CHAPITRE IV

REGIME VARIABLE

Equations de Maxwell

I. PRINCIPE DE CONSERVATION DE LA CHARGE : (Régime variable)

Supposons une surface fermée comprenant une charge q à l'intérieur, et un courant I sortant.

Principe de conservation de la charge :

Courant sortant de $S \Leftrightarrow$ diminution de q dans S;

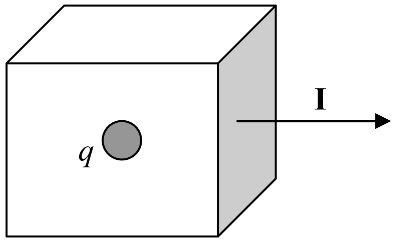

Figure 1 : Surface fermée S

d'où $I = -\dfrac{dq}{dt}$;

Comme $I = \oint \boldsymbol{J.dS} \quad \Rightarrow \oint \boldsymbol{J.dS} = -\dfrac{dq}{dt}$

vu que (théorème de Gauss) $\oint \boldsymbol{E.dS} = \dfrac{q}{\varepsilon} \Rightarrow q = \varepsilon \oint \boldsymbol{E.dS}$

donc $\oint \boldsymbol{J.dS} = -\dfrac{d}{dt}\left(\varepsilon \oint \boldsymbol{E.dS}\right)$

soit $\oint \boldsymbol{J.dS} + \oint \varepsilon \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\boldsymbol{.dS} = 0$

ou bien $\oint \left(\boldsymbol{J} + \varepsilon \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)\boldsymbol{.dS} = 0$

Cette expression représente l'équation de conservation de la charge.

1. Forme intégrale

$\oint \left(\boldsymbol{J} + \varepsilon \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)\boldsymbol{.dS} = 0$ est la forme intégrale de l'équation de conservation de la charge.

2. Forme différentielle

L'intégrale de surface fermée $\oint \left(\boldsymbol{J} + \varepsilon \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)\boldsymbol{dS}$ peut être transposée en une intégrale de volume

$$\oint \left(\boldsymbol{J} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)\boldsymbol{.dS} = \int_V div \left(\boldsymbol{J} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) dv = 0$$

Par conséquent, $div\left(\boldsymbol{J} + \varepsilon \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) dv = 0$

ou bien autrement, sachant que $div\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$:

$div\boldsymbol{J} + \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t}\left(div\boldsymbol{E}\right) = 0$;

On déduit alors : $div\boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Remarque **:**

Les termes $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ et $\frac{\partial E}{\partial t}$ ne sont considérés que dans le cas du régime variable, ils sont négligeables dans les autres régimes. C'est-à-dire que :

en RS et RQS : $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$ et $\frac{\partial E}{\partial t} \approx 0$ (négligeables)

Donc, l'équation d conservation de la charge dans ces cas devient : $\oint \boldsymbol{J.dS}=0$ ou $div\boldsymbol{J}=0$

Remarque :

La conservation de la charge est respectée, car lorsqu'un électron sort par la borne négative, il prend la place d'un électron libre dans la matière qui relie les deux bornes (car les bornes doivent être reliées par un conducteur pour que le courant circule), l'électron ainsi chassé va voler à son tour la place d'un électron situé un peu plus proche de la borne positive, et ainsi de suite jusqu'à la borne positive, dans laquelle le dernier électron de la 'chaîne' va rentrer.

Donc, lorsqu'un électron sort de la borne négative, au même moment, un électron rentre dans la borne positive. La batterie ainsi que le conducteur ne se sont donc pas chargés, ils sont toujours neutres, bien que le courant circule !

II. LOI DE MAXWELL-AMPERE

D'après le théorème d'Ampère $rot\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$.

On peut écrire :

$rot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \Rightarrow div(rot\boldsymbol{H}) = div\boldsymbol{J}$

Comme *div rot =0*, on obtient :

$div\boldsymbol{J}=\boldsymbol{0}$

Mais en régime variable nous avons $div\boldsymbol{J}=-\frac{\partial \rho}{\partial t}$ et non pas $div\boldsymbol{J}=\boldsymbol{0}$!

Par conséquent, le théorème d'Ampère $rot\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$ n'est plus valable dans le régime variable.

