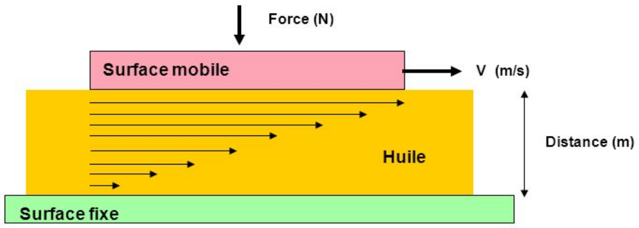


Fig.I.6 fluides Non-newtoniens



Viscosité dynamique (mPa.s) = $\dfrac{\textbf{Taux de cisaillement (Force appliquée/Surface unitaire)}}{\textbf{Gradient de vitesse (Vitesse du fluide/Distance)}}$

Viscosité cinématique (mm²/s) = $\dfrac{\textbf{Viscosité dynamique}}{\textbf{Masse volumique}}$

Le tenseur de contrainte est une fonction linéaire au taux de déformation 'strain rate' de déformation et est donné par

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu}\{\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^{T}\} + \boldsymbol{\lambda}(\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbf{I} \qquad \textbf{(I.31)}$$

Où **l** est le coefficient de viscosité moléculaire, **λ** est le coefficient de viscosité cumulé ' bulk viscosity coefficient'

Généralement égal à $-\left(\frac{2}{3}\right)\boldsymbol{\mu}, \left(\lambda = -\left(\frac{2}{3}\right)\boldsymbol{\mu}\right)$, l'exposant **T** fait référence à la transposer de $\nabla\mathbf{v}$, et $\mathbf{I}$ est le tenseur d'identité de taille (3 × 3) défini comme :

$$\nabla\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial w} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \ (\nabla\mathbf{v})^{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \ \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(I.32)}$$

La forme développée du tenseur de contrainte dans une coordonnée cartésienne tridimensionnelle s' écrit:

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{v} & \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{v} & \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{v} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(I.33)}$$

La divergence du tenseur de contrainte est un vecteur qui peut être exprimé comme :

$$[\nabla\cdot\mathrm{T}] = \nabla\cdot[\mu(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^{T})] + \nabla(\boldsymbol{\lambda}\nabla\cdot\boldsymbol{V})$$

$$[\nabla \cdot \tau] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{v}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] \\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{v}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] \\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{v}\right] \end{bmatrix} \tag{I.34}$$

N.B : divergence d'un tenseur est un vecteur

La substitution dans l'équation I.30

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho\mathbf{v}] + \nabla\cdot\{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\} = -\nabla_p + \underset{Tenseur\ de\ contrainte}{[\nabla\cdot\tau]} + f_b$$

la dernière forme conservatrice de l'équation pour les fluides newtoniens devient:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho\mathbf{v}] + \nabla\cdot\{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\} = -\nabla_p + \nabla\cdot\{\mu[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T]\} + \nabla(\lambda\nabla\cdot V) + f_b \tag{I.35}$$

Pour notion ultérieure, l'équation de quantité du mouvement est exprimer :

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho\mathbf{v}] + \nabla\cdot\{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\} = \nabla.(\mu\nabla\cdot V) - \nabla_p + \underbrace{\nabla\cdot\{\mu(\nabla\mathbf{v})^T + \nabla(\lambda\nabla\cdot V)\} + f_b}_{Q^V} \tag{I.36}$$

Et réécrit comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho\mathbf{v}] + \nabla\cdot\{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\} = \nabla(\mu\nabla\cdot V) - \nabla_p + Q^V \tag{I.37}$$

Pour les écoulements incompressibles, la divergence du vecteur vitesse est nulle, c'est-à-dire
$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$, et l'équation de quantité de mouvement se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho\mathbf{v}] + \nabla\cdot\{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\} = -\nabla_p + \nabla\cdot\{\mu[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T]\} + f_b \tag{I.38}$$

Si la viscosité est constante, l'équation de la quantité de mouvement peut être encore simplifiée. En ne prenant que la première composante de l'équation vectorielle Eq I.34,

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho\mathbf{v}] + \nabla\cdot\{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\} = \nabla(\mu\nabla\cdot V) - \nabla_p + Q^V \tag{I.39}$$

et en supposant que μ est constant, ce qui suit peut s'écrire:

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}\left[2\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\mu\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]+\mu\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$

$$=\mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial yx}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial zx}\right]$$

$$=\mu\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial yx}+\frac{\partial^2 u}{\partial zx}\right]$$

$$=\mu\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}}_{divergence\ nulle}}_{écoulement\ incompressible}\right)\right] \qquad \textbf{(I.40)}$$

Remplacement dans équation I.36 rendements après simplification

$$\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{\rho}\mathbf{v}]+\boldsymbol{\nabla}\cdot\{\boldsymbol{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}\}=-\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{p}}+\boldsymbol{\mu}\underbrace{\boldsymbol{\nabla}^{2}\mathbf{v}}_{\textbf{Laplacien}}+\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{b}} \qquad \textbf{(I.41)}$$

Pour les écoulements non visqueux parfait 'inviscid', la viscosité est nulle et l'équation de quantité de mouvement pour les flux non visqueux incompressibles deviennent

$$\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{\rho}\mathbf{v}]+\boldsymbol{\nabla}\cdot\{\boldsymbol{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}\}=-\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{p}}+\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{b}} \qquad \textbf{(I.42)}$$

I.1.3 conservation de l'énergie

La conservation de l'énergie est régie par la première loi de la thermodynamique qui exprime que l'énergie ne peut être ni créée ni détruite au cours d'un processus; il ne peut passer que d'une forme (mécanique, cinétique, chimique, etc.) à une autre. Par conséquent, la somme de toutes les formes d'énergie dans un système isolé reste constante.

$$\mathrm{U_{interne}} = \mathrm{U_{vibration}} + \mathrm{U_{translation}} + \mathrm{U_{rotation}} + \mathrm{U_{interaction}}$$

$$\Delta \mathrm{U_{interne}} + \Delta \mathrm{E_c} = \mathrm{Q} + \mathrm{W}$$

pour un système fermé $\Delta \mathrm{E_c} = 0$

et que $\mathrm{dU_{interne}} = \mathrm{dQ} + \mathrm{dW}$

c'est une fonction d'état ne dépend pas du trajet 'différentiel totale'

$\mathrm{dW} = -\mathrm{PdV}$ Selon le 1ier principe de la thermodynamique

et

$$\Delta \mathrm{E_{Totale\ MV}} = \mathrm{Q} + \mathrm{W}$$

(I.43)

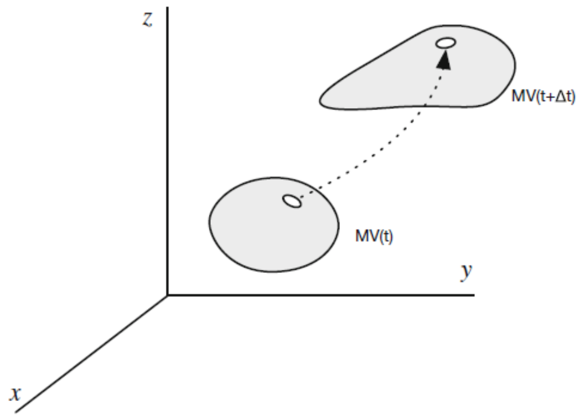


Fig.I.7 Un volume matériel se déplace avec ses particules.

Compte tenu du volume matériel figure Fig.I.7, de la masse **m**, de masse volumique ρ se déplaçant avec une vitesse **v**. L'énergie totale **E** du volume matériel au temps **t** c'est la somme de ses énergies internes et cinétiques, alors **E** peut être écrit comme :

$$E = m\left(\hat{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) \tag{I.44}$$

Où $\hat{u}$ est l'énergie interne spécifique au fluide (énergie interne par unité de masse).

La premier principe de la thermodynamique classique appliqué au volume matériel indique que le taux de variation de l'énergie totale du volume matériel MV est égal au taux de chaleur ajouter et le travail produit à travers ses limites. Mathématiquement, cela est donné par :

$$\left(\frac{dE}{dt}\right) = \dot{Q} - \dot{W} \tag{I.45}$$

La convention de signe que la chaleur ajoutée au volume de matériel et le travail produit par le volume de matière est positif. Pour appliquer le théorème de transport de Reynolds TTR sur le volume de matériel MV, **B** est fixé égal à E et **b** l'intensive égale à e (l'énergie totale par unité de masse) telle que :

$$\mathbf{B=E} \Rightarrow \mathbf{b} = \frac{dE}{dm} = \hat{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = e \tag{I.46}$$

Le taux chaleur du net transféré à l'élément matériel $\dot{Q}$ est la somme de deux Composantes:

- La première composante est le taux transféré à travers la surface du l'élément $\dot{Q}_S$

- La deuxième générée / consommée (par exemple, en raison d'une réaction chimique 'au transfert de chaleur en terme d'une source 'Watt/m^3') dans le volume matériel $\dot{Q}_v$.

De plus, le taux net de travail produit par le volume matériel $\dot{W}$ est dû:

- Au taux de travail effectué par les forces de surface $\dot{W}_s$
- Au taux de travail effectué par les forces du volume $\dot{W}_v$.

Ainsi, la première loi peut s'écrire

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{VM} = \underbrace{\dot{Q}_V}_{\text{flux de chaleur échangé}} + \underbrace{\dot{Q}_S}_{\text{Production de chaleur}} - \underbrace{\dot{W}_V}_{\text{travail du } f \text{ volumique}} - \underbrace{\dot{W}_b}_{\text{travail du } f \text{ surfacique}}$$

(I.47)

Par définition, le travail est dû à une force agissante sur une distance et la puissance est le taux auquel le travail est effectué. Par conséquent, le taux de travail effectué les forces de volume et de surface peuvent être représentés par :

$$\dot{W}_v = -\int_V (f_v \cdot \mathrm{v})dv \qquad \dot{W}_s = -\int_S (f_s \cdot \mathrm{v})ds \qquad \textbf{(I.48)}$$

La taux de travail due aux forces de surface peut être augmentée en remplaçant $\mathbf{f_s}$ par son expression équivalente donnée dans les deux équations cités précédemment:

$$\Sigma = -\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overbrace{\Sigma_{xx+p}}^{\tau_{xx}} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \overbrace{\Sigma_{yy+p}}^{\tau_{yy}} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \overbrace{\Sigma_{zz+p}}^{\tau_{zz}} \end{pmatrix} = -p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\tau} \qquad \textbf{(I.49)}$$

$$\int_V \boldsymbol{f}_s dV = \boxed{\int_S \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathrm{n}ds = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Sigma} dV} \quad \Rightarrow \quad f_s = [\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Sigma}\,] = -\boldsymbol{\nabla}_p + [\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}\,]$$

