CHAPITRE V

PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE
ONDES ELECTROMAGNETIQUES

I. DESCRIPTION MATHEMATIQUE DE LA PROPAGATION

Considérons une fonction physique $\xi = f(x)$ représentée graphiquement par la courbe en trait plein, qui se propage dans le sens des x positifs. A la distance $x = x_0$, nous obtenons la fonction $\xi = f(x\text{-}x_0)$, la courbe a été déplacée vers la droite d'une quantité x_0.
de même $\xi = f(x+ x_0)$ correspond à un déplacement vers la gauche.

De toute évidence, la forme de la courbe n'a pas été modifiée ; les mêmes valeurs de ξ se retrouvent.

Si on pose $x = v\ t$, où v représente la vitesse de propagation de la courbe, on obtient une courbe « voyageuse » ; c'est à dire que $\xi = f(x\text{-}vt)$ représente une courbe se déplaçant vers la droite et $\xi = f(x+ vt)$ représente une courbe se déplaçant vers la gauche.

Nous concluons qu'une expression mathématique de la forme $\xi = f(x \pm vt)$ est suffisante pour décrire un phénomène physique qui se propage sans déformation, suivant le sens positif ou négatif de l'axe des x.

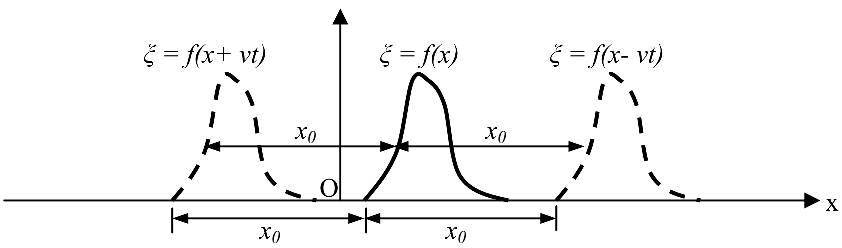


Figure 1 : Translation sans déformation de la fonction $\xi = f(x \pm vt)$

Fonction sinusoïdale :
Un cas spécialement intéressant est dans lequel $\xi = f(x,t)$ est une fonction sinusoïdale :
$\xi = f(x,t)= \xi_0 \sin \beta(x - vt)$.

En remplaçant x par $(x + 2\pi / \beta)$, on obtient la même valeur, soit :

$$\xi\left(x+\frac{2\pi}{\beta}-vt\right)=\xi_0 \sin\beta\left(x+\frac{2\pi}{\beta}-vt\right)=\xi_0 \sin[\beta(x-vt)+2\pi]=\xi(x-vt)$$

donc

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}$$

représente la « période dans l'espace », c'est à dire que la courbe se reproduit égale à elle même tous les λ, qui est appelée *longueur d'onde*. La quantité $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ représente alors le nombre de longueurs d'onde dans la distance 2π et est appelé *nombre d'onde*.

Par conséquent, on peut écrire :

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(\beta x - \omega t)$$

où

$$\omega = \beta v = \frac{2\pi v}{\lambda}$$

est la pulsation de l'onde.

Puisque

$$\omega = 2\pi f$$

on a la relation importante :