- Question : que devient le théorème d'Ampère dans ce cas ?
- Réponse :

Nous connaissons que (en R.S et R.Q.S) :

$div\boldsymbol{J} = 0 \Leftrightarrow rot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ (1)

Par analogie en régime variable nous pouvons poser :

$$div\left(\boldsymbol{J} + \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = 0 \Leftrightarrow rot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- Conclusion : Maxwell a transformé le théorème d'Ampère en régime variable et a ajouté le terme $\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$. Le théorème d'Ampère devient dans ce cas : $rot\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ (forme différentielle)

Forme intégrale :

$$rot\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \Rightarrow \int_S rot\boldsymbol{H.dS}=\int_S\left(\boldsymbol{J}+\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\boldsymbol{dS}$$

L'intégrale de surface $\int_S rot\boldsymbol{H.dS}$ peut être transposée en une intégrale linéique fermée :

$$\int_S rot\boldsymbol{H.dS}=\oint \boldsymbol{H.dl}$$

On arrive alors à l'expression différentielle suivante :

$$\oint \boldsymbol{H.dl} = \int_S\left(\boldsymbol{J} + \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\boldsymbol{.dS}$$ (Forme intégrale)

III. EQUATIONS DE MAXWELL

Maxwell a établi quatre équations fondamentales de l'électromagnétisme et qui sont :

1. Equation de Maxwell-Gauss (MG) :

Forme intégrale : $\oint \boldsymbol{E.dS} = \frac{q}{\varepsilon}$

Le flux électrique passant à travers une surface fermée est égal au rapport $\frac{q}{\varepsilon}$.

Forme différentielle : $div\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$

C'est la charge électrique qui est à l'origine (source) du champ électrique.

2. Equation de Maxwell-flux magnétique (MΦ) :

Forme intégrale : $\oint \boldsymbol{B.dS} = 0$

Le flux magnétique passant à travers une surface fermée est nul.

Forme différentielle : $div\boldsymbol{B}=0$

Par analogie avec l'équation MG, il n'existe pas de "charge magnétique" dans la nature.

3. Equation de Maxwell-Faraday (MF) :

Forme intégrale : $\oint \boldsymbol{E.dl} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{B.dS}$

Un conducteur traversé par un flux magnétique variable est le siège d'une f.e.m induite.

Forme différentielle : $rot\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

Un champ magnétique variable crée un champ électrique variable.

4. Equation de Maxwell-Ampère (MA) :

Forme intégrale : $\oint \boldsymbol{H.dl}=\boldsymbol{J}+\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$

Forme différentielle : $rot\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$

Un champ électrique variable ($\frac{\partial E}{\partial t}$) crée au même titre qu'un courant (J) un champ magnétique variable.

Remarques :

- Les équations de Maxwell sont valables dans les trois régimes.
- Pour obtenir les équations dans le régime stationnaire, il suffit de poser $\frac{\partial}{\partial t}=0$.
- Pour obtenir les équations dans le régime dépendant du temps (quasi-stationnaire), il suffit de poser : $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\approx 0$ et $\frac{\partial \rho}{\partial t}\approx 0$.
- Les équations de MA et MF montrent que les champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ sont liés entre eux $\Rightarrow$
C'est le champ électromagnétique.

EXERCICE

1. On considère dans le vide un champ électrique $\boldsymbol{E} = E_m \sin(\omega t - \beta z)\boldsymbol{u}_y$.

Déterminer le champ magnétique $\boldsymbol{H}$ associé à $\boldsymbol{E}$.

2. On considère dans le vide un champ magnétique $\boldsymbol{H} = H_m \exp j(\omega t + \beta z)\boldsymbol{u}_x$

Déterminer le champ électrique $\boldsymbol{E}$ associé à $\boldsymbol{H}$.