Cela mène à :

$$\dot{W}_s = -\int_S [\Sigma \cdot \mathbf{v}] \cdot \boldsymbol{n} ds = -\int_V \nabla \cdot [\Sigma \cdot \mathbf{v}] dV = -\int_V \nabla \cdot [(pI + \mathrm{T}) \cdot \mathbf{v}] dV \qquad \textbf{(I.50)}$$

Après manipulation $\dot{W}_s$ peut-être écrit comme :

$$\dot{W}_s = -\int_V (-\boldsymbol{\nabla} \cdot [p\mathbf{v}] + \boldsymbol{\nabla} \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}] dV \qquad \textbf{(I.51)}$$

Si $\dot{q}_V$ représente le taux de source de chaleur ou de puits dans le volume matériel par unité du volume et $\dot{q}_s$ le taux de transfert de chaleur par unité de surface à travers la surface de l'élément matériel, alors $\dot{Q}_V$ et $\dot{Q}_S$ peuvent s'écrire :

$$\dot{Q}_V = \int_V \dot{q}_V \, dV$$

$$\dot{Q}_s = -\int_s \dot{q}_s \cdot n \, ds = -\int_V \nabla \cdot \dot{q}_s \, dV \qquad \textbf{(I.52)}$$

En appliquant le théorème de transport de Reynolds et en remplaçant le taux de travail et les termes de chaleur par leurs expressions équivalentes dans l'équation précédentes Eq.I. 47

On trouve :

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{VM} = \int_V \left[\partial/\partial t\,(\rho e) + \nabla \cdot [\rho v e]\right] dV = -\int_V \nabla \cdot \dot{q}_s \, dV + \int_V (-\nabla \cdot [pV] + \nabla \cdot [\tau \cdot \mathrm{v}] dV + \int_V (f_V \cdot \mathrm{v}) \quad dV + \int_V \dot{q}_V \, dV$$

(I.53)

En rassemblant les termes ensemble, l'équation ci-dessus est transformée en :

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot [\rho \mathrm{v} e] + \nabla \cdot \dot{q}_s + \nabla \cdot [p\mathrm{v}] - \nabla \cdot [\tau \cdot \mathrm{v}] - f_V \cdot \mathrm{v} - \dot{q}_V\right] dV = 0 \qquad \textbf{(I.54)}$$

Pour l'intégrale de volume en équation I. 54 pour être vrai pour tout volume de contrôle VC, l'intérieur de l'intégrale doit être nulle. Donc,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot [\rho \mathrm{v} e] = -\nabla \cdot \dot{q}_s - \nabla \cdot [p\mathrm{v}] + \nabla \cdot [\tau \cdot V] + f_v \cdot \mathrm{v} + \dot{q}_V \qquad \textbf{(I.55)}$$

N.B: Cette équation représente la description mathématique de la conservation de l'énergie en termes d'énergie spécifique totale.

L'équation d'énergie peut également être écrite en termes ***d'énergie interne spécifique***, ***d'enthalpie spécifique statique*** (ou en terme ***d'enthalpie spécifique simple***), ***enthalpie totale spécifique***, et sous condition spéciale ***en termes de température.***

I.2.3.1 Conservation de l'énergie en termes d'énergie interne spécifique

Pour réécrire l'équation d'énergie précédente Eq. I. 55 en termes d'énergie interne spécifique, le produit scalaire de l'équation de quantité de mouvement avec le vecteur vitesse est effectué comme suite :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla\cdot\{\rho \mathbf{v}\mathbf{v}\}\right]\cdot \mathbf{v} = \mathbf{f}\cdot \mathbf{v} \tag{I.56}$$

Après quelques manipulations Eq. I.56 devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) - \rho\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\cdot[\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}] - \rho\mathbf{v}\cdot[(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}] = \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \tag{I.57}$$

La réorganisation et la collecte des termes permettent d'obtenir l'équation suivante:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) + \nabla\cdot[\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}] - \mathbf{v}.\underbrace{\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right]}_{\substack{=\mathbf{f} \\ \text{d'aprés l'équation} \\ \vee \\ \vee}} = \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}$$

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right] = \mathbf{f}$$

ou

$$\rho\left[\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \vec{v}.\,grad\right)\vec{v}\right] = \mathbf{f} \tag{I.58}$$

En remarquant que le troisième terme sur le côté gauche est $\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}$ et en remplaçant f par son expression équivalente, une équation pour l'énergie cinétique d'écoulement est obtenue comme :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) + \nabla\cdot\left[\rho\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right)\mathbf{v}\right] = -\mathbf{v}\cdot\nabla p + \mathbf{v}\cdot[\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}] + \mathbf{f}_V\cdot\mathbf{v} \tag{I.59}$$

Cette équation peut être modifiée et réécrite sous la forme suivante:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) + \nabla\cdot\left[\rho\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right)\mathbf{v}\right] = -\nabla\cdot[p\mathbf{v}] + p\nabla\cdot\mathbf{v} + \nabla\cdot[\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v}] - (\boldsymbol{\tau}:\nabla\mathbf{v}) + \mathbf{f}_V\cdot\mathbf{v} \tag{I.61}$$

Soustraire Eq. (61) de l'Eq. (55):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla\cdot[\rho \mathbf{v} e] = -\nabla\cdot\dot{q}_s - \nabla\cdot[p\mathbf{v}] + \nabla\cdot\,[\boldsymbol{\tau}\cdot V] + f_v\cdot\mathbf{v} + \dot{q}_V$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right)+\nabla\cdot\left[\rho\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right)\mathbf{v}\right]=-\nabla\cdot[p\mathbf{v}]+p\nabla\cdot\mathbf{v}+\nabla\cdot[\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v}]-\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{\tau}:\nabla\mathbf{v}\\ \textit{produit vectoriel double}\\ \textit{'double dot'}\end{array}\right)+\mathbf{f}_V\cdot\mathbf{v}$$

on trouve l'équation d'énergie avec sa ***énergie interne spécifique***:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\hat{u})+\nabla\cdot[\rho\mathbf{v}\hat{u}]=-\nabla\cdot\dot{q}_s-p\nabla\cdot\mathbf{v}+(\boldsymbol{\tau}:\nabla\mathbf{v})+\dot{q}_V \qquad \textbf{(I.62)}$$

I.2.3.2 Conservation de l'énergie en terme d'enthalpie spécifique

Réécrire l'équation d'énergie en termes ***d'enthalpie spécifique*** est simple et découle directement de sa définition selon laquelle l'énergie interne spécifique et l'enthalpie spécifique sont liées par :

$$\hat{u}=\hat{h}-\frac{p}{\rho}$$

Remplacer $\left(\hat{h}-\frac{p}{\rho}\right)$ à la place de $\hat{u}$ dans et avec quelques manipulations algébriques, l'équation d'énergie en ***termes d'enthalpie spécifique*** s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\hat{h})+\nabla\cdot[\rho\mathrm{v}\hat{h}]=-\nabla\cdot\dot{q}_s+\frac{Dp}{Dt}+(\tau:\nabla\mathrm{v})+\dot{q}_V \qquad \textbf{(I.63)}$$

I.2.3.3 Conservation de l'énergie en termes d'Enthalpie spécifique Totale

L'équation d'énergie en termes ***d'enthalpie spécifique totale*** peut être dérivée en exprimant e en termes de $\hat{h}_0$ pour obtenir :

$$\mathbf{e}=\hat{u}+\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\hat{h}-\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\hat{h}_0-\frac{p}{\rho} \qquad \textbf{(I.64)}$$

Puis en substituant $\hat{\mathbf{h}}-\frac{\mathbf{p}}{\boldsymbol{\rho}}$ à la place de e dans Equation en terme d'énergie de l'énergie interne précédent et effectuer quelques manipulations algébriques, l'équation d'énergie en termes ***d'enthalpie totale spécifique*** est obtenue:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\hat{h}_0)+\nabla\cdot[\rho\mathbf{v}\hat{h}_0]=-\nabla\cdot\dot{q}_s+\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot[\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v}]+\mathbf{f}_V\cdot\mathbf{v}+\dot{q}_V \qquad \textbf{(I.65)}$$

Toutes les formes de l'équation d'énergie présentées jusqu'à présent sont générales et applicables aux ***Fluides Newtoniens*** et ***Non newtoniens***. La seule limite est qu'ils sont applicables ***à un volume de contrôle fixe.***

I.2.3.4 Conservation de l'énergie en termes de température

Pour pouvoir écrire l'équation d'énergie avec la température comme variable principale certains postulats doivent être imposées. En supposant que $\hat{h}$ soit fonction de p et T, ***le fluide est devrait être Newtonien***. Par conséquent, les dérivations à suivre s'appliquent aux ***Fluides Newtoniens*** uniquement. Si $\hat{h} = \hat{h}(p,T)$, alors $d\hat{h}$ peut s'écrire

$$d\hat{h}=\left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial T}\right)_T dp \qquad \textbf{(I.66)}$$

En utilisant la relation thermodynamique d'équilibre ordinaire suivante:

$$\left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial T}\right)_T = \hat{V} - T\left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial T}\right)_p \qquad \textbf{(I.67)}$$

Où $\hat{V}$ est le volume spécifique, l'expression de $d\hat{h}$ peut être modifiée :

$$d\hat{h} = C_p dT + \left[\hat{V} - T\left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial T}\right)_p\right] dp \qquad \textbf{(I.68)}$$

Le côté gauche de l'enthalpie spécifique Eq. (I.65), avec $d\hat{h}$ donné par l'équation. (I.68), peut être réécrit en termes de T comme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\hat{h}) + + \nabla\cdot[\rho v\hat{h}] = \rho\frac{D\hat{h}}{Dt} &= \rho C_p\frac{DT}{Dt} + \rho\left[\hat{V} - T\left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial T}\right)_p\right]\frac{DP}{Dt}\\ &= \rho C_p\frac{DT}{Dt} + \rho\left[\frac{1}{\rho} - T\left(\frac{\partial(1/\rho)}{\partial T}\right)_p\right]\frac{DP}{Dt}\\ &= \rho C_p\frac{DT}{Dt} + \left[1 - \left(\frac{\partial(Ln\,\rho)}{\partial(Ln\,T)}\right)_p\right]\frac{DP}{Dt}\end{aligned} \qquad \textbf{(I.69)}$$

Remplacer l'équation I.69 dans l'équation I.63 ça donne l'équation d'énergie avec T comme son variable principale :

$$\rho c_p\frac{DT}{Dt} = -\nabla\cdot\dot{q}_s - \left(\frac{\partial(\ln\rho)}{\partial(\ln T)}\right)_p\frac{DP}{Dt} + (\tau:\nabla v) + \dot{q}_V \qquad \textbf{(I.70)}$$

L'équation ci-dessus est donnée de manière équivalente par :

$$C_p\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \nabla\cdot[\rho vT]\right] = -\nabla\cdot\dot{q}_s - \left(\frac{\partial(\ln\rho)}{\partial(\ln T)}\right)_p\frac{DP}{Dt} + (\tau:\nabla v) + \dot{q}_V \qquad \textbf{(I.71)}$$