$$\lambda f = v.$$

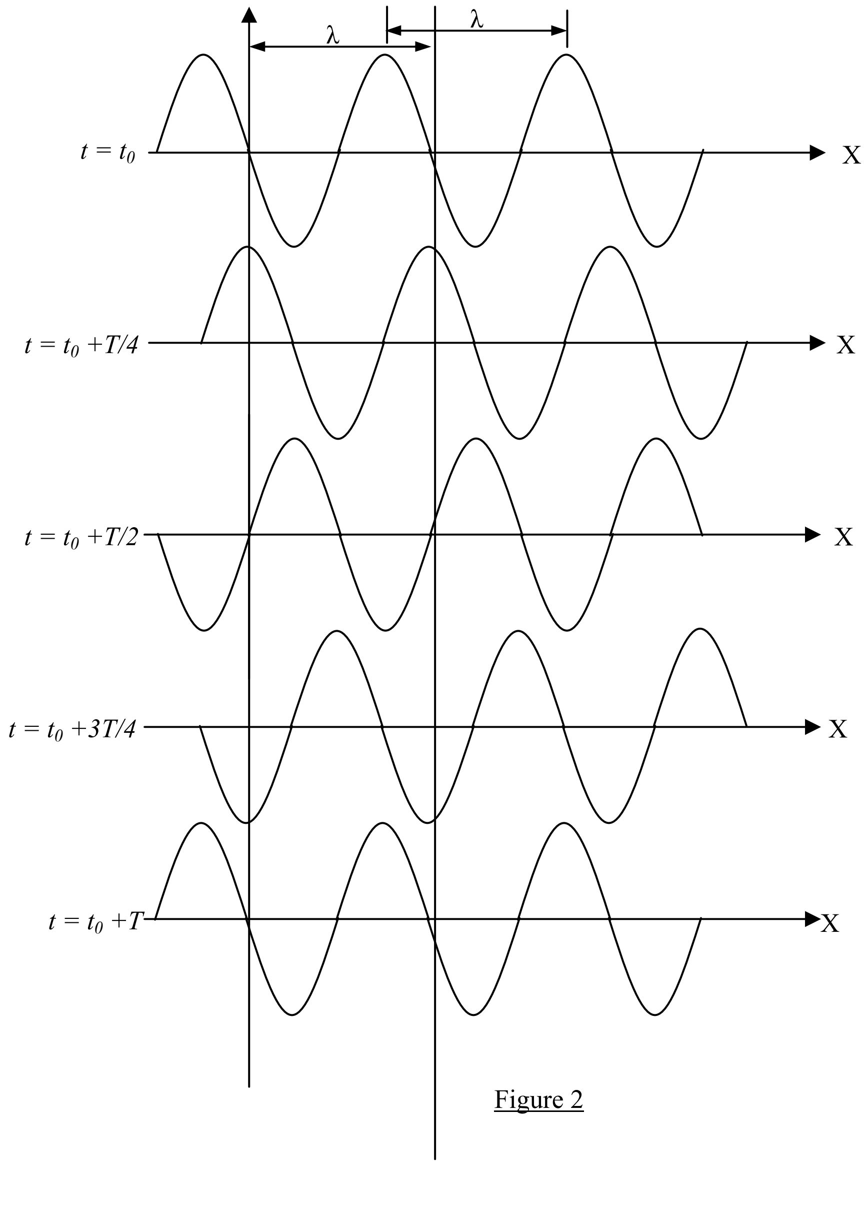


Figure 2

Nous pouvons remarquer que, tandis que la situation physique se propage vers la droite, elle se reproduit identique à elle même dans l'espace avec une période : la longueur d'onde λ est la distance que progresse l'onde en une période *T*.

On adonc deux périodes :
l'une dans le temps T et l'autre dans l'espace λ, liées par la relation
$\lambda = \frac{v}{f} = vT$.

EXERCICE
Montrer que l'expression d'une onde progressive $\xi = f(x \pm vt)$ peut s'écrire sous une autre forme $\xi = f(t + x/v)$.
$x \pm vt = \frac{v}{v}(x \pm vt) = v\left(\frac{x}{v} \pm t\right) = v\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$
donc $\xi(x \pm vt) \Leftrightarrow \xi\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$.
Par conséquent, pour l'onde sinusoïdale, on peut écrire :
$\xi(x,t) = \xi_0 \sin\beta(x \pm vt) = \xi_0 \sin\beta v\left(\frac{x}{v} \pm t\right)$
comme $\beta v = \omega$,
$\xi_0 \sin\beta(x \pm vt) = \xi_0 \sin\omega\left(t \pm \frac{x}{v}\right) = \xi_0 \sin(\omega t \pm \beta x)$

II. EQUATION DE PROPAGATION D'UNE ONDE QUELCONQUE
Exemple : Onde de vibration sur une corde.

Une vibration créée en "m" progresse vers "p" en gardant la même forme, il s'agit donc d'une onde progressive.