3. Que peut-on conclure ?

Solution :

1) M.A : $rot\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=-\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$

$$rot\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_x & \boldsymbol{u}_y & \boldsymbol{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_x & \boldsymbol{u}_y & \boldsymbol{u}_z \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & E_y & 0 \end{bmatrix}=\boldsymbol{u}_x\left(-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)$$

Soit $rot\boldsymbol{E} = \beta E_m \cos(\omega t - \beta z)\boldsymbol{u}_x + 0 = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \Rightarrow$

d'où $\boldsymbol{H} = -\frac{\beta E_m}{\mu_0}\int \cos(\omega t - \beta z)dt\ \boldsymbol{u}_x = -\frac{\beta E_m}{\mu_0 \omega}\sin(\omega t - \beta z)\boldsymbol{u}_x + Cte$

2) $\boldsymbol{H} = H_m \exp j(\omega t + \beta z)\boldsymbol{u}_x$

M.A : $rot\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$

dans le vide : $\boldsymbol{J}=0$

d'où $rot\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$

soit $rot\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_x & \boldsymbol{u}_y & \boldsymbol{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & H_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_x & \boldsymbol{u}_y & \boldsymbol{u}_z \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ H_x & 0 & 0 \end{bmatrix}=\boldsymbol{u}_y\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)\Rightarrow$

$$rot\boldsymbol{H}=j\beta H_m exp\, j(\omega t+\beta z)\boldsymbol{u}_y=\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{j\beta H_m}{\varepsilon_0}\int exp\, j(\omega t+\beta z)dt\,\boldsymbol{u}_y=\frac{j\beta H_m}{\varepsilon_0}\frac{1}{j\omega}exp\, j(\omega t+\beta z)\boldsymbol{u}_y$$

Donc $\boldsymbol{E}=\frac{\beta H_m}{\varepsilon_0 \omega}exp\, j(\omega t+\beta z)\boldsymbol{u}_y+Cte$

3) On peut conclure que :

- Un champ électrique ***E*** variable crée un champ magnétique ***H*** variable ;
- Un champ magnétique ***H*** variable crée un champ électrique ***E*** variable ;
- $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{H}$.

IV. LOI D'OHM LOCALISEE

La loi d'Ohm localisée est exprimée par la relation suivante :

$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$

où σ conductivité électrique $(1/\Omega m)$

$\sigma=\frac{1}{\rho}$

avec ρ résistivité (Ωm)

<u>Exemples</u> :

- Cuivre : $\sigma=5,81.10^7\Omega^{-1}m^{-1}$; $\rho=1,7.10^{-8}\Omega m$
- Aluminium : $\sigma=3,54.10^7\Omega^{-1}m^{-1}$; $\rho=2,8.10^{-9}\Omega m$
- Silicium (semi-conducteur) : $\sigma=1,6..10^{-5}\Omega^{-1}m^{-1}$; $\rho=6,25.10^3\Omega m$
- Verre : $\sigma\approx.10^{-12}\Omega^{-1}m^{-1}$; $\rho\approx.10^{12}\Omega m$

Démonstration :
Soit un conducteur cylindrique de section S et de longueur L, soumis à une tension U

La loi d'Ohm généralisée s'écrit comme suit :
$U=RI$ (1)
R : résistance du conducteur

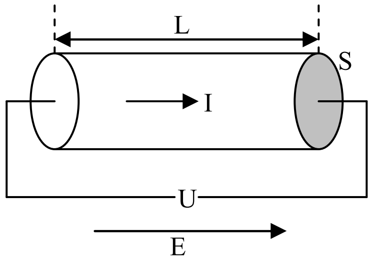

Figure 2

Comme
$R=\int\frac{\rho}{S}dl$, $I=\int JdS$, et $U=\int Edl$
nous obtenons en substituant dans l'équation 1 :
$$\int Edl=\int\frac{\rho}{S}dl\int JdS\Rightarrow E=\frac{\rho}{S}J$$
Soit $J=\frac{E}{\rho}$
Ou bien $J=\sigma E$

Cette égalité est également valable en notation vectorielle : $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$

V. CONDITIONS LIMITES

Soient deux milieux diélectriques différents (air et verre par exemple) séparés par une interface –frontière fictive de séparation- située dans le plan YOZ par exemple.

Question : Que devient le champ électromagnétique quant il passe d'un milieu à un autre ?

Posons $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_t} + \boldsymbol{E_n}$
E_t: composante tangentielle par rapport à la surface de séparation (plan YOZ).
E_n: composante perpendiculaire par rapport à la surface de séparation.