Le flux de chaleur $\dot{q}_s$ apparaissant dans toutes les formes de l'équation d'énergie représente le transfert de chaleur par diffusion moléculaire ***'i.e. conduction thermique*** et qui est régie par la loi de Fourier selon:

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{s}} = -[\boldsymbol{k}\nabla T] \qquad \textbf{(I.72)}$$

Où k est la conductivité thermique de la substance isotrope. Cependant, certains solides sont anisotropes l' Eq. I.71 est remplacé par

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{s}} = -[\boldsymbol{k}\cdot\nabla T] \qquad \textbf{(I.73)}$$

Où $\boldsymbol{k}$ est un ***tenseur symétrique du second ordre appelé tenseur de conductivité thermique***. Par conséquent, le flux de chaleur en milieu anisotrope n'est pas dans le sens du gradient de température. Dans les dérivations à suivre, **le milieu est supposé être isotrope** et Eq. (I.72) est applicable. Remplacer les $\dot{q}_s$ en utilisant la loi de Fourier, l'équation d'énergie, Eq. (I.71), devient :

$$c_p\left[\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\rho}T) + \nabla\cdot[\boldsymbol{\rho}\mathbf{v}T]\right] = -\nabla\cdot[\boldsymbol{k}\nabla T] - \left(\frac{\partial(\ln\rho)}{\partial(\ln \boldsymbol{T})}\right)_P \frac{\boldsymbol{DP}}{\boldsymbol{Dt}} + (\boldsymbol{\tau}:\nabla\mathbf{v}) + \dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{V}} \qquad \textbf{(I.74)}$$

L'expression de $(\boldsymbol{\tau}:\nabla\mathbf{v})$ en termes de variables de flux en 3D en Le système coordonnées cartésiennes est donné par:

$$(\boldsymbol{\tau}:\nabla\mathbf{v}) = \boldsymbol{\lambda}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \boldsymbol{\mu}\begin{pmatrix} 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \\ +\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(I.75)}$$

Définition de $\boldsymbol{\Phi}$ *et* $\boldsymbol{\Psi}$ comme

$$\boldsymbol{\Psi} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \qquad \textbf{(I.76)}$$

$$\boldsymbol{\Phi} = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \qquad \textbf{(I.77)}$$

L'équation d'énergie en termes de température se réduit à :

$$c_p\left[\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\rho}T) + \nabla\cdot[\boldsymbol{\rho}\mathbf{v}T]\right] = -\nabla\cdot[\boldsymbol{k}\nabla T] - \left(\frac{\partial(\ln\rho)}{\partial(\ln \boldsymbol{T})}\right)_P \frac{\boldsymbol{DP}}{\boldsymbol{Dt}} + \boldsymbol{\lambda\Psi} + \boldsymbol{\mu\Phi} + \dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{V}} \qquad \textbf{(I.78)}$$

Pour référence ultérieure, l'équation d'énergie est présentée comme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) + \nabla \cdot [\rho C_p \mathbf{v} T] = \nabla \cdot [k \nabla T] + \underbrace{\rho T \frac{D\, C_p}{D\, t} - \left(\frac{\partial(\ln \rho)}{\partial(\ln T)}\right)_P \frac{DP}{Dt} + \lambda\Psi + \mu\Phi + \dot{q}_V}_{Q^T} \qquad \textbf{(I.79)}$$

Et réécrit comme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) + \nabla \cdot [\rho c_p \mathbf{v} T] = \nabla \cdot [k \nabla T] + Q^T \qquad \textbf{(I.80)}$$

L'équation de l'énergie I.80 est rarement résolue dans sa forme complète et selon la situation physique plusieurs versions simplifications peuvent être développées. Le terme de dissipation Φ est négligeables à l'exception de grands gradients de vitesse ***à des vitesses supersoniques***.
De plus, pour les fluides incompressibles, **l'équation de continuité** implique que Ψ =0 puisque que la masse volumique est constante, il s'ensuit que $\left(\frac{\partial(\ln \rho)}{\partial(\ln T)}\right)$=0. Par conséquent, l'équation d'énergie I.74 pour un écoulement de fluide incompressible est simplifié à :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) + \nabla \cdot [\rho c_p \mathbf{v} T] = \nabla \cdot [k \nabla T] + \underbrace{\dot{q}_V + \rho T \frac{D c_p}{Dt}}_{Q^T} \qquad \textbf{(I.81)}$$

L'équation I.81 est également applicable pour ***un système de fluide s'écoulant à pression constante***. Dans le cas d'un solide, la masse volumique est constante, la vitesse est nulle et si les changements de température ne sont pas importants, alors la conductivité thermique peut être considérée constante, dans ce cas l'équation d'énergie devient :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + \dot{q}_V \qquad \textbf{(I.82)}$$

Pour les gaz parfaits $\left(\frac{\partial(\ln \rho)}{\partial(\ln T)}\right) = -1$ et l'équation d'énergie pour ***le flux compressible de gaz idéal*** se réduit à :

$$c_p \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} T]\right] = \nabla \cdot [k \nabla T] + \frac{Dp}{Dt} + \mu\Phi + \lambda\Psi + \dot{q}_V \qquad \textbf{(I.83)}$$

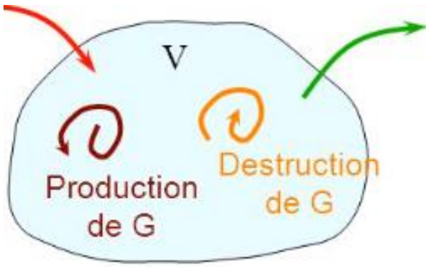
Si la viscosité est négligée (c'est-à-dire que ***fluide parfait***), l'équation **(I.83)** est encore simplifié à :

$$C_p \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} T]\right] = \nabla \cdot [k \nabla T] + \frac{Dp}{Dt} + \dot{q}_V \qquad \textbf{(I.84)}$$

L'élégance et généralité (ou la complexité?) de la formulation mathématique du TTR n'est pas retenue pour les applications **du génie de tous les jours**. En effet, fréquemment on se confronte à des problèmes à l'état stationnaire (ou permanent), pour des écoulements incompressibles, dont les équations deviennent essentiellement unidimensionnelles.

I.3 Équation générale de conservation

De ce qui précède, les équations régissantes la conservation ***de la masse,*** de la quantité de mouvement, et ***de l'énergie*** sont écrites en termes de ***quantités spécifiques ou propriétés intensives***, c'est-à-dire les quantités exprimées par unité de masse. L'équation de la quantité de mouvement, par exemple, exprimait le principe de la conservation de la quantité de mouvement linéaire en termes de quantité de mouvement par unité de masse, c'est-à-dire de vitesse. Le même type de l'équation conservation peut être appliquée à toute propriété intensive Φ, par exemple, la concentration de sel dans une solution ou fraction massique d'une espèce chimique 'module de combustion pour la description du flamme de pré-mélange ou de diffusion M1 énergétique Dr. MILOUA Hadj' . La variation de Φ dans le volume de contrôle VC en fonction du temps peut être exprimé comme une ***équation du bilan*** de forme suivante:



$$\frac{dG}{dt} = \text{Flux entrant} - \text{Flux sortant} + \text{Production} - \text{Destruction}$$

ou

$$\frac{dG}{dt} = \underbrace{\phi_e}_{\text{Flux convectif entrant}} - \underbrace{\phi_s}_{\text{Flux convectif sortant}} + \underbrace{R^+}_{\text{Production}} - \underbrace{R^-}_{\text{Destruction}} + \underbrace{\phi_d}_{\text{Flux diffusifs}}$$

Variation de $\boldsymbol{\Phi}$ par rapport $\boldsymbol{\Delta t}$ dans le volume matériel (**VM**) **Terme I**	=	Flux de surface de $\boldsymbol{\Phi}$ par rapport $\boldsymbol{\Delta t}$ à travers le volume de contrôle(**VC**) **Terme II**	+	Source/ puits de $\boldsymbol{\Phi}$ par rapport au temps $\boldsymbol{\Delta t}$ Dans le volume de contrôle (**VC**) **Terme III**

Pour un ***volume de contrôle fixe***, le changement de $\boldsymbol{\Phi}$ en fonction du temps dans le volume de matériel peut être écrit en utilisant le théorème de transport de Reynolds comme suit :

$$\textbf{Terme I}= \frac{d}{dt}\left(\int_{VM}(\rho\Phi)dV\right) = \int_V\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi) + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\Phi)\right]dV \qquad \textbf{(I.85)}$$

Où $\boldsymbol{\rho}$ est la densité du fluide et **V** le volume du volume de contrôle VC de surface **S**. Le terme $\boldsymbol{\rho v \Phi}$ représente le transport de $\boldsymbol{\Phi}$ par le champ d'écoulement et désigné par ***le flux convectif***, c'est-à-dire :

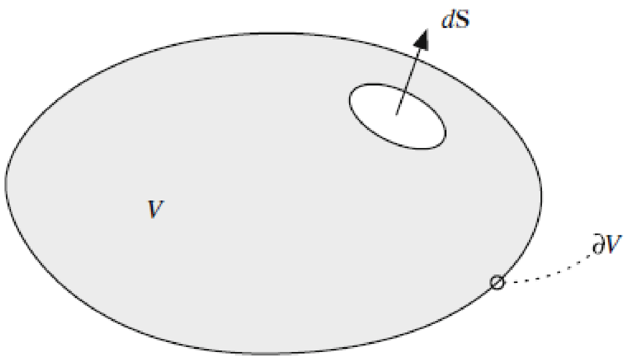


Fig.I.8 un volume de contrôle fixe arbitrairement.

$$J^{\Phi}_{convection} = \rho v \Phi \qquad \textbf{(I.86)}$$

Le deuxième terme représente la variation de $\boldsymbol{\Phi}$ due aux phénomènes physiques se produisant à travers la surface du volume de contrôle. Pour les phénomènes physiques d'intérêt dans ce chapitre, le mécanisme provoquant le flux entrant et sortant 'influx/out flux' de $\boldsymbol{\Phi}$ est dû à la diffusion moléculaire et est désignée par $J^{\Phi}_{diffusion}$. Indiquant la diffusion coefficient de $\boldsymbol{\Phi}$ par Γ^{Φ}, le flux de diffusion peut s'écrire :

$$J^{\Phi}_{diffusion} = \Gamma^{\Phi}\, \nabla \boldsymbol{\Phi} \qquad \textbf{(I.87)}$$

Et le terme deux devient :

$$\textbf{Terme II} = -\int_s J^{\Phi}_{diffusion} . \mathbf{nds} = -\int_V J^{\Phi}_{diffusion}\, dV = -\int_V \nabla \cdot \left(\Gamma^{\Phi}\, \nabla \Phi\right) dV \qquad \textbf{(I.88)}$$

Où **n** est le vecteur sortant unitaire, normal à la surface et le signe négatif est dû à la convention de signe adoptée (c'est-à-dire que le flux entrant est positif).

