



Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès.
Faculté des Sciences de l'Ingénieur.
2^{ème} Année L.M.D. Sciences & Techniques.



EXAMEN DE T.D. (2 Heures).

Semestre 4 : Fonctions Complexes à Une Variable Complexe.

Exercice ①

Dire si la fonction suivante est harmonique ;

$$f(x, y) = e^{x^2-y^2} \sin(2xy).$$

SOLUTION :

Calculons le laplacien de f ,

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = (2x \sin(2xy) + 2y \cos(2xy)) e^{x^2-y^2}, \\ f''_{x^2}(x, y) = ((4x^2 - 4y^2 + 2) \sin(2xy) + 8xy \cos(2xy)) e^{x^2-y^2}. \\ f'_y(x, y) = (-2y \sin(2xy) + 2x \cos(2xy)) e^{x^2-y^2}, \\ f''_{y^2}(x, y) = ((-4x^2 + 4y^2 - 2) \sin(2xy) - 8xy \cos(2xy)) e^{x^2-y^2}. \end{cases}$$

Finalement, $\Delta f(x, y) = f''_{x^2}(x, y) + f''_{y^2}(x, y) = 0$, f est donc harmonique dans \mathbb{R}^2 .

Exercice ②

Dire si la fonction suivante est dérivable de \mathbb{C} dans \mathbb{C} ? ($z = x + iy$ où x et y sont deux réels).

$$f(z) = (2x^2 - 3x - 3iy) + i(4xy + 2iy^2).$$

SOLUTION :

$f(z) = (2x^2 - 3x - 3iy) + i(4xy + 2iy^2) = (2x^2 - 3x - 2y^2) + i(4xy - 3y) = P(x, y) + iQ(x, y)$.
 f dérivable nécessite que P et Q vérifient les deux conditions de Cauchy-Riemann ; soit

$$\begin{cases} P'_x(x, y) = Q'_y(x, y), \\ P'_y(x, y) = -Q'_x(x, y). \end{cases}$$

Or on a, $P'_x(x, y) = (2x^2 - 3x - 2y^2)'_x = 4x - 3$, et $Q'_y(x, y) = (4xy - 3y)'_y = 4x - 3$,
et on a aussi, $P'_y(x, y) = (2x^2 - 3x - 2y^2)'_y = -4y$, et $Q'_x(x, y) = (4xy - 3y)'_x = 4y$,
les deux conditions étant vérifiées, f est dérivable dans \mathbb{C} .

(Remarque : $f(z) = 2z^2 - 3z$).

Exercice 3

Calculer les nombres suivants ; (chaque nombre sera donné sous la forme $\alpha + i\beta$ où α et β sont des réels.).

$$1. A = e^{2-i\log 5} \quad 2. B = \log(2+7i) \quad 3. C = \sin(2-3i).$$

SOLUTION :

$$\begin{aligned} 1. A &= e^{2-i\log 5} = e^2 \cdot e^{-i\log 5} = e^2 \left(\cos(-\log 5) + i \sin(-\log 5) \right) \\ &= e^2 \left(\cos(\log 5) - i \sin(\log 5) \right) = e^2 \left(\cos(\log 5) \right) - i e^2 \left(\sin(\log 5) \right) \\ 2. B &= \log(2+7i) = \log|2+7i| + i \operatorname{Arg}(2+7i) = \log \sqrt{4+49} + i \left(\operatorname{Arctg} \frac{7}{2} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \log \sqrt{53} + i \left(\operatorname{Arctg} \frac{7}{2} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \\ 3. C &= \sin(2-3i) = C = \sin 2 \cos(3i) - \cos 2 \sin(3i) = \sin 2 \operatorname{ch} 3 - i \cos 2 \operatorname{sh} 3. \end{aligned}$$

Exercice 4

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$1. \sin z = 3, \quad 2. \log z = i.$$

SOLUTION :

$$1. \sin z = 3 \iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3 \iff e^{iz} - e^{-iz} = 6i, \text{ posons } e^{iz} = t \neq 0, \text{ on a } t^2 - 6it - 1 = 0;$$

comme $\Delta' = -8 = (2i\sqrt{2})^2 \neq 0$, donc deux solutions distinctes ;

$$\begin{cases} t_1 = (3 + 2\sqrt{2})i, \\ t_2 = (3 - 2\sqrt{2})i. \end{cases}$$

1^{ère} solution, $t_1 = (3 + 2\sqrt{2})i$, on a donc,

$$\begin{aligned} e^{iz_1} &= (3 + 2\sqrt{2})i \iff iz_1 = \log(3 + 2\sqrt{2})i = \log|(3 + 2\sqrt{2})i| + i \operatorname{Arg}((3 + 2\sqrt{2})i) \\ &= \log(3 + 2\sqrt{2}) + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right); \text{ où } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\text{Finalement, } z_1 = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) - i \log(3 + 2\sqrt{2}) = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) + i \log(3 - 2\sqrt{2}); \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