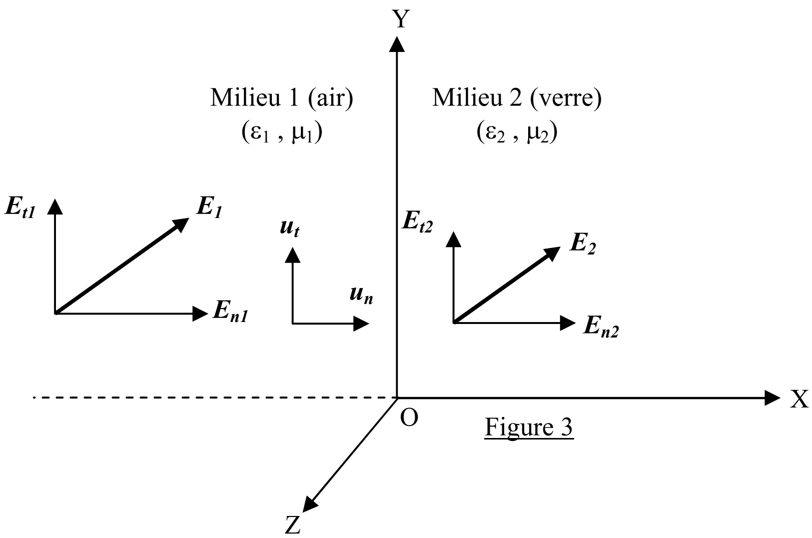

Figure 3

1. CHAMP ELECTRIQUE

a) Composantes tangentielles :
La forme intégrale de l'équation de MF est :
$$\oint \boldsymbol{E.dl}=-\frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{B.dS}$$

Le contour fermé considéré est un rectangle ABCD situé de part et d'autre de la frontière.
$$\oint \boldsymbol{E.dl} = \int_{ABCDA} \boldsymbol{E.dl} = \boldsymbol{E_{n1}}.DN + E_{n2}.NC + E_{t2}.CB + E_{n2}.BM + E_{n1}.MA + E_{t1}.AD$$

Etant donné qu'on veut étudier le champ à la frontière des deux matériaux, c'est-à-dire les conditions limites du champ électrique, on pose :
$\boldsymbol{AM=MB=DN=NC\approx 0}$,

On obtient alors :

$$\int_{ABCDA} \boldsymbol{E.dl} = \boldsymbol{E_{t2}.CB} + \boldsymbol{E_{t1}.AD} = \boldsymbol{CB}\left(\boldsymbol{E_{t2}} - \boldsymbol{E_{t1}}\right),$$

Par ailleurs, vu que :
$AB \approx 0$, donc $S = ABxBC \approx 0$

On déduit que :

$$-\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.\boldsymbol{dS} \approx 0$$

En outre sachant que :
AD=-CB
on arrive à

$$\int_{ABCDA} \boldsymbol{E.dl} = \boldsymbol{CB}\left(\boldsymbol{E_{t2}} - \boldsymbol{E_{t1}}\right) = 0$$

Soit donc $\boxed{\boldsymbol{E_{t2}} = \boldsymbol{E_{t1}}}$

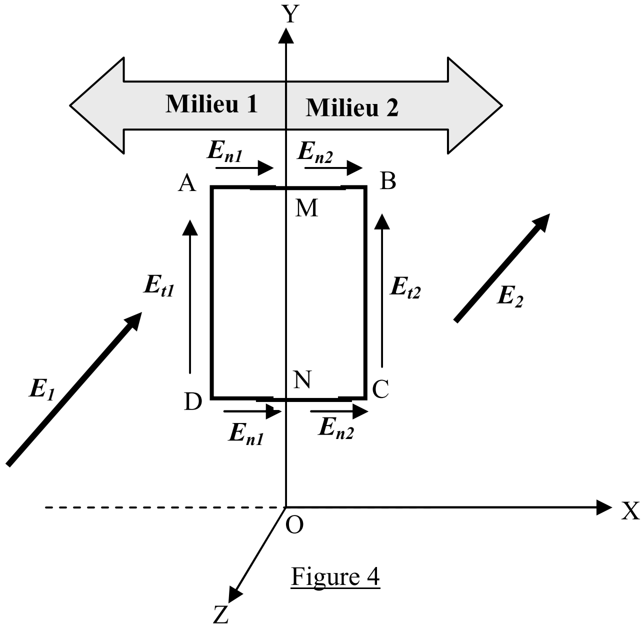

Figure 4

Conclusion : les composantes tangentielles du champ électrique sont égales.