Le terme III peut être écrit comme :

$$\textbf{Terme III} = \int_V Q^{\Phi}\, dV \qquad \textbf{(I.89)}$$

Où Q^{Φ} est la production/consommation de $\boldsymbol{\Phi}$ dans le volume de contrôle par l'unité de volume, également appelé ***terme source***. Ainsi, l'équation de conservation peut être exprimé en :

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\rho\Phi}) + \nabla\cdot(\boldsymbol{\rho\Phi}\mathbf{v})\right] \boldsymbol{dV} = \int_V \nabla\cdot\left(\Gamma^{\boldsymbol{\Phi}}\,\nabla\boldsymbol{\Phi}\right)\,\boldsymbol{dV} + \int_V Q^{\boldsymbol{\Phi}}\,\boldsymbol{dV} \qquad \textbf{(I.90)}$$

Qui peut être réorganisé en :

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\rho\Phi}) + \nabla\cdot(\boldsymbol{\rho\Phi}\mathbf{v}) - \nabla\cdot\left(\Gamma^{\boldsymbol{\Phi}}\,\nabla\boldsymbol{\Phi}\right) - Q^{\boldsymbol{\Phi}}\right]\boldsymbol{dV} = 0 \qquad \textbf{(I.91)}$$

Pour que l'intégrale soit nulle pour n'import quel volume de contrôle, l'intérieur de l'intégrale doit être nulle; donnant l'équation de conservation sous forme différentielle comme :

$$\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}}(\boldsymbol{\rho\Phi}) + \nabla\cdot(\boldsymbol{\rho\Phi}\mathbf{v}) - \nabla\cdot\left(\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{\Phi}}\,\nabla\boldsymbol{\Phi}\right) - \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{0} \qquad \textbf{(I.92)}$$

Pour référence ultérieure, l'équation ci-dessus peut être réécrite en :

$$\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}}(\boldsymbol{\rho\Phi}) + \nabla\cdot\mathbf{J}^{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{0} \qquad \textbf{(I.93)}$$

Où le flux total $\mathrm{J}^{\boldsymbol{\Phi}}$ est la somme de flux convectif et diffusif donnés par

$$\mathbf{J}^{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{J}^{\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{C}} + \mathbf{J}^{\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{\rho}\mathbf{v}\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{\Phi}}\,\nabla\boldsymbol{\Phi} \qquad \textbf{(I.94)}$$

La forme finale de l'équation générale de conservation, Eq. (I.92), pour le transport d'une propriété $\boldsymbol{\Phi}$ est exprimé comme suit

$$\boxed{\underbrace{\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}}(\boldsymbol{\rho\Phi})}_{\substack{\textit{Terme transitoire}\\ \textit{'Unsteady term'}}} + \underbrace{\nabla\cdot(\boldsymbol{\rho\Phi}\mathbf{v})}_{\textit{Terme de convection}} = \underbrace{\nabla\cdot\left(\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{\Phi}}\,\nabla\boldsymbol{\Phi}\right)}_{\textit{Terme de diffusion}} + \underbrace{\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\Phi}}}_{\textit{Terme source}}} \qquad \textbf{(I.95)}$$

En comparant l'équation I. 95 aux diverses équations de conservation dérivées précédemment, il peut être facilement déduit qu'en attribuant les bonnes valeurs pour $\boldsymbol{\Phi}$, $\Gamma^{\boldsymbol{\Phi}}$ et $Q^{\boldsymbol{\Phi}}$, Eq. I. 95 est une équation générale qui peut représenter n'importe quelle équation de conservation.

Il s'agit d'une observation très importante qui réduira les développements nécessaires des techniques numériques dans le programme de Master dans ***le module de volume finis*** avec moi-même MILOUA Hadj le chargé de cours en se concentrant sur l'équation générale Eq. I. 95 plutôt que les équations de conservation individuelles.

I.4 Equation Navier-Stokes

Les équations gouvernantes contiennent comme inconnues supplémentaires les composantes de la contrainte visqueuse $\boldsymbol{\tau_{ij}}$. On obtient les formes les plus utiles des équations de conservation des fluides en introduisant un modèle adapté aux contraintes visqueuses $\boldsymbol{\tau_{ij}}$. Dans de nombreux fluides, les contraintes visqueuses peuvent être exprimées en fonction du taux de déformation local (ou taux déformation). Dans les écoulements tridimensionnels, le taux de déformation local est composé du taux de déformation linéaire et taux de déformation volumétrique.
Tous les gaz et de nombreux liquides sont isotropes. Les liquides peuvent présenter une contrainte visqueuse anisotrope. dans le présent développement on suppose que les fluides sont isotropes.

Le taux de déformation linéaire d'un élément de fluide a neuf composantes sur trois dimensions dont six sont indépendantes des fluides isotropes, Ils sont désignés par le symbole $\boldsymbol{\varepsilon_{ij}}$. Il existe trois Composantes des déformations diagonaux

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \textbf{(I.96.a)}$$

Il existe également six composantes de déformation de cisaillement

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xy} = \boldsymbol{\varepsilon}_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{xz} = \boldsymbol{\varepsilon}_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{yz} = \boldsymbol{\varepsilon}_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad \textbf{(I.96.b)}$$

La déformation volumique est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = div\ \mathbf{V} \qquad \textbf{(I.97)}$$

Dans ***un fluide Newtonien***, les contraintes visqueuses sont proportionnelles aux taux de déformation.
La forme tridimensionnelle de la loi de Newton pour un fluide compressible visqueux, la proportionnalité est due aux deux: La viscosité dynamique $\boldsymbol{\mu}$, pour relier les contraintes aux déformations linéaires, et la deuxième viscosité, λ, à relier les

contraintes à la déformation volumique. Les neuf composantes de contrainte visqueuse, dont six sont indépendants, sont :

$$\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\, div\,\mathbf{V} \quad \tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\, div\,\mathbf{V} \quad \tau_{zz} = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\, div\,\mathbf{V}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad \textbf{(I.98)}$$

Pour les gaz, une bonne approximation peut être prise en prenant la valeur $\boldsymbol{\lambda = -\frac{2}{3}\mu}$.
Les liquides sont incompressibles donc l'équation de conservation la masse est $\boldsymbol{div}\,\mathbf{V} = \mathbf{0}$ et les contraintes visqueuses ne sont que le double de la valeur du taux local de déformation linéaire multiplié par la viscosité dynamique, La substitution des contraintes de cisaillement ci-dessus I.98 dans l'équation de la quantité du mouvement
$\boldsymbol{\rho}\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{Dt}}(\mathbf{V}) = -\boldsymbol{\nabla p} + \underset{Tenseur\ de\ contrainte}{[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau}]} + \boldsymbol{Q^V}_i$ donne ce que l'on appelle Les équations de Navier - Stokes :
$\boldsymbol{Q^V}_i$: force appliquées dans le cas d'un fluide parfait sous pesanteur seulement $\boldsymbol{Q^V}_i = \begin{pmatrix}\rho g_x\\ \rho g_y\\ \rho g_z\end{pmatrix}$

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\, div\,\boldsymbol{V}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \boldsymbol{Q^V}_x$$

(I.99.a)

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\, div\,\boldsymbol{V}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \boldsymbol{Q^V}_y$$

(I.99.b)

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\, div\,\boldsymbol{V}\right] + \boldsymbol{Q^V}_z$$

(I.99.c)

Il est souvent utile de réorganiser les termes de contrainte visqueuse suivant x comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\, div\, V\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\, div\, V)+div(V\, grad\, V)$$
$$+S_{Mx}$$

(I.100)

de la même manière pour Y et Z *Les équations de Navier-Stokes :*

sous non conservative :

$$\boldsymbol{\rho\frac{Du}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+div(\mu\, grad\, u)+Q^{V}{}_{x}} \qquad \textbf{(I.101.a)}$$

$$\boldsymbol{\rho\frac{Dv}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial y}+div(\mu\, grad\, v)+Q^{V}{}_{y}} \qquad \textbf{(I.101.b)}$$

$$\rho\boldsymbol{\frac{Dw}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial z}+div(\mu\, grad\, w)+Q^{V}{}_{z}} \qquad \textbf{(I.101.c)}$$

Ou sous la forme conservative

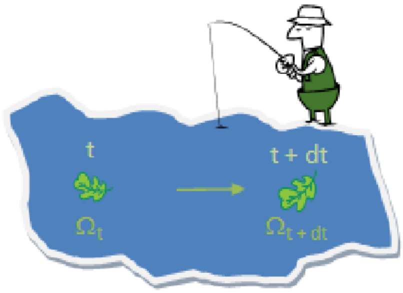
$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial t}[\rho V]+\nabla\cdot\{\rho VV\}=-\nabla_{p}+\nabla(\mu\nabla\cdot V)+Q^{V}} \qquad \textbf{(I.102)}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+div(\rho uu)=-\frac{\partial p}{\partial x}+div(\mu\, grad\, u)+Q^{V}{}_{x}} \qquad \textbf{(I.103.a)}$$
$$\boldsymbol{\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+div(\rho vu)=-\frac{\partial p}{\partial y}+div(\mu\, grad\, v)+Q^{V}{}_{y}} \qquad \textbf{(I.103.b)}$$
$$\boldsymbol{\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+div(\rho wu)=-\frac{\partial p}{\partial z}+div(\mu\, grad\, w)+Q^{V}{}_{z}} \qquad \textbf{(I.103.c)}$$

Chapitre II Cinématique des fluides

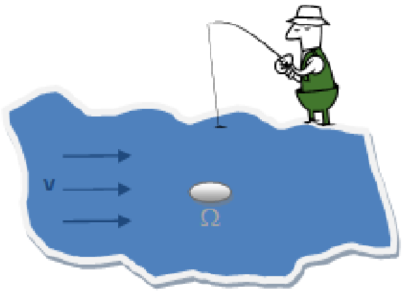
II. 1. Introduction

La cinématique décrit le mouvement du fluide avec la prise en compte de la nature des forces appliquées.L'écoulement du fluide est décrit par deux méthodes dans l'espace et le temps:



DESCRIPTION LAGRANGIENNE

LE PECHEUR OBSERVE AU COURS DU TEMPS LA FEUILLE Ω SE DEFORMER DANS LA RIVIERE



DESCRIPTION EULERIENNE:

LE PECHEUR OBSERVE LES PARTICULES D'EAU DE LA RIVIERE PASSANT SUR LE CAILLOU Ω

- **Méthode lagrangienne :**

s'écrit aussi :

$$\begin{cases} x = x(x_0\,,\; y_0\,,\; z_0\,,\; t\,) \\ y = y(x_0\,,\; y_0\,,\; z_0\,,\; t\,) \\ z = \; z(x_0\,,\; y_0\,,\; z_0\,,\; t\,) \end{cases} \qquad \textbf{(II.1)}$$

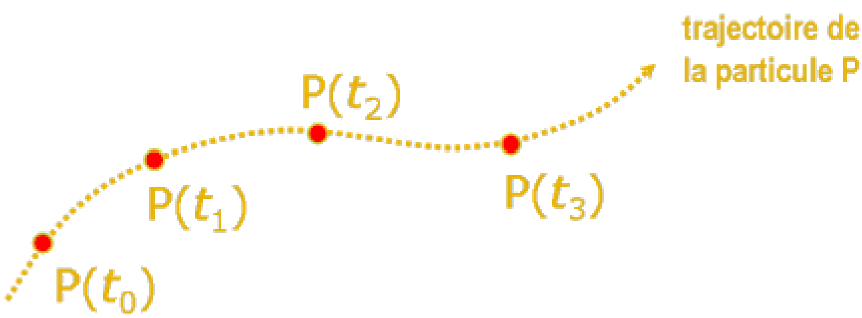


Fig.II.1 positions du P.