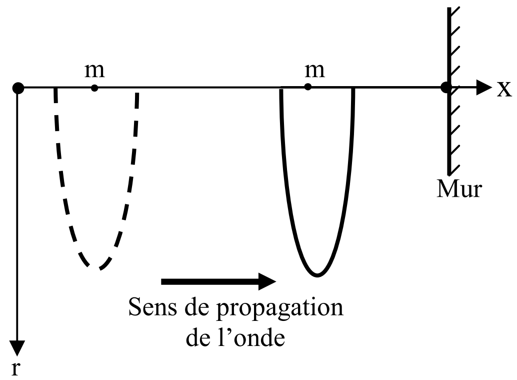


Figure 3

Si la propagation se fait vers les $x > 0$, on pose :
$r_p(t) = r_m(t - \tau)$
Propagation vers les x<0, on pose :
$r_p(t) = r_m(t + \tau)$

avec
$\tau = x/v$: retard ou temps de propagation ;

où
v : vitesse de propagation de l'onde.

1. Equation de propagation
On supposera une propagation vers les $x > 0$, on pose donc :
$r_p(t) = r_m(t - \tau)$

posons
$r_p(t) = f(t)$ et
$r_m(t - \tau) = f(t - \tau) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) = f(u)$

avec

$u=t-\frac{x}{v}$

Calculons les dérivées première et seconde de *r* par rapport au temps *t*

$$\frac{\partial r_m(t-\tau)}{\partial t}=\frac{\partial f(u)}{\partial t}=\frac{\partial f(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}=f'(u)$$

$$\frac{\partial^2 r_m(t-\tau)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 f(u)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f(u)}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}f'(u)=\frac{\partial f'(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}=f''(u)$$

soit $\frac{\partial^2 r_m}{\partial t^2}=f''(u)$ (1)

Calculons les dérivées première et seconde de *r* par rapport à *x*

$$\frac{\partial r_m}{\partial x}=\frac{\partial r_m(t-\tau)}{\partial x}=\frac{\partial f(u)}{\partial x}=\frac{\partial f(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{v}f'(u)$$

$$\frac{\partial^2 r_m(t-\tau)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r_m(t-\tau)}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{v}f'(u)\right)=-\frac{1}{v}\frac{\partial f'(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{v^2}f''(u)$$

soit $\frac{\partial^2 r_m(t-\tau)}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}f''(u)$ (2)

En combinant les équations (1) et (2), on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 r_m}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 r_m}{\partial t^2}}$$

Cette équation représente l'expression mathématique de l'équation de propagation de la grandeur r_m suivant l'axe des *x*.

Propagation suivant une direction quelconque

$$\frac{\partial^2 r_m}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r_m}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r_m}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 r_m}{\partial t^2}$$

soit $\nabla^2 r_m=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 r_m}{\partial t^2}$ (4)

Equation différentielle de la propagation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

est *l'équation différentielle de propagation* de la grandeur ζ suivant l'axe des *x*.
La solution de cette équation est de la forme :

$\xi(x,t)=f_1(x-vt)+f_1(x+vt)$

Cette solution peut alors s'exprimer comme la superposition de deux ondes se propageant en sens opposés. Evidemment, pour une onde se propageant dans un seul sens, seule l'une des deux fonctions de l'équation est nécessaire.

Exercice : montrer que l'équation précédente est bien la solution de l'équation de propagation.
$\xi(x,t)=f_1(x\pm vt)=f_1(u)$
avec $u=x\pm vt$

$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{du}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{d\xi}{du}$; $\frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{\partial\xi}{du}\frac{\partial u}{\partial t}=\pm v\frac{d\xi}{du}$
Ensuite en calculant les dérivées secondes on obtient :
$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\xi}{dx}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{d\xi}{du}\right)=\frac{d^2\xi}{du^2}$$
$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)=\frac{\partial}{\partial u}(\pm v)(\pm v)\frac{d\xi}{du}=v^2\frac{d^2\xi}{du^2}$$

en combinant ces deux équations pour éliminer $d^2\xi / du^2$, nous obtenons l'équation de propagation : $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$.