b) Composantes normales :
La forme intégrale de l'équation de MG est :

$$\oint \boldsymbol{E.dS} = \frac{q}{\varepsilon}$$

On considère comme surface fermée un cylindre de longueur L.

$$\oint \boldsymbol{E.dS} = \frac{q}{\varepsilon} \Rightarrow \oint \varepsilon \boldsymbol{E.dS} = q \Rightarrow \oint \boldsymbol{D.dS} = q$$

Soit $\oint \boldsymbol{D.dS} = \int \boldsymbol{D_{n1}.dS_1} + \int \boldsymbol{D_{n2}.dS_2} + \int \boldsymbol{D_{n3}.dS_3}$

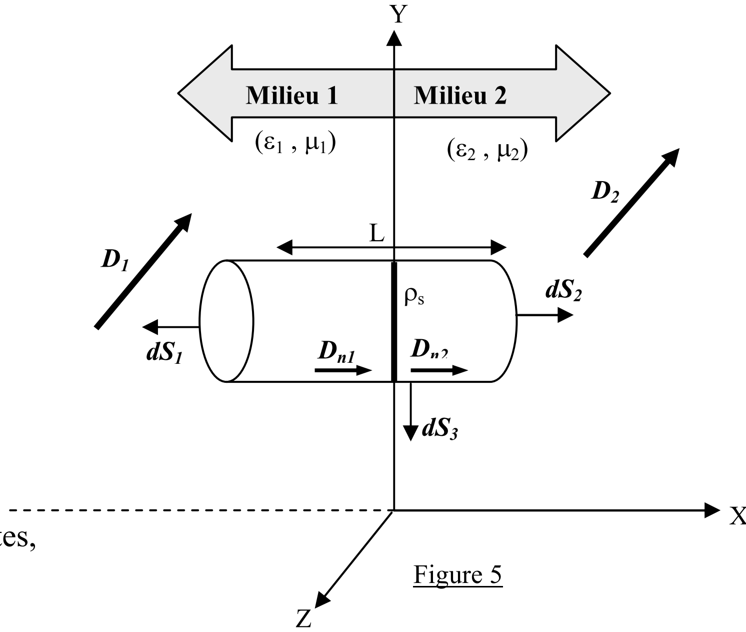

Figure 5

On suppose le cas général où la surface de séparation porte une charge $q = \rho_s S$.

Par ailleurs, vu que l'on étudie les conditions limites, on pose alors $L \approx 0$, soit donc $S_3 \approx 0$.

D'où :

$$\oint \boldsymbol{D.dS} = \int \boldsymbol{D_{n1}.dS_1} + \int \boldsymbol{D_{n2}.dS_2} = -D_{n1} S_1 + D_{n2} S_2$$

Comme $S_1 = S_2 = S$:

$$\oint \boldsymbol{D.dS} = S\left[D_{n2} - D_{n1}\right] = \rho_s S$$

Soit donc $D_{n2} - D_{n1} = \rho_s$

Si $\rho_s = 0$ qui est le cas le plus fréquent, on aboutit alors à : $\boxed{D_{n2} = D_{n1}}$

Ou bien $\varepsilon_2 E_{n2} = \varepsilon_1 E_{n1} \Rightarrow E_{n2} = E_{n1} \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

2. CHAMP MAGNETIQUE

a) Composantes perpendiculaires :

La forme intégrale de l'équation de MΦ est :

$$\oint \boldsymbol{B.dS}=0$$

Considérons comme pour le cas précédent une surface cylindrique de longueur L.

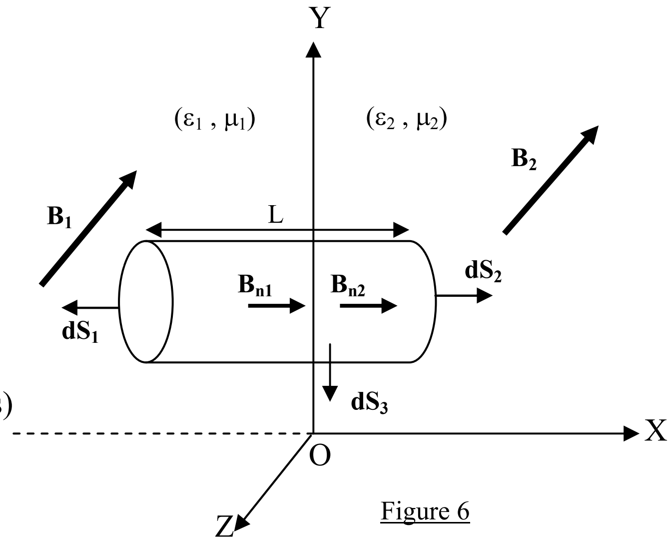

Figure 6

L'application de cette équation à cette surface donne :