La vitesse peut être calculée par :

$$\vec{u} = \left[\frac{d\vec{S}}{dt}\right]_{\overrightarrow{s_0}} = \left\{ u_x = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_0, y_0, z_0} ;\ u_y = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x_0, y_0, z_0} ;\ u_z = \left(\frac{dz}{dt}\right)_{x_0, y_0, z_0} \right\} \quad \textbf{(II.2)}$$

L'accélération en $\overrightarrow{s}$ est :

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2 S}{dt^2}\right]_{\overrightarrow{S_0}} = \left\{ a_x = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x_0, y_0, z_0} ;\ a_y = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_{x_0, y_0, z_0} ;\ a_z = \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_{x_0, y_0, z_0} \right\}. \quad \textbf{(II.3)}$$

- **Méthode eulérienne**

  à un instant t fixe en déduit des vitesses dans l'espace l'espace occupé par le fluide.

  la vitesse dans ce cas s'écrit:

$\vec{u}(\overrightarrow{s},t)$ où $\vec{u} = u_x\,\vec{\imath} + u_y\,\vec{\jmath} + u_z\,\vec{k}$ et $\overrightarrow{s} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$. **(II.4)**

Les deux méthodes se coïncide

$$(\overrightarrow{s},t) = \frac{d\vec{S}}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u_x\,(x,y,z,t) \\ \dfrac{dy}{dt} = u_y\,(x,y,z,t) \\ \dfrac{dz}{dt} = u_z\,(x,y,z,t) \end{cases} \quad \textbf{(II.5)}$$

II.2 Accélération et dérivée

en point de vue eulérienne après Δt, les positions $(x+\Delta x\,, y+\Delta y\,, z+\Delta z\,)$ et les vitesses ($u_x + \Delta u_x$, $u_y + \Delta u_y$, $u_z + \Delta u_z$) changent .

On a :

$$\begin{cases} \Delta u_x = \dfrac{\partial u_x}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial u_x}{\partial z}\Delta z + \dfrac{\partial u_x}{\partial t}\Delta t + O(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t) \\ \Delta u_y = \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u_y}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\Delta z + \dfrac{\partial u_y}{\partial t}\Delta t + O(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t) \\ \Delta u_z = \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial u_x}{\partial z}\Delta z + \dfrac{\partial u_z}{\partial t}\Delta t + O(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t) \end{cases} \quad \textbf{(II.6)}$$

Par conséquent, comme $\Delta x = u_x \Delta t$, $\Delta y = u_y \Delta t$, $\Delta z = u_z \Delta t$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta u_x}{\Delta t} = \dfrac{du_x}{dt} = \dfrac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_x}{\partial z} = a \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta u_y}{\Delta t} = \dfrac{du_y}{dt} = \dfrac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_y}{\partial z} = a \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta u_z}{\Delta t} = \dfrac{du_z}{dt} = \dfrac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = a \end{cases} \quad \textbf{(II.7)}$$

Ou :

$$\underbrace{\frac{d}{dt}}_{\substack{\text{dérivée} \\ \text{particulaire}}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{\substack{\text{dérivée} \\ \text{temporelle} \\ \text{ou locale} \\ \hline =0 \text{ écoulement stationaire} \\ \neq 0 \text{ transitoire}}} \underbrace{+ u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}}_{\substack{\text{dérivée} \\ \text{convective} \\ =0 \text{ écoulement uniforme} \\ \neq 0 \text{ N.U}}}$$

(II.8)

II. 3 Lignes de courant, lignes d'émission et Trajectoires:

II.3.1Lignes de courant

coordonnées cartésiennes :

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{ds} = 0 = \begin{vmatrix} u_y dz - u_z dy \\ u_z dx - u_x dz \\ u_x dy - u_y dx \end{vmatrix} \quad \textbf{(II.9)}$$

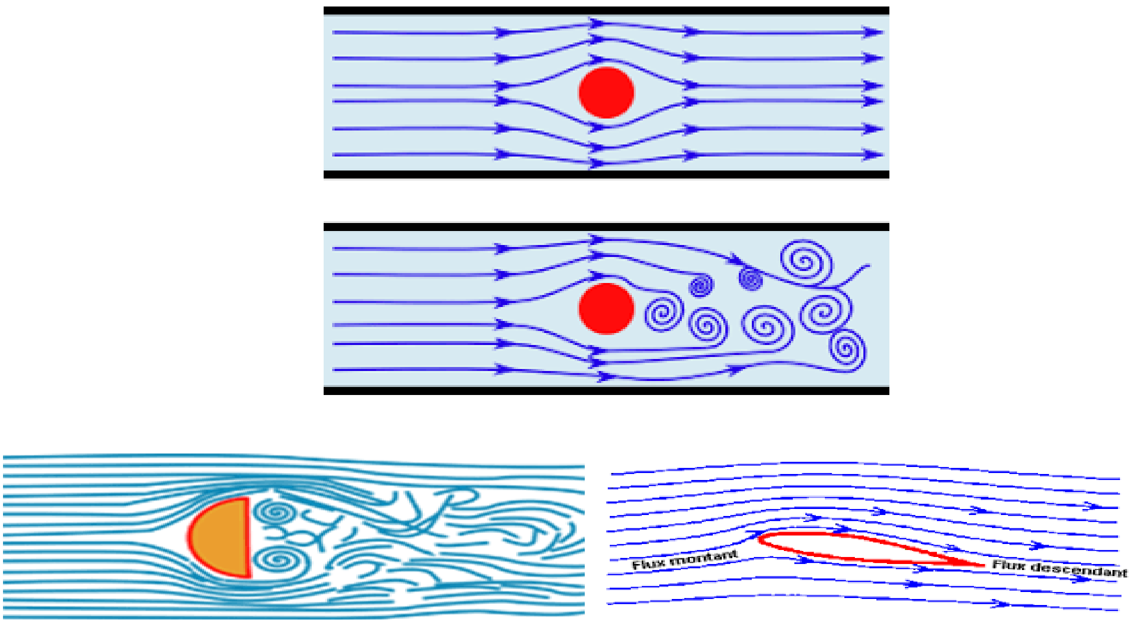


Fig.II.2 exemples des lignes de courant.

après développement l'équation des lignes de courant sera :

$$\frac{dx}{u_x(x,y,z,t)} = \frac{dy}{u_y(x,y,z,t)} = \frac{dz}{u_z(x,y,z,t)} \qquad \textbf{(II.10)}$$

Le tube de courant c'est qu'il n'y ait pas d'intersection entre les lignes de courant:

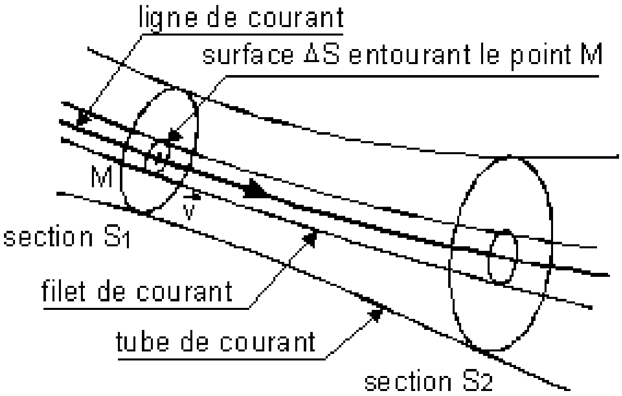


Fig.II.3 Tube de courant.

II. 3.2. Lignes d'émission

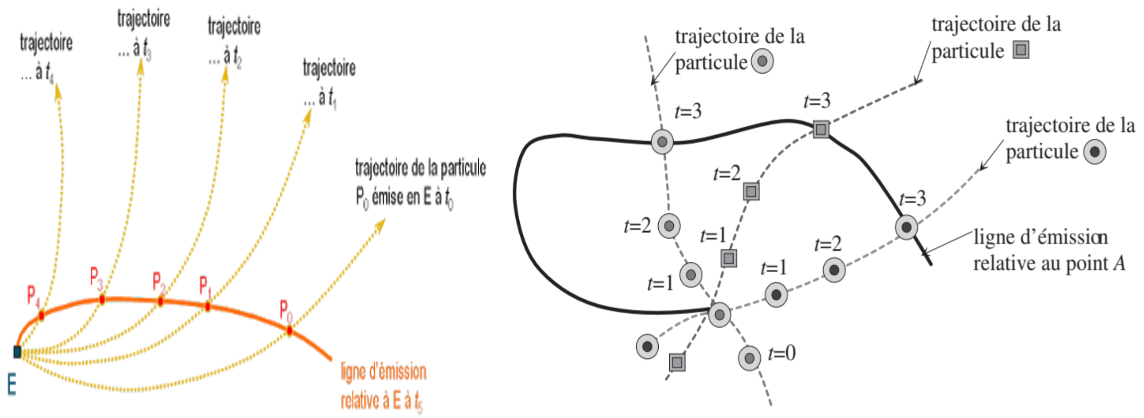


Fig.II.4 Trajectoires et lignes d'émission.

II.3.3. Trajectoires

Les *trajectoires* sont définies par :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u_x\,(x,y,z,t) \\ \dfrac{dy}{dt} = u_y\,(x,y,z,t) \\ \dfrac{dz}{dt} = u_z\,(x,y,z,t) \end{cases} \qquad \textbf{(II.11)}$$

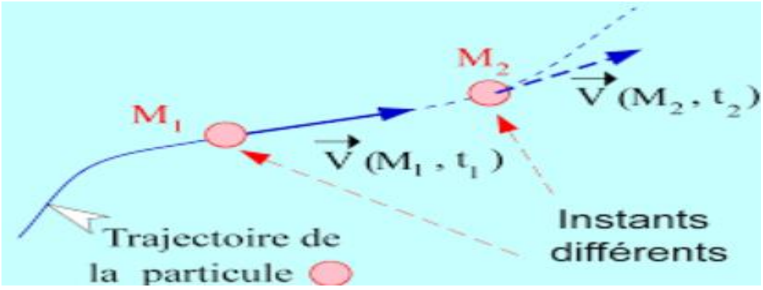


Fig.II.5 lignes de courant et trajectoires.