Exercice : montrer que l'équation sinusoïdale est bien la solution de l'équation de propagation.
$\xi=\xi_0\sin(\omega t-\beta x)$
$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=-\beta\xi_0\cos(\omega t-\beta x)\ ;\ \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=-\beta^2\xi_0\sin(\omega t-\beta x)\quad(1)$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=\omega\xi_0\cos(\omega t-\beta x)\ ;\ \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\omega^2\xi_0\sin(\omega t-\beta x)\quad(2)$$
par conséquent, en éliminant $\xi_0\sin(\omega t-\beta x)$ entre les équations (1) et (2), on obtient :

$$\frac{1}{-\beta^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{1}{-\omega^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\Rightarrow\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{\beta^2}{\omega^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

III. EQUATION DE PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS LE VIDE

1. Equation de propagation de *E*

Les équations de Maxwell sont :
$$div\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}\ ;\ div\boldsymbol{B}=0\ ;\ rot\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial\boldsymbol{t}}\ ;\ rot\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$
En posant dans vide que :

- $J=0$; $\rho=0$ (milieu neutre).
- $\varepsilon=\varepsilon_0=8{,}85.10^{-12}\ F/m$; $\mu=\mu_0=4\pi10^{-7}\ H/m$

on obtient
$$rot\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\Rightarrow rot(rot\boldsymbol{E})=rot\left(-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\right)=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(rot\boldsymbol{H})$$
d'où $rot(rot\boldsymbol{E})=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$ (5)

d'autre part, nous avons

$$rot(rot\boldsymbol{E}) = grad(div\boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E}$$

comme $div\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$, on a :

$$rot(rot\boldsymbol{E}) = -\nabla^2\boldsymbol{E}$$

soit donc, en tenant compte de l'équation (5) :

$$\nabla^2\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} \quad (6)\ ;$$

En comparant celle-ci avec l'équation (4), à savoir $\nabla^2 r_m = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 r_m}{\partial t^2}$, on déduit :

$$\boxed{\frac{1}{v^2} = \varepsilon_0\mu_0}$$

soit

$$v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\frac{1}{8{,}85.10^{-12}.4\pi.10^{-7}}} \approx 3.10^8\ m/s$$

Conclusion : *Le champ électrique* $\boldsymbol{E}$ *se propage dans le vide avec une vitesse* $v = 3.10^8\ m/s$.

2. Equation de propagation de *H*

$$rot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$rot(rot\boldsymbol{H}) = rot\left(\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(rot\boldsymbol{E})$$

$$rot(rot\boldsymbol{E}) = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\right) = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} \quad (7)$$

d'autre part

$$rot(rot\boldsymbol{H}) = grad(div\boldsymbol{H}) - \nabla^2\boldsymbol{H}$$

comme $div\boldsymbol{B} = 0$,

$$rot(rot\boldsymbol{H}) = -\nabla^2\boldsymbol{H}$$

soit donc, en tenant compte de l'équation (7) :

$$\nabla^2\boldsymbol{H} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} \quad (8)\ ;$$

En comparant celle-ci avec l'équation (4), à savoir $\nabla^2 r_m = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 r_m}{\partial t^2}$, on déduit également que :

$$v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}} = 3.10^8\ m/s$$

Conclusion : *Le champ magnétique* $\boldsymbol{H}$ *se propage également dans le vide avec une vitesse* $v = 3.10^8\ m/s$.

IV. VERIFICATION EXPERIMENTALE

Contrairement à la majorité des découvertes scientifiques qui commencent par des essais expérimentaux avant d'établir des lois théoriques (Loi de Coulomb, loi de Faraday), la démonstration mathématique (théorique) de la propagation du champ électromagnétique était réalisée bien avant que l'expérience ne vienne confirmer la théorie de propagation du champ électromagnétique.