$$\oint \boldsymbol{B.dS} = \int \boldsymbol{B}_{n1}.\boldsymbol{dS}_1 + \int \boldsymbol{B}_{n2}.\boldsymbol{dS}_2 + \int \boldsymbol{B}_{n3}.\boldsymbol{dS}_3 = 0$$

À la frontière entre les deux milieux (conditions limites) on doit poser :

$L \approx 0$, soit donc $S_3 \approx 0$.

On obtient alors :

$$\oint \boldsymbol{B.dS} = \int \boldsymbol{B}_{n1}.\boldsymbol{dS}_1 + \int \boldsymbol{B}_{n2}.\boldsymbol{dS}_2 = -B_{n1}\ S_1 + B_{n2}\ S_2 = 0$$

Comme $S_1=S_2=S$:

$S(B_{n2}-B_{n1})=0$

Soit $B_{n2}=B_{n1}$

Ou bien : $\mu_2 H_{n2} = \mu_1 H_{n1} \Rightarrow H_{n2} = H_{n1}\dfrac{\mu_1}{\mu_2}$

<u>Conclusion</u> : les composantes perpendiculaires de l'induction B sont égales.

b) Composantes tangentielles

La forme intégrale de l'équation de MA est :

$$\oint \boldsymbol{H.dl}=\int \boldsymbol{J.dS}+\int \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.\boldsymbol{dS}$$

Choisissons comme contour fermé un cadre ABCD situé de part et d'autre de la frontière entre les deux milieux.

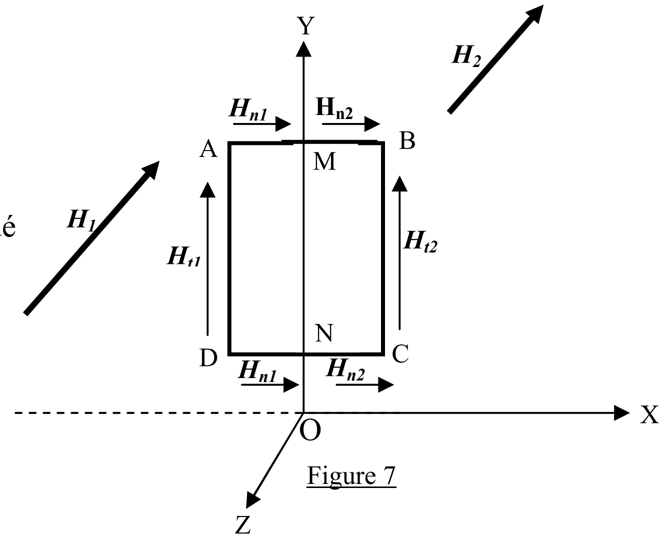

Figure 7

L'application de l'équation de M.A à ce cadre donne :

$$\oint \boldsymbol{H.dl}= \int_{ABCDA} \boldsymbol{H.dl}=\boldsymbol{H}_{n1}.\boldsymbol{DN}+\boldsymbol{H}_{n2}.\boldsymbol{NC}+\boldsymbol{H}_{t2}.\boldsymbol{CB}+\boldsymbol{H}_{n2}.\boldsymbol{BM}+\boldsymbol{H}_{n1}.\boldsymbol{MA}+\boldsymbol{H}_{t1}.\boldsymbol{AD}$$

A la frontière entre les deux milieux (conditions limites), on doit poser :

$\boldsymbol{AM}=\boldsymbol{MB}=\boldsymbol{DN}=\boldsymbol{NC}\approx 0$.

On obtient alors :

$$\oint \boldsymbol{H.dl}=\boldsymbol{H}_{t2}.\boldsymbol{CB}+\boldsymbol{H}_{t1}.\boldsymbol{AD}$$

Par ailleurs, vu que :

$\boldsymbol{AD}=-\boldsymbol{CB}$

On peut écrire:

$\oint \boldsymbol{H.dl} = \boldsymbol{CB.(H_{t2} - H_{t1})}$ (1)

D'autre part, comme $\boldsymbol{AB} \approx 0$,

$\Rightarrow \; S = ABxBC \approx 0 \Rightarrow \; \varepsilon \int \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.\boldsymbol{dS} \approx 0$

Calculons maintenant $\int \boldsymbol{J.dS}$.

