A-23/01/2018

Correction Examen Méthodes numérique appliquées et optimisation

Exercice 1

Equations de l'élément [1]

Barycentre de l'élément [1]

$$x_c = \frac{x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(4)}}{3} = 1.3333 \quad (0.5P) \qquad y_c = \frac{y^{(1)} + y^{(2)} + y^{(4)}}{3} = 2.3333 \quad (0.5P)$$

Valeur de F(x,y) et Q(x,y) au barycentre de l'élément [1]

$$Q_c = -\frac{y_c}{10} = -0.2333 \quad (0.5P) \qquad F_c = \frac{x_c}{4} + y_c - 12 = -9.3334 \quad (0.5P)$$

Eléments de la matrice K

$$K_{11} = \frac{\det(M_{[1]})}{2}\left[B_1^2 + C_1^2 - \frac{Q_c}{6}\right] = \frac{23}{2}\left[(-0.0435)^2 + (-0.2609)^2 + \frac{0.2333}{6}\right] = 1.2515 \quad (0.25P)$$

$$K_{22} = \frac{\det(M_{[1]})}{2}\left[B_2^2 + C_2^2 - \frac{Q_c}{6}\right] = \frac{23}{2}\left[(0.1739)^2 + (0.0435)^2 + \frac{0.2333}{6}\right] = 0.8167 \quad (0.25P)$$

$$K_{33} = \frac{\det(M_{[1]})}{2}\left[B_3^2 + C_3^2 - \frac{Q_c}{6}\right] = \frac{23}{2}\left[(-0.1304)^2 + (0.2174)^2 + \frac{0.2333}{6}\right] = 1.1863 \quad (0.25P)$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{\det(M_{[1]})}{2}\left[(B_1B_2) + (C_1C_2) - \frac{Q_c}{12}\right]$$

$$= \frac{23}{2}\left[(-0.0435 \cdot 0.1739) + (-0.2609 \cdot 0.0435) - \frac{0.2333}{12}\right] = 0.0062 \quad (0.25P)$$

$$K_{13} = K_{31} = \frac{\det(M_{[1]})}{2}\left[(B_1B_3) + (C_1C_3) - \frac{Q_c}{12}\right]$$

$$= \frac{23}{2}\left[(-0.0435 \cdot -0.1304) + (-0.2609 \cdot 0.2174) - \frac{0.2333}{12}\right] = -0.3633 \quad (0.25P)$$

$$K_{23} = K_{32} = \frac{\det(M_{[1]})}{2}\left[(B_2B_3) + (C_2C_3) - \frac{Q_c}{12}\right]$$

$$= \frac{23}{2}\left[(0.1739 \cdot -0.1304) + (0.0435 \cdot 0.2174) - \frac{0.2333}{12}\right] = 0.0714 \quad (0.25P)$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = -\frac{\det(M_{[1]})}{2}\left(\frac{F_c}{3}\right) = -\frac{23}{2}\left(\frac{-9.3334}{3}\right) = 35.7780 \quad (0.25P)$$

Les équations de l'élément [1]

$$\begin{bmatrix} 1.2515 & 0.0062 & -0.3633 \\ 0.0062 & 0.8167 & 0.0714 \\ -0.3633 & 0.0714 & 1.1863 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(2)} \\ u^{(4)} \\ u^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35.7780 \\ 35.7780 \\ 35.7780 \end{bmatrix} \quad (0.25P)$$

Equations de l'élément [2]

Barycentre de l'élément [2]

$$x_c = \frac{x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(4)}}{3} = 3 \quad (0.5P) \qquad y_c = \frac{y^{(1)} + y^{(2)} + y^{(4)}}{3} = 1 \quad (0.5P)$$

Valeur de F(x,y) et Q(x,y) au barycentre de l'élément [2]

$$Q_c = -\frac{y_c}{10} = -0.1 \quad (0.5P) \qquad F_c = \frac{x_c}{4} + y_c - 12 = -10.25 \quad (0.5P)$$

Eléments de la matrice K

$$K_{11} = \frac{\det(M_{[2]})}{2}\left[B_1^2 + C_1^2 - \frac{Q_c}{6}\right] = \frac{12}{2}\left[(-0.25)^2 + (0.0833)^2 + \frac{0.1}{6}\right] = 0.5167 \quad (0.25P)$$

$$K_{22} = \frac{\det(M_{[2]})}{2}\left[B_2^2 + C_2^2 - \frac{Q_c}{6}\right] = \frac{12}{2}\left[(0.25)^2 + (-0.4167)^2 + \frac{0.1}{6}\right] = 1.5167 \quad (0.25P)$$

$$K_{33} = \frac{\det(M_{[2]})}{2}\left[B_3^2 + C_3^2 - \frac{Q_c}{6}\right] = \frac{12}{2}\left[(0)^2 + (0.3333)^2 + \frac{0.1}{6}\right] = 1.1863 \quad (0.25P)$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{\det(M_{[2]})}{2}\left[(B_1B_2) + (C_1C_2) - \frac{Q_c}{12}\right]$$

$$= \frac{12}{2}\left[(-0.25 \cdot 0.25) + (0.0833 \cdot 0.4167) + \frac{0.1}{12}\right] = -0.5333 \ (0.25P)$$