II. 4.Translation, rotation et déformation :

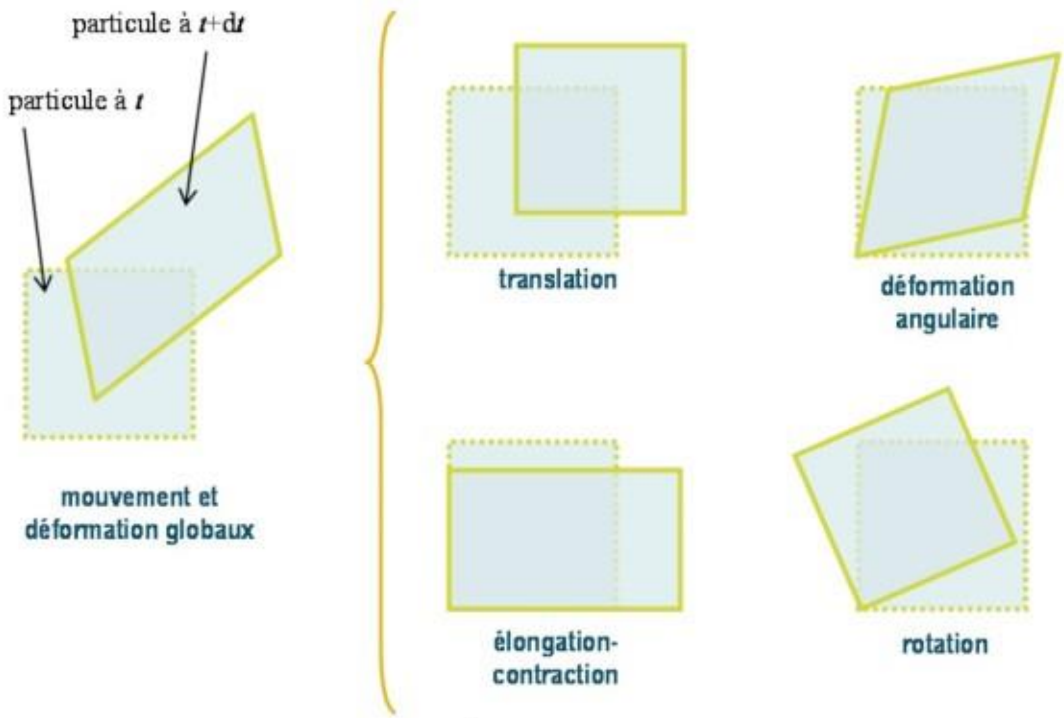


Fig.II.6 déformation lors d'un écoulement

II.4.1.Écoulement uniforme

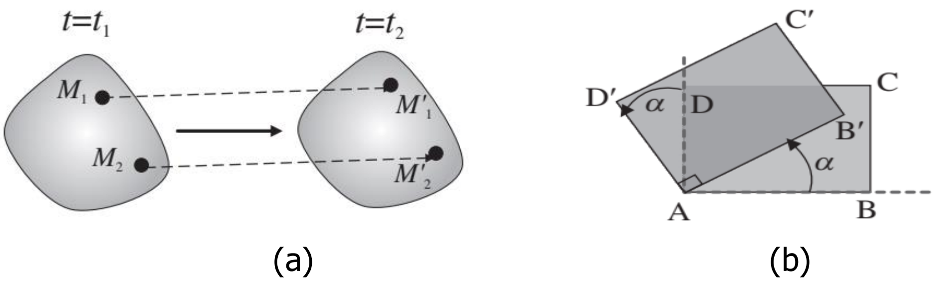


Fig.II.7 (a) Écoulement uniforme) et (b) rotation d'un volume sans déformation.

II.4.2. Translation avec déformations linéaires

les *vitesses de déformation* linéaire en 3D :

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial_x}\right) , \quad \dot{\varepsilon}_{yy} = \left(\frac{\partial u_y}{\partial_y}\right), \dot{\varepsilon}_{zz} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial_z}\right)$$

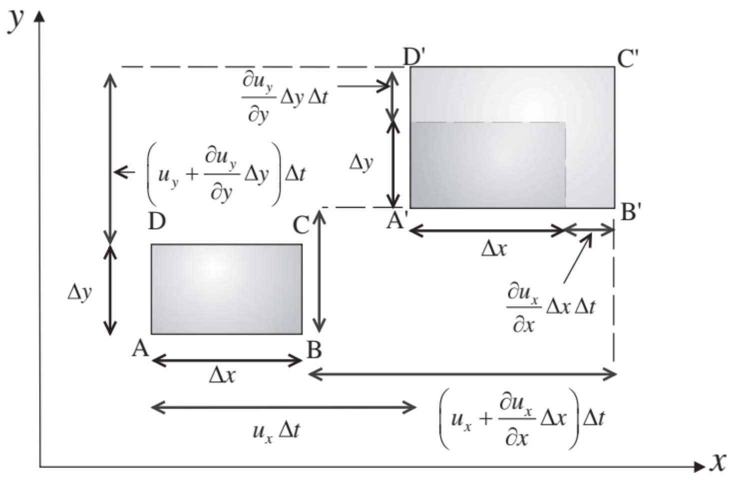


Fig.II.8 déformations plane

La déformation 3D est nulle pour un fluide est *incompressible*.:

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial_x}\right)\Delta y \Delta z + \left(\frac{\partial u_y}{\partial_y}\right)\Delta x \Delta z + \left(\frac{\partial u_z}{\partial_z}\right)\Delta x \Delta y\right] \qquad \textbf{(II.12)}$$

$$\dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy} + \dot{\varepsilon}_{zz} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial_x}\right) + \left(\frac{\partial u_y}{\partial_y}\right) + \left(\frac{\partial u_z}{\partial_z}\right) = \nabla . u = 0 \qquad \textbf{(II.13)}$$

II.4.3 Vitesse de déformation quelconque

Le *taux de déformation* angulaire c'est:

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}+\frac{d\beta}{dt}\right) \qquad \textbf{(II.14)}$$

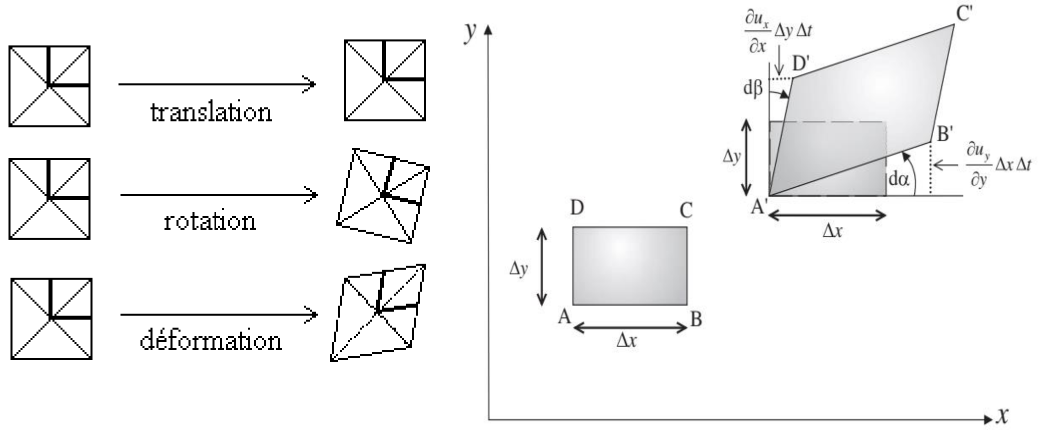


Fig.II.9 Déformation quelconque d'un VM.

$$\begin{cases} d\alpha \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left[\dfrac{\frac{\partial u_y}{\partial x}\Delta x \Delta t}{\Delta x(1+\frac{\partial u_x}{\partial x}\Delta t)}\right] \cong \dfrac{\partial u_y}{\partial x}dt \\ d\beta \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left[\dfrac{\frac{\partial u_x}{\partial y}\Delta y \Delta t}{\Delta y(1+\frac{\partial u_y}{\partial y}\Delta t)}\right] \cong \dfrac{\partial u_y}{\partial y}dt \end{cases} \qquad \textbf{(II.15)}$$

D'où d'après l'équation (II.14) :

$$\dot{\varepsilon}_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)$$

Même chose pour $\dot{\varepsilon}_{xz}$ *et* $\dot{\varepsilon}_{yz}$ et en déduit le tenseur des taux de déformation $\overline{\overline{\dot{\varepsilon}}}$:

$$\overline{\overline{\dot{\varepsilon}}}_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \dot{\varepsilon}_{xy} & \dot{\varepsilon}_{xz} \\ \dot{\varepsilon}_{yx} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \dot{\varepsilon}_{yz} \\ \dot{\varepsilon}_{zx} & \dot{\varepsilon}_{zy} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial_x}+\frac{\partial u_x}{\partial_z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial_y}+\frac{\partial u_y}{\partial_z}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial_z} \end{pmatrix}$$

(II.16)

Ou tout simplement par :

$$\overline{\overline{\varepsilon}}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{u_i}}{\partial \mathrm{xj}} + \frac{\partial \mathrm{u_j}}{\partial \mathrm{xi}}\right) \qquad \textbf{(II.17)}$$

le tenseur de taux de rotation R_{ij} $(\overline{\overline{R}})$:

$$R_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{u_i}}{\partial \mathrm{xj}} - \frac{\partial \mathrm{u_j}}{\partial \mathrm{xi}}\right) \qquad \textbf{(II.19)}$$

Le tenseur du gradient de vitesse est la somme du tenseur du taux de déformation et du tenseur de taux de rotation :

$$\overline{\overline{\nabla}}_\iota = \overline{\overline{\dot{\varepsilon}}} + \overline{\overline{R}} \qquad \textbf{(II.20)}$$

Le vecteur tourbillon c'est :

$$\vec{\Omega} = 2\vec{\varpi} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \qquad \textbf{(II.21)}$$

En coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\vec{\Omega} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathrm{u_z}}{\partial_y} - \dfrac{\partial \mathrm{u_y}}{\partial_\mathrm{z}} \\ \dfrac{\partial \mathrm{u_x}}{\partial_z} - \dfrac{\partial \mathrm{u_z}}{\partial_\mathrm{x}} \\ \dfrac{\partial \mathrm{u_y}}{\partial_x} - \dfrac{\partial \mathrm{u_x}}{\partial_\mathrm{y}} \end{array} \right. \qquad \textbf{(II.22)}$$