On considérera le cas général où la surface de séparation entre les deux milieux est une nappe de courant, quoi que ce cas est peu probable en pratique.

Courant volumique: le courant I circule dans un conducteur volumique de section S (figure 8).
La densité de courant dans ce cas est :

$J_s = \frac{I}{S}$

C'est une densité de courant surfacique.

Nappe de courant :
Le courant I circule dans une nappe (plan) de largeur L (figure 9).
La densité de courant dans ce cas est :

$J_l = \frac{I}{L}$

C'est une densité de courant linéique.

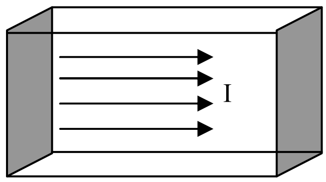

Figure 8 : Courant volumique

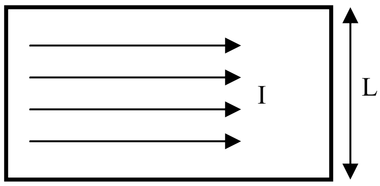

Figure 9 : Nappe de courant

Par conséquent

$I = J_l \, L$

Dans le cas donc où un courant surfacique circule dans la surface de séparation, le courant qui passe à travers le cadre ABCD est :

$I = J_n \, BC$

On ne considère que la partie du courant traversant le cadre, c'est-à-dire la composante perpendiculaire au cadre. Cette condition est dictée par le théorème d'Ampère lui même.

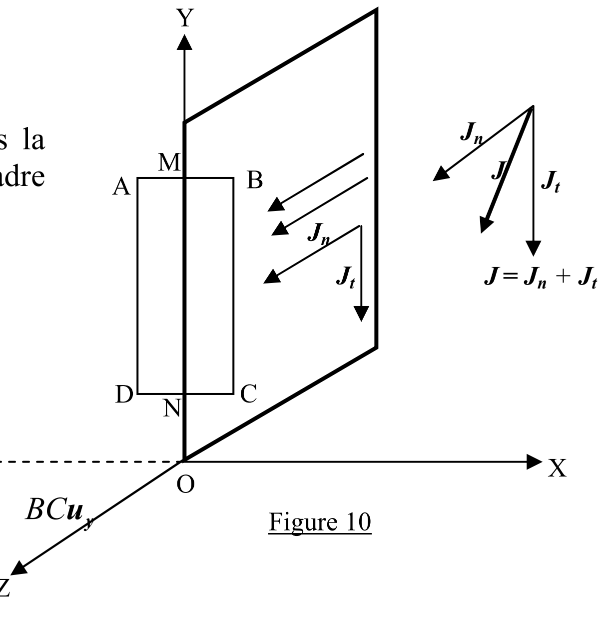

Figure 10

Comme $J_n = J_z$ et que $J_z = \boldsymbol{J.u_z}$, on obtient ce qui suit :

$I = (\boldsymbol{J.u_z})BC = \boldsymbol{J}.(\boldsymbol{u_x} \wedge \boldsymbol{u_y})BC = \boldsymbol{u_y}.(\boldsymbol{J} \wedge \boldsymbol{u_x})BC = (\boldsymbol{J} \wedge \boldsymbol{u_x}). \quad BC\boldsymbol{u_y}$

soit $I = (\boldsymbol{J} \wedge \boldsymbol{u_x}). \quad \boldsymbol{CB}$ (2).