$$K_{13} = K_{31} = \frac{\det(M_{[2]})}{2}\left[(B_1B_3) + (C_1C_3) - \frac{Q_c}{12}\right]$$

$$= \frac{12}{2}\left[(-0.25 \cdot 0) + (0.0833 \cdot 0.3333) + \frac{0.1}{12}\right] = -0.2167 \ (0.25P)$$

$$K_{23} = K_{32} = \frac{\det(M_{[2]})}{2}\left[(B_2B_3) + (C_2C_3) - \frac{Q_c}{12}\right]$$

$$= \frac{12}{2}\left[(0.25 \cdot 0) + (-0.4167 \cdot 0.3333) + \frac{0.1}{12}\right] = -0.7833 \ (0.25P)$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = -\frac{\det(M_{[2]})}{2}\left(\frac{F_c}{3}\right) = -\frac{12}{2}\left(\frac{-10.25}{3}\right) = 20.5 \quad (0.25P)$$

Les équations de l'élément [1]

$$\begin{bmatrix} 0.5167 & -0.5333 & 0.2167 \\ -0.5333 & 1.5167 & -0.7833 \\ 0.2167 & -0.7833 & 0.7667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(2)} \\ u^{(3)} \\ u^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.5 \\ 20.5 \\ 20.5 \end{bmatrix} \ (0.25P)$$

Assemblage des équations

$$\begin{bmatrix} k_{33}^{[1]} & k_{31}^{[1]} & 0 & k_{32}^{[1]} \\ k_{13}^{[1]} & k_{11}^{[1]}+k_{11}^{[2]} & k_{12}^{[2]} & k_{12}^{[1]}+k_{13}^{[2]} \\ 0 & k_{21}^{[2]} & k_{22}^{[2]} & k_{23}^{[2]} \\ k_{23}^{[1]} & k_{21}^{[1]}+k_{31}^{[2]} & k_{32}^{[2]} & k_{22}^{[1]}+k_{33}^{[2]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \\ u^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_3^{[1]} \\ b_1^{[1]}+b_1^{[2]} \\ b_2^{[2]} \\ b_2^{[1]}+b_3^{[2]} \end{bmatrix} \quad (1P)$$

$$\begin{bmatrix} 1.1863 & -0.3633 & 0 & 0.0714 \\ -0.3633 & 1.7682 & -0.5333 & 0.2229 \\ 0 & -0.5333 & 1.5167 & -0.7833 \\ 0.0714 & 0.2229 & -0.7833 & 1.5834 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \\ u^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35.778 \\ 56.278 \\ 20.5 \\ 56.278 \end{bmatrix} \quad (1P)$$

Solution de la partie annulée de l'exercice 1

Application des conditions aux limites

$$1.1863\,u^{(1)} - 0.3633\,u^{(2)} + 0u^{(3)} + 0.0714\,u^{(4)} = 35.778$$

$$-0.3633\,u^{(1)} + 1.7682\,u^{(2)} - 0.5333\,u^{(3)} + 0.2229\,u^{(4)} = 56.278$$

La substitution de la valeur de $u^{(3)}$ et $u^{(4)}$ donne :

$$1.1863\,u^{(1)} - 0.3633\,u^{(2)} = 28.638$$

$$-0.3633\,u^{(1)} + 1.7682\,u^{(2)} = 87.318$$

Résolution du système d'équations linéaire

$$[Eq1]: 1.1863\,u^{(1)} - 0.3633\,u^{(2)} = 28.638$$

$$\left[Eq2 + \left(\frac{0.3633}{1.1863}\right)Eq1\right]: 0u^{(1)} + 1.6569\,u^{(2)} = 96.0883$$

$$Eq2 \Rightarrow u^{(2)} = 57.9928$$

La substitution de $u^{(2)}$ dans l'Eq1 donne

$$u^{(1)} = 41.9007$$

Exercice 2

Formulation mathématique du problème (1.5p)

Le transformateur fonctionne à vide donc à partir de t ≥ 0 sec la variation du courant en fonction du temps est régit par l'équation différentiel ordinaire :

$$L\frac{di_1(t)}{dt} + Ri_1(t) = E(t) \qquad \frac{di_1(t)}{dt} = \frac{1}{L}E(t) - \frac{R}{L}i_1(t) \qquad \frac{di_1(t)}{dt} = \frac{24}{50\cdot 10^{-3}} - \frac{5}{50\cdot 10^{-3}}i_1(t)$$

$$\frac{di_1(t)}{dt} = -100i_1(t) + 480$$

Dans notre cas le problème de **Cauchy** s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} i_1(t) = -100i_1(t) + 480 \\ i_1(0) = 0 \end{cases}$$

Résolution du problème par la méthode de RK4

$f(t_i, w_i) = -100w_i + 480$

k	*t (sec)*	*k1*	*k2*	*k3*	*k4*	i_1 *(A)*	
0	0.00	-	-	-	-	0.000	
1	0.01	4.800	2.400	3.600	1.200	3.000	(1.5p)
2	0.02	1.800	0.900	1.350	0.450	4.125	(1.5p)
3	0.03	0.675	0.338	0.506	0.169	4.547	(1.5p)
4	0.04	0.253	0.127	0.190	0.063	4.705	(1.5p)
5	0.05	0.095	0.047	0.071	0.024	4.764	(1.5p)

Courbe du courant i_1 en fonction du temps *t* (1p)