Expérience de Hertz

Vers la fin du dix-neuvième siècle, le physicien allemand Heirich Hertz (1857 – 1894) a prouvé de manière indiscutable que le champ électromagnétique se propage bien dans le vide. L'accumulation d'informations des ondes électromagnétiques concernant leur production, leur propagation et leur absorption a ouvert la porte au monde merveilleux des communications tel que nous le connaissons aujourd'hui. Avant que Hertz n'ait effectué ses expériences, l'existence des ondes électromagnétiques avait été prédite par Maxwell à la suite d'une analyse détaillée des équations du champ électromagnétique.

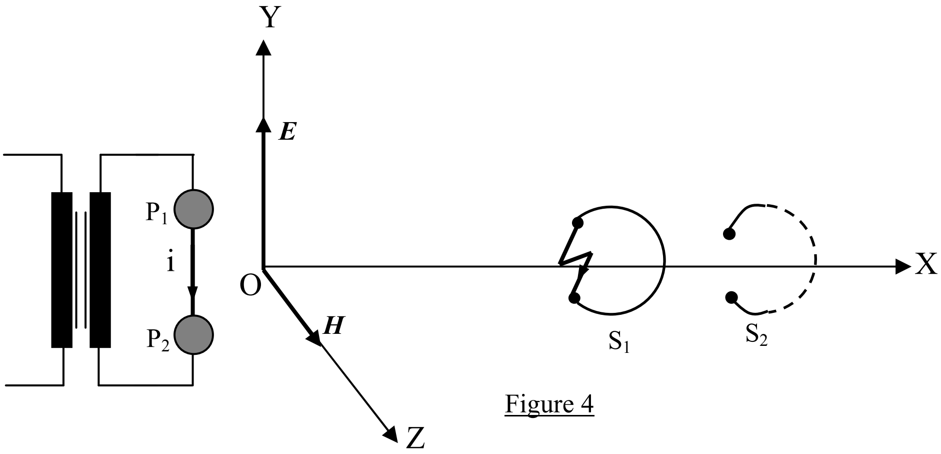


Figure 4

Le système formé par les deux boules sphériques P_1 et P_2 alimenté par une tension est un oscillateur, à chaque étincelle (arc) qui apparaît entre les deux sphères circule un courant i brusque et donc variable. Ce courant génère un champ électrique et un champ magnétique.

Résultat de l'expérience :
Il apparaît une étincelle aux bornes de la spire S_1

Interprétation :

L'apparition de l'étincelle montre qu'il existe une tension aux bornes de la spire S_1 , en fait c'est une f.e.m induite par le champ magnétique ***H*** crée par l'oscillateur, et qui s'est propagé jusqu'à S_1. La spire S_2 étant parallèle au champ ***H***, le flux magnétique est nul et ne peut pas induire une f.e.m.

Conclusion :
Quand le champ électromagnétique est variable, il devient une onde qui se propage dans l'air.

V. ONDE PLANE

L'expression $\xi = f(\omega t - \beta x)$ signifie qu'à un instant donné t, la fonction prend la même valeur en tout point ayant une même coordonnée x. Mais x = const représente un plan perpendiculaire à l'axe des x (Figure). Par conséquent, $\xi = f(\omega t - \beta x)$ décrit dans l'espace une *onde plane* se propageant parallèlement à l'axe des x.