En établissant l'égalité des équations (1) et (2), on obtient :

$CB. \quad (\boldsymbol{H_{t2}} - \boldsymbol{H_{t1}}) = CB. \quad (\boldsymbol{J} \wedge \boldsymbol{u_x})$

Soit $\boldsymbol{H}_{t2} - \boldsymbol{H}_{t1} = \boldsymbol{J} \wedge \boldsymbol{u}_x$

En posant $\boldsymbol{n}_{12}$ comme étant le vecteur unitaire dirigé du milieu 1 vers le milieu 2, on arrive à :

$$\boxed{\boldsymbol{H}_{t2} - \boldsymbol{H}_{t1} = \boldsymbol{J} \wedge \boldsymbol{n}_{12}}$$

RESUME :

$E_{t2} = E_{t1}$;

$\varepsilon_2 E_{n2} - \varepsilon_1 E_{n1} = \rho_s$ (en général $\rho_s = 0$) ;

$\mu_2 H_{n2} = \mu_1 H_{n1}$;

$\boldsymbol{H}_{t2} - \boldsymbol{H}_{t1} = \boldsymbol{J} \wedge \boldsymbol{n}_{12}$ (en général $J = 0$).

EXERCICE

Soient deux milieux isolants différents. La surface de séparation entre les deux milieux est située dans le plan XOY.

On donne $\boldsymbol{B}_1 = 1{,}2\boldsymbol{u}_x + 0{,}8\boldsymbol{u}_y + 0{,}4\boldsymbol{u}_z$.

Déterminer l'induction $\boldsymbol{B_2}$ régnant dans le milieu 2.

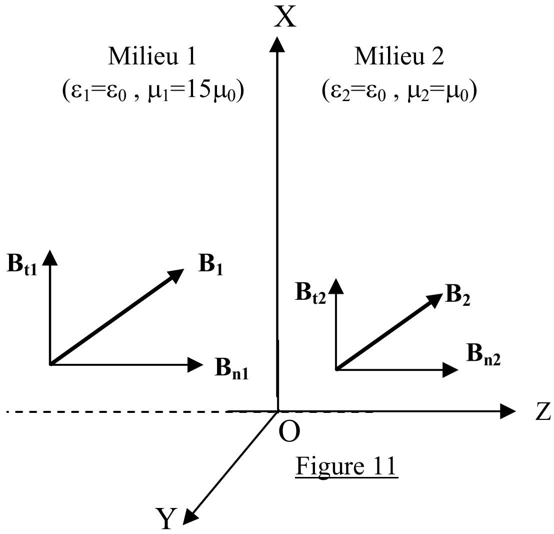

Figure 11

Solution :

$\boldsymbol{B_1} = 1{,}2\boldsymbol{u}_x + 0{,}8\boldsymbol{u}_y + 0{,}4\boldsymbol{u}_z \Rightarrow$

$$\boldsymbol{H_1} = \frac{\boldsymbol{B_1}}{\mu_1} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1{,}2}{15}\boldsymbol{u}_x + \frac{0{,}8}{15}\boldsymbol{u}_y + \frac{0{,}4}{15}\boldsymbol{u}_z\right)$$

soit $\boldsymbol{H_1} = \dfrac{1}{\mu_0}\left(0{,}08\boldsymbol{u}_x + 0{,}05\boldsymbol{u}_y + 0{,}03\boldsymbol{u}_z\right)$

D'autre part, nous avons $\boldsymbol{H}_{t2} - \boldsymbol{H}_{t1} = \boldsymbol{J} \wedge \boldsymbol{n}_{12}$

comme $\boldsymbol{J}=0$ on pose

$\boldsymbol{H}_{t2} = \boldsymbol{H}_{t1}$

Les composantes tangentielles sont : $\boldsymbol{u}_x$ et $\boldsymbol{u}_y$.

d'où $\boldsymbol{H}_{t2} = \boldsymbol{H}_{t1} = \dfrac{1}{\mu_0}(0{,}08\boldsymbol{u}_x + 0{,}05\boldsymbol{u}_y)$

et donc $\boldsymbol{B}_{t2} = \mu_2 \boldsymbol{H}_{t2} = \mu_0 \boldsymbol{H}_{t2} = 0{,}08\boldsymbol{u}_x + 0{,}05\boldsymbol{u}_y$

La composante normale étant suivant $\boldsymbol{u}_z$, alors :

$\boldsymbol{B}_{n1} = 0{,}4\boldsymbol{u}_z$

vu que $B_{n2} = B_{n1}$, il vient:

$\boldsymbol{B}_{n2} = 0{,}4\boldsymbol{u}_z$

d'où $\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{B}_{t2} + \boldsymbol{B}_{n2} = 0{,}08\boldsymbol{u}_x + 0{,}05\boldsymbol{u}_y + 0{,}4\boldsymbol{u}_z$