2^{ème} solution, $t_2 = (3 - 2\sqrt{2})i$, on a donc,

$$\begin{aligned} e^{iz_2} &= (3 - 2\sqrt{2})i \iff iz_2 = \log(3 - 2\sqrt{2})i = \log|(3 - 2\sqrt{2})i| + i \operatorname{Arg}((3 - 2\sqrt{2})i) \\ &= \log(3 - 2\sqrt{2}) + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right); \text{ où } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\text{Finalement, } z_2 = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) - i \log(3 - 2\sqrt{2}) = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) + i \log(3 + 2\sqrt{2}); \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

$$2. \log z = i \iff \log|z| + i \operatorname{Arg} z = i \iff \begin{cases} \log|z| = 0, \\ \operatorname{Arg} z = 1. \end{cases} \iff \begin{cases} |z| = 1, \\ \operatorname{Arg} z = 1. \end{cases}$$

Finalement,

$$z = \cos 1 + i \sin 1.$$

(Remarque : On pouvait écrire aussi que, $\log z = i \implies z = e^i = \cos 1 + i \sin 1$.)

Exercice 5

Démontrer la formule suivante ;

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

SOLUTION :

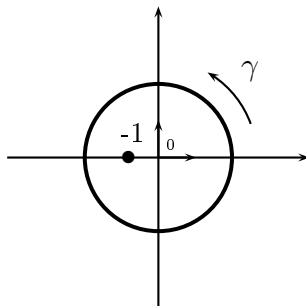
$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{4} (e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}) + \frac{1}{4} (e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}) = 1 \end{aligned}$$

Exercice 6

Calculer l'intégrale suivante ;

$$\int_{\gamma} \frac{(z-1)^2 \cos 2z \, dz}{(z+1)^2(z+5)} \quad \text{où} \quad \gamma(t) = 2e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

SOLUTION :



La fonction à intégrer possède deux singularités, (-1) et (-5). Seul le point $z_0 = -1$ est à l'intérieur du lacet γ ; posons alors $f(z) = \frac{(z-1)^2 \cos 2z}{(z+5)}$, qui est dérivable à l'intérieur de γ . On a donc,

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) \, dz}{(z+1)^2} = 2\pi i \mathcal{J}(-1, \gamma) \frac{f'(-1)}{1!}.$$

Comme $t \in [0, 2\pi]$, on fait alors un seul tour autour de $z_0 = -1$, d'où $\mathcal{J}(-1, \gamma) = 1$.

La dérivée de f est alors,

$$f'(z) = \frac{(z-1)((z+11) \cos z - (z-1)(z+5) \sin z)}{(z+5)^2}$$

$$f'(-1) = -\frac{5 \cos 1 + \sin 1}{4}, \text{ et finalement,}$$

$$\int_{\gamma} \frac{(z-1)^2 \cos 2z \, dz}{(z+1)^2(z+5)} = -\frac{\pi i}{2} (5 \cos 1 + \sin 1)$$

Exercice 7

Donner le développement en série de Laurent de : $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-1)}$, dans l'ensemble ;

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C}, / |z| < 1\}.$$

SOLUTION :

Deux méthodes sont possibles, citons en premier la meilleure.

1^{ère} méthode :

$$\text{On a } f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-1)} = \frac{-1}{1-z^2} = (-1) \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -z^{2n}, \text{ où } |z^2| < 1 \iff z \in \mathcal{A}.$$

2^{ème} méthode :

Une décomposition de f en éléments simples donne,

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-1)} = \frac{-1/2}{1-z} + \frac{-1/2}{1+z} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n, z \in \mathcal{A}.$$

Finalement pour $z \in \mathcal{A}$;

$$f(z) = -\frac{1}{2}(1+z+z^2+z^3+\dots) - \frac{1}{2}(1-z+z^2-z^3+\dots) = -(1+z^2+z^4+\dots) = \sum_{n=0}^{\infty} -z^{2n}.$$