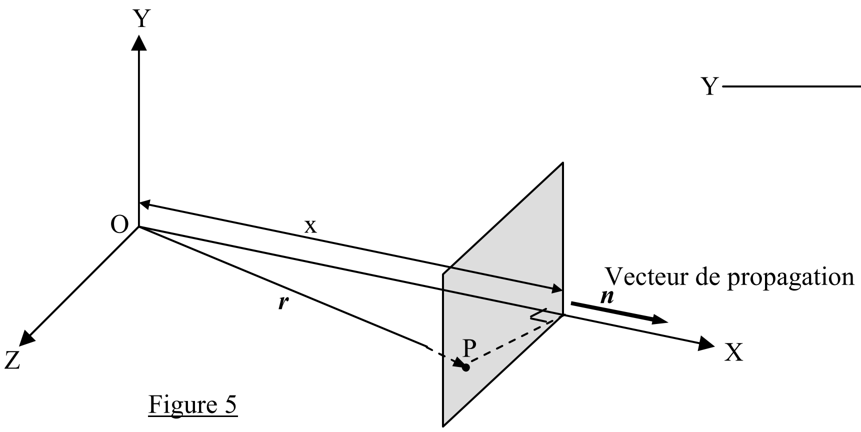


Figure 5

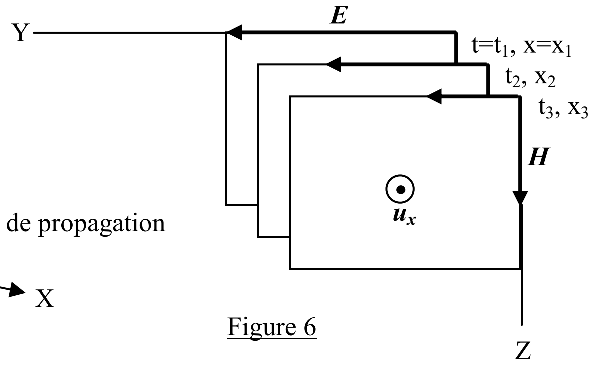


Figure 6

n est un vecteur unitaire dirigé suivant l'axe de propagation, appelé vecteur de propagation.

L'onde électromagnétique est plane lorsque ***E*** et ***H*** forment un plan qui se propage dans une seule direction.

Remarque :
Les ondes électromagnétiques sont soit des ondes planes soit une combinaison d'ondes planes.

Si r est le vecteur position d'un point quelconque P du front d'onde, on a $x = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}$ et l'on peut donc écrire :

$$\xi = f(\omega t - \beta \boldsymbol{n}.\boldsymbol{r}).$$

Cette forme reste valable quelque soit la direction de ***n*** :

$$\boldsymbol{n} = n_x \boldsymbol{u_x} + n_y \boldsymbol{u_y} + n_z \boldsymbol{u_z}.$$

Dans le cas d'une onde sinusoïdale se propageant dans une direction ***n*** quelconque, on écrit :

$$\boxed{\xi = \xi_0 \sin(\omega t - \beta \boldsymbol{n}.\boldsymbol{r})}$$

Il est commode de définir un vecteur $\boldsymbol{\beta} = \beta\, \boldsymbol{n}$. il est habituellement nommé *vecteur d'onde*.

Remarque : si la propagation a lieu dans l'espace à trois dimensions l'équation d'onde doit être modifiée en conséquence. Elle devient alors

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (1)$$

Dans ce cas, on pose également :

$$\boldsymbol{\beta} = \beta_x \boldsymbol{u_x} + \beta_y \boldsymbol{u_y} + \beta_z \boldsymbol{u_z}.$$

Pour une onde sinusoïdale, on obtient :

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t - \beta n_x x - \beta n_y y - \beta n_z z) \quad (2)$$

et,

$$\beta^2=\beta_x^2+\beta_y^2+\beta_z^2=\frac{\omega^2}{v^2}.$$

Remarque : en plus des ondes planes, il existe des ondes cylindriques, sphériques…
- Les ondes planes se propagent dans une seule direction (Figure 7).
- Les ondes cylindriques se propagent perpendiculairement à l'axe d'un cylindre (Figure 8).
- Les ondes circulaires qui se propagent dans toutes les directions suivant un plan (Figure 9).
- Les ondes sphériques se propagent dans toutes les directions (Figure 9).