Et en coordonnées cylindriques (avec $\vec{u}(\ u_r\ ,\ u_\theta\ ,\ u_z\ )$) on a :

$$\vec{\Omega} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \mathrm{u_z}}{\partial_\theta} - \dfrac{\partial \mathrm{u_\theta}}{\partial_\mathrm{z}} \\ \dfrac{\partial \mathrm{u_r}}{\partial_z} - \dfrac{\partial \mathrm{u_z}}{\partial_\mathrm{r}} \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial(\mathrm{r u_\theta})}{\partial_r} - \dfrac{\partial \mathrm{u_r}}{\partial_\theta}\right] \end{array} \right. \qquad \textbf{(II.23)}$$

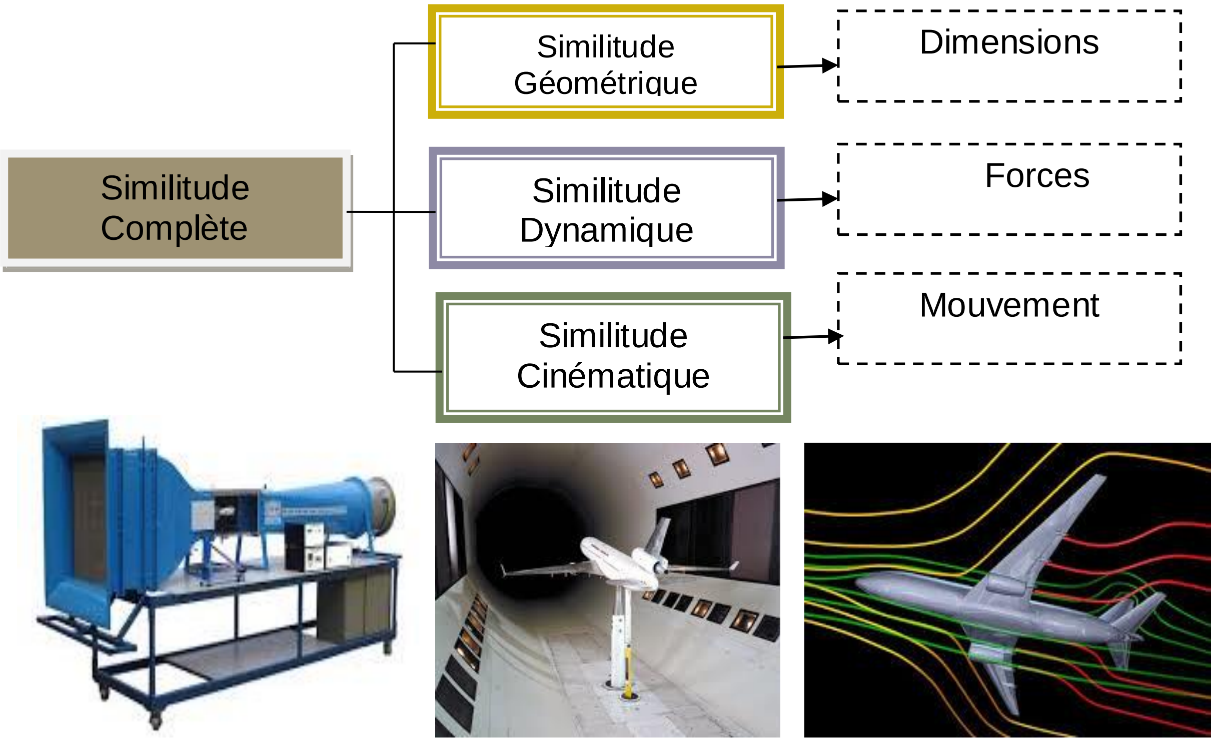
si $\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \vec{\Omega} = \vec{0}$. l'écoulement est irrationnel Les équations des lignes d'isovorticité sont définies par :

$$\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{ds} = \vec{0} \Rightarrow \frac{dx}{\Omega x} = \frac{dy}{\Omega y} = \frac{dz}{\Omega z}$$

Chapitre III Analyse dimensionnelles et Principe de Similitudes

En générale on peut schématiser le principe de similitude comme suit:

Tableau III.1: principe de similitude

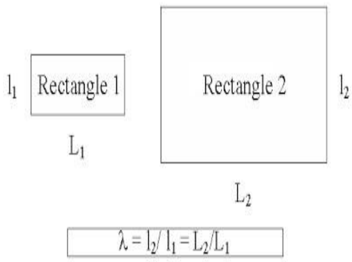


un rapport géométrique est utiliser:

$$\frac{l1m}{l1p} = \frac{l2m}{l2p} = nombre\ sans\ dimension$$

(III.1)

m, p désigne modèles, prototype



III.2.2 Similitude cinématique

la vitesse (longueur/temps). c'est le rapport d'échelle sur le rapport des temps.
Donc la vitesse $l/\,t$ et l'accélération $l/\,t^2$.

III.2.3 Similitude dynamique

c'est le rapport des forces

- la force d'inertie :

$$|\overrightarrow{Fi}| \propto m|\vec{a}| \propto \rho l^3 \frac{U^2}{l} = \rho l^2 U^2 \qquad \text{(III.2)}$$

- la force visqueuse :

$$|\overrightarrow{Fv}| \propto \mu S \left|\frac{d\vec{u}}{dy}\right| \propto \mu l^2 \frac{U}{l} = \mu Ul \qquad \text{(III.3)}$$

- la force de pression :

$$|\overrightarrow{Fp}| \propto \Delta P\, l^2 \qquad \text{(III.4)}$$

- la force de gravité :

$$|\overrightarrow{Fg}| \propto |m\vec{g}| \propto \rho l^3 g \qquad \text{(III.5)}$$

- tension de surface) :

$$|\overrightarrow{Fc}| \propto \sigma l \qquad \text{(III.6)}$$

- la force de compressibilité:

$$|\overrightarrow{Fe}| \propto E\, l^2 \qquad \text{(III.7)}$$

III.3 Écoulements en fonction des forces appliquées

$$\frac{Force\ visqueuse}{Force\ d'inertie} = \frac{|\overrightarrow{Fv}|}{|\overrightarrow{Fi}|} = \frac{\mu Ul}{\rho l^2 U^2} = \frac{v}{Ul} = \frac{1}{Re} \qquad \text{(III.8)}$$

Avec Re le nombre de Reynolds

$$\frac{Force\ de\ pression}{Force\ d'inertie} = \frac{|\overrightarrow{Fp}|}{|\overrightarrow{Fi}|} = \frac{\Delta P l^2}{\rho l^2 U^2} = \frac{\Delta P}{\rho U^2} = Eu \qquad \text{(III.9)}$$

Eu le nombre d'Euler.

$$\frac{Force\ de\ gravité}{force\ d'inertie} = \frac{|\overrightarrow{F^g}|}{|\overrightarrow{F_i}|} = \frac{gl}{U^2} = \frac{1}{F^2r}$$

Où $F_r = U/\sqrt{gl}$ *est le nombre de Froude:*

$$\frac{(gl^p)^{1}/_2}{U^p} = \frac{(gl^m)^{1}/_2}{U^m} \qquad \text{(III.10)}$$

$$\frac{force\ d'inertie}{force\ capillaire\ de\ tension} = \frac{|\vec{F_i}|}{|\vec{Fc}|} = \frac{\rho l^2 U^2}{\sigma\, l} = \frac{\rho l U^2}{\sigma} = W^e \qquad \text{(III.11)}$$

We est le nombre de $Weber$:

$$\frac{\rho l U}{\sigma} = \frac{\rho l U}{\sigma} \qquad \text{(III.12)}$$

$$\frac{Force\ d'inertie}{Force\ élastique} = \frac{|\vec{F_i}|}{|\vec{Fe}|} = \frac{\rho l^2 U^2}{E l^2} = \frac{\rho l^2 U^2}{E l^2} = Ca \qquad \text{(III.13)}$$

Ca est le $nombre\ de\ cauchy$:

$$\frac{|\vec{F_i}|}{|\vec{Fe}|} = \frac{\rho\, U^2}{E^s}$$

III.4 Dimensions des quantités physiques

Dans le système International, les quantités physiques primaires sont : la masse (M), le temps (T) et la longueur (L),…

La contrainte visqueuse par exemple :

$$\tau = \left[\frac{Force}{SurFace}\right] = \frac{[Masse \times Accélération]}{[SurFace]} = \frac{MLT-^2}{L^2} = ML - T - {}^2 \qquad \text{(III.14)}$$

Et la viscosité

$$\mu = \left[\frac{\tau}{dU/dy}\right] = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{\frac{L1}{TL}} = M/LT \qquad \text{(III.15)}$$

III.5 THÉORME DE VASHY-BUCKINGHAM

n grandeurs $E^1, E^2, \ldots, E^n$

p unités indépendantes,

(n-p) nombre sans dimensions $\pi^1, \pi^2, \ldots, \pi^{n-p}$(np).

constitue le théorème de $Vashy$- $Buckingham$ (ou Pi- $Buckingham$) c'est l'écriture d'un système suivant : A x= b, avec :

$$A = \begin{bmatrix} a^{11}\ a^{12} \ldots\ldots\ldots\ldots a^{1\,n} \\ a^{21}\ a^{22} \ldots\ldots\ldots\ldots a^{2\,n} \\ \vdots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \vdots \\ a^{p1}\ a^{p2} \ldots\ldots\ldots\ldots a^{pn} \end{bmatrix},\quad X = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix},\quad b = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^p \end{bmatrix} \qquad \text{(III.20)}$$

III.5.2 Détermination des termes π

$$\begin{cases} \pi^1 = x^1{}_a{}^{11}\ x^2{}_a{}^{12} \ldots x^p{}_a{}^{1p} \quad x^{p1} \\ \pi^2 = x^1{}_a{}^{21}\ x^2{}_a{}^{22} \ldots x^p{}_a{}^{2p} \quad x^{p2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ \pi^{n-p} = x^1{}_a{}^{p1} x^2{}_a{}^{p2} \ldots x^p{}_a{}^{pp}\ x^p{}_a{}^{n-p} \end{cases} \qquad \text{(III.21)}$$

Les nombres (π^1, … π^{n-p}) sont sans unités. On identifie les dimensions des paramètres x^1,…, x^p et on résout le système des (n-p) équations linéaires afin de trouver les nombres (π^1, …, $\pi^n - {}^p$)

III.7.3 Adimensionnement des équations de conservation" Application pour convection libre"

Les équations différentielles représentant les lois de conservation développées dans le chapitre I a partir de Théorème de transport de Reynolds sont rarement résolues en utilisant les variables adimensionnelles. La pratique courante consiste à écrire ces équations dans une ***forme adimensionnelle*** utilisant des quantités sans dimension qui sont obtenues par l'utilisation d'échelles caractéristiques appropriées. L'utilisation des variables adimensionnelles ayant plusieurs avantages. Il permet de réduire le nombre de paramètres appropriés pour le problème considéré et permet de démontrer l'ampleur relative des différents termes dans l'équation de conservation et par conséquent ceux qui peuvent être négligés.