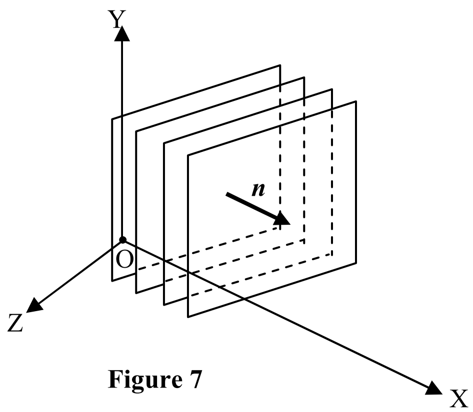


Figure 7

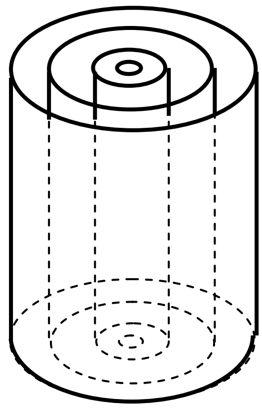


Figure 8

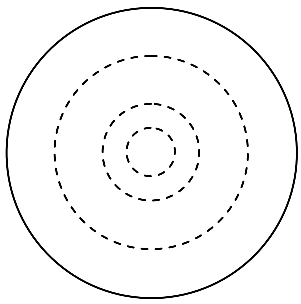


Figure 9

Remarque : l'onde circulaire qui se propage sur un plan est bi-dimensionnelle qui demande seulement deux coordonnées d'espace. L'équation pour cette onde est donc :

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

EXERCICE

Montrer que l'équation (2) vérifie l'équation différentielle de propagation (1).

Solution :

$$\xi=\xi_0\sin(\omega t-\beta n_x x-\beta n_y y-\beta n_z z)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=\omega\xi_0\cos(\omega t-\beta x)\ ;\ \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\omega^2\xi_0\sin(\omega t-\beta x)\quad(3)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=-\beta n_x\xi_0\cos\left(\omega t-\beta n_x x-\beta n_y y-\beta n_z z\right)\ ;\ \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=-\beta^2\left(n_x^2\right)\xi_0\sin\left(\omega t-\beta n_x x-\beta n_y y-\beta n_z z\right)\ (3)$$

par analogie avec l'équation (3), on obtient :

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=-\beta^2\left(n_y^2\right)\xi_0\sin\left(\omega t-\beta n_x x-\beta n_y y-\beta n_z z\right)\ (4)$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=-\beta^2\left(n_z^2\right)\xi_0\sin\left(\omega t-\beta n_x x-\beta n_y y-\beta n_z z\right)\ (5)$$

En remplaçant les expressions (3), (4) et (5) dans l'équation différentielle de propagation, on obtient :

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=-\beta^2\xi_0\sin\left(\omega t-\beta n_x x-\beta n_y y-\beta n_z z\right)\left[\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)\right]$$

comme $\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)=1$,

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=-\beta^2\xi_0\sin\left(\omega t-\beta n_x x-\beta n_y y-\beta n_z z\right)$$

comme par ailleurs,

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=\omega\xi_0\cos\left(\omega t-\beta n_x x-\beta n_y y-\beta n_z z\right)\ ;\ \frac{\partial\xi^2}{\partial t^2}=-\omega^2\xi_0\sin\left(\omega t-\beta n_x x-\beta n_y y-\beta n_z z\right)$$

on aboutit à :

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

EXERCICE

Soit un champ sinusoïdal $\boldsymbol{E}=E_0\boldsymbol{u}cos(\omega t)$ qui se propage suivant l'axe des x. Réécrire les équations de Maxwell et l'équation de propagation en utilisant la forme exponentielle.