Cela simplifie l'équation à résoudre et ne laisse que des termes d'ordre de grandeur similaire, ce qui se traduit par une meilleure précision numérique.
En outre, la solution générée sera applicable à tous les problèmes similaires dynamiquement.
Une variable dimensionnelle est transformée en variable adimensionnelle en divisant la variable par une quantité (composée d'une ou plusieurs propriétés physiques) qui a la même dimension que la variable d'origine. Par Exemple, les coordonnées spatiales peuvent être divisées par une longueur caractéristique ou une combinaison de quantités ($\mu_{ref} / \rho_{ref}\, l_{ref}$) qui est collectivement les mêmes unités que la vitesse (m/s); la pression est généralement divisée par une pression dynamique de référence ($\rho_{ref}|v_{ref}|^2$) ; le temps peut être divisé par le rapport d'une longueur caractéristique à une vitesse de référence ($l_{ref}/|\, v_{ref}|$) , etc. Par exemple , un écoulement visqueux incompressible avec une viscosité et une conductivité thermique constantes et avec des forces volumique agissant dans la direction y (la gravité est donnée par g= (0, −g , 0). Les équations régissant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie dans un système de coordonnées cartésiennes tridimensionnelles production de chaleur sont données par :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad \text{(III.22)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vu)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho wu)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad \text{(III.23.a)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vv)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho wv)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)-\rho g \qquad \text{(III.24.b)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uw)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vw)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho ww)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{{}^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \qquad \text{(III.25.c)}$$

$$Cp\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho T)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uT)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vT)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho wT)\right]=K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \qquad \text{(III.26)}$$

Lorsque les forces corporelles sont négligeables par rapport à d'autres forces, le terme ρg peut être mis à zéro et supprimé de l'équation. Dans une telle situation, *de convection naturelle* la différence de température $\Delta T = T - T\infty$ (où $T\infty$ est une température de référence entre la température minimale et maximale dans le domaine, généralement prise comme valeur moyenne)
le coefficient de dilatation volumique

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right) \quad \text{(III.27)}$$

L'approximation de Boussinesq donne:

$$\rho = \rho\infty[1 - \beta(T - T\infty)] \quad \text{(III.28)}$$

utiliser cette expression pour ρ dans le terme de force corporelle uniquement et désigner la valeur de ρ constante par ρ pour simplifier la notation. l'équation de la quantité du mouvement suivant y se transforme en:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho wv) = -\frac{\partial}{\partial y}(p + \rho gy) + \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \rho g\beta(T - T\infty) \quad \text{(III.29)}$$

Cela montre clairement qu'en résolvant les problèmes de convection naturelle, les équations de quantité de mouvement et d'énergie sont couplées, ce qui nécessite une solution simultanée des deux équations.

Les formes adimensionnelles des équations de conservation sont obtenues en définissant les paramètres adimensionnels suivants:

$$\hat{x} = \frac{x}{L},\ \hat{y} = \frac{y}{L},\ \hat{z} = \frac{z}{L},\ \hat{u} = \frac{u}{\mu/(\rho L)},\ \hat{v} = \frac{v}{\mu/(\rho L)},\ \hat{w} = \frac{w}{\mu/(\rho L)},\ \hat{p} = \frac{p+\rho gy}{\mu^2/(\rho L^2)},\ \hat{t} = \frac{t}{\rho L^2/\mu},\ \hat{T} = \frac{T - T\infty}{Tmax - T\infty} \quad \text{(III.30)}$$

Où L est une longueur caractéristique, μ la viscosité dynamique du fluide, T_{max} température maximale dans le domaine. Et le ∧ est utilisé pour désigner des quantités adimensionnelles. En terme de nouvelles variables :

- l'équation de continuité s'écrit:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial[\mu\hat{u}/(\rho L)]}{\partial(L\hat{x})} = \frac{\mu/(\rho L)}{L}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{x}} = \frac{\mu}{\rho L^2}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{x}} \quad \text{(III.31)}$$

- les équations de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) = \frac{\partial(\mu\hat{u}/L)}{\partial(\rho L^2\,\hat{t}/\mu)} = \frac{\mu/L}{\rho L^2/\mu}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{t}} = \frac{\mu^2}{\rho L^3}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{t}} \quad \text{(III.32)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho uu) = \frac{\partial[\mu^2\,(\rho L^2)\hat{u}\hat{u}]}{\partial(L\hat{x})} = \frac{\mu^2/(\rho L^2)}{L}\frac{\partial}{\partial\hat{x}}(\hat{u}\hat{u}) = \frac{\mu^2}{\rho L^3}\frac{\partial}{\partial\hat{x}}(\hat{u}\hat{u}) \quad \text{(III.33)}$$

$$\hat{p} = \frac{p+\rho g\,y}{\mu^2/(\rho L^2)} \Rightarrow \frac{\partial\hat{p}}{\partial\hat{x}} = \frac{\partial\{(p+\rho gy)/[\mu^2/(\rho L^2)]\}}{\partial(x/L)} = \frac{\rho L^3}{\mu^2}\frac{\partial P}{\partial X} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\mu^2}{\rho L^3}\frac{\partial\hat{p}}{\partial\hat{x}} \quad \text{(III.34)}$$

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu\frac{\partial^2[\mu\hat{u}(\rho L)]}{\partial(L\hat{x})^2} = \mu\frac{\mu/(\rho L)}{L^2}\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial\hat{x}^2} = \frac{\mu^2}{\rho L^3}\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial\hat{x}^2}$$

$$\rho g\beta(T_{max} - T_\infty) = \rho g\beta(T_{max} - T_\infty)\hat{T} = \rho g\beta(\Delta T)\hat{T} \quad \text{(III.35)}$$

- Même chose pour les termes dans l'équation d'énergie:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) = \frac{\partial[\rho(T_\infty + \Delta T\,\hat{T})]}{\partial(\rho L^2\hat{t}/\mu)} = \frac{\mu\Delta T}{L}\frac{\partial\hat{T}}{\partial\hat{t}} \quad \text{(III.36)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uT) = \frac{\partial(\mu\hat{u}(T_\infty + \Delta T\,\hat{T})L)}{\partial(L\hat{x})} = \frac{\mu T\infty}{L}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{x}} + \frac{\mu\Delta T}{L^2}\frac{\partial}{\partial\hat{x}}(\hat{u}\hat{T}) \quad \text{(III.37)}$$

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = k\frac{\partial^2(T_\infty + \Delta T\,\hat{T})}{\partial(L\hat{x})^2} = \frac{k\Delta T}{L^2}\frac{\partial^2\hat{T}}{\partial\hat{x}^2} \quad \text{(III.38)}$$

En remplaçant les termes par leurs expressions équivalentes, les formes adimensionnelles des équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie sont obtenues comme suit:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}}+\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}}+\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}}=0 \qquad \text{(III.39)}$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}}+\frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{u}\hat{u})+\frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\hat{v}\hat{u})+\frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\hat{w}\hat{u})=-\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}}+\left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2}+\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2}+\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2}\right) \qquad \text{(III.40)}$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}}+\frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{u}\hat{v})+\frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\hat{v}\hat{v})+\frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\hat{w}\hat{u})=-\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{Y}}+\left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2}+\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y}^2}+\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{z}^2}\right)+\mathrm{Gr}\,\hat{T} \qquad \text{(III.41)}$$

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}}+\frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{u}\hat{w})+\frac{\partial}{\partial \hat{Y}}(\hat{u}\hat{w})+\frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\hat{w}\hat{w})=-\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}}+\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}+\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{Y}^2}+\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{z}^2}\right) \qquad \text{(III.42)}$$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}}+\frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{u}\hat{T})+\frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\hat{v}\hat{T})+\frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\hat{w}\hat{T})=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{Pr}}\left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2}+\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{y}^2}+\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{z}^2}\right) \qquad \text{(III.43)}$$

Où Gr est le nombre de Grashof, Pr est le nombre de Prandtl et ν la viscosité cinématique 'Kinimatic viscosity' :

$\mathrm{Gr}=\frac{g\beta\Delta T L^3}{v^2}$ le rapport la force flottabilité 'Buoyant' et la force visqueuse (convection naturelle)

$$Pr=\frac{\mu c_p}{K}=\frac{v}{\alpha} \text{ puisque } \nu=\frac{\mu}{\rho} \qquad \text{(III.44)}$$

viscosité cinématique ν à la diffusivité thermique α, le nombre de Prandtl représente le rapport de la couche limite hydrodynamique à la couche limite thermique. la couche limite thermique est plus grande que la couche limite hydrodynamique pour $\mathrm{Pr}<1$ et l'inverse pour $\mathrm{Pr}>1$,les deux couches coïncident pour $\mathrm{Pr}=1$.

Dans des conditions différentes d'autres types de forces de fluide et de termes de dissipation peuvent être inclus dans les équations résultant différents nombres adimensionnels.

- Pour l'écoulement dans des milieux poreux, par exemple, le nombre ***de darcy*** (Da) apparaît comme un paramètre important,
- pour le transfert de chaleur, le numéro de péclet c'est:
  $$\mathrm{Pe}=\frac{\rho U L c p}{k}=\frac{UL}{\alpha}=\mathrm{Re}\times\mathrm{Pr}$$
- Pour les le transfert de masse, le nombre de péclet c'est $\mathrm{Pe}=\frac{UL}{D}=\mathrm{Re}\times\mathrm{Sc}$ Où D est la diffusivité massique et Sc le nombre de Shmidt.
- Le nombre de Schmidt $\mathrm{Sc}=\frac{v}{D}$ pour le transfert de masse est l'analogue du nombre de Prandtl dans le transfert de chaleur. L'effet visqueux (v) à la diffusivité de masse (D). Physiquement, le Sc relie les épaisseurs des couches limites hydrodynamiques et de transfert de masse.
- Le nombre de Nusselt exprimé par $\mathrm{Nu}=\frac{hL}{k}$, l'effet de la convection sur la conduction thermique

- Le nombre Eckert (Ec) est un nombre sans dimension reliant l'énergie cinétique du flux à son enthalpie et est calculé par $\mathrm{Ec} = \frac{V \cdot V}{Cp\Delta T}$.
- ..etc.

Références bibliographiques

[1]. AMIROUDINE, S., & BATTAGLIA, J. L. MECANIQUE DES FLUIDES:COURS ET EXERCICES CORRIGES., DUNOD, PARIS, 2011.

[2]. CANDEL S. MECANIQUE DES FLUIDES, 2 EME EDITION, DUNOD, 2005.

[3]. MOUKALLED, F., MANGANI, L., & DARWISH, M. (2016). THE FINITE VOLUME METHOD IN COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS (VOL. 113, PP. 10-1007). BERLIN, GERMANY: SPRINGER.

[4]. RJUCSH K. KUNDU, I. M. COHEN, "FLUID MECHANICS", 2ND EDITION, ACADEMIC PRESS, 2002.