Solution :

Considérons le champ $\boldsymbol{E}=E_0\boldsymbol{u}cos(\omega t)$,

Ecrit sous forme exponentielle, il devient :

$\boldsymbol{E}=E_0\boldsymbol{u}\,exp\,j\omega t$

Calculons les dérivées première et seconde par rapport au temps

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=j\omega E_0\boldsymbol{u}\,exp\,j\omega t=j\omega\boldsymbol{E}\ ;$$

et

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=(j\omega)^2\boldsymbol{E}=-\omega^2\boldsymbol{E}$$

donc on peut remplacer $\frac{\partial}{\partial t}$ par $j\omega$

et

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ par $-\omega^2$.

En tenant compte de ces remplacements, les équations de Maxwell deviennent :

$$rot\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\sigma\boldsymbol{E}+j\varepsilon_0\omega\boldsymbol{E}\ ;\ rot\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=-j\mu_0\omega\boldsymbol{H}$$

$$div\boldsymbol{B}=0\ ;\ div\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

et l'équation de propagation devient :

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0\Rightarrow\nabla^2\boldsymbol{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0\Rightarrow\nabla^2\boldsymbol{E}-\varepsilon_0\mu_0\left(-\omega^2\right)=0$$

soit $\nabla^2\boldsymbol{E}+\varepsilon_0\mu_0\omega^2\boldsymbol{E}=0$

En posant $\beta^2=\varepsilon_0\mu_0\omega^2$, on obtient :

$\nabla^2\boldsymbol{E}+\beta^2\boldsymbol{E}=0$.

Remarque

Si l'on considère une propagation suivant l'axe des x, l'équation précédente devient :

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial x^2}\Rightarrow\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial x^2}+\beta^2\boldsymbol{E}=0$$

C'est une équation différentielle dont la solution est de la forme suivante :

$$\boldsymbol{E}=E_0\boldsymbol{u_1}exp\,j\left(\omega t-\beta x\right)+E_0\boldsymbol{u_2}exp\,j\left(\omega t+\beta\varphi\right)$$

Où $E_0\boldsymbol{u_1}exp\,j\left(\omega t-\beta x\right)$ est une onde se déplaçant vers les $x>0$;

Et $E_0\boldsymbol{u_2}exp\,j\left(\omega t+\beta\varphi\right)$ est une onde progressive vers les $x<0$.

VI. CARACTERISTIQUES DES ONDES PLANES

Dans tout ce paragraphe on supposera une propagation des ondes suivant la direction des x positifs.

1. Onde transverse

l'équation de MG est : $div\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$

En général les milieux où se propagent les ondes sont électriquement neutres, on pose $\rho=0$:

Alors,

$$div\boldsymbol{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0\quad(1)$$

pour simplifier, considérons une propagation suivant un seul axe, celui des x.

par conséquent nous avons

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}=0$$

l'équation (1) devient

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0$$

on obtient par la suite que

$$E_x=Cte$$

donc $\underline{E_x\left(x\right)=Cte}$

D'autre part,
l'équation de propagation de $\boldsymbol{E}$ suivant x s'écrit

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

posons $\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{u_x}+E_y\boldsymbol{u_y}+E_z\boldsymbol{u_z}$

on peut écrire $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(E_x\boldsymbol{u_x}+E_y\boldsymbol{u_y}+E_z\boldsymbol{u_z})=\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(E_x\boldsymbol{u_x}+E_y\boldsymbol{u_y}+E_z\boldsymbol{u_z}\right)$

Suivant $\boldsymbol{u_x}$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (1)$$

Suivant $\boldsymbol{u_y}$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Suivant $\boldsymbol{u_z}$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

Vu que $E_x(x)=Cte$, l'équation (1) devient :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=0$$

soit $\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=0$

La solution de cette équation est
$E_x(t)=At+B$
ou bien $\underline{E_x(t)=Cte}$
La première est une solution mathématiquement juste, mais physiquement impossible, car un champ qui croîtrait de lui même indéfiniment avec le temps sans raison n'existe pas.

Par conséquent, vu que $E_x(x) = Cte$ et $E_x(t) = Cte$, on peut établir que :
$E_x(x,t) = Cte$
Ou bien $E_x(x,t) =0$.
Vu que dans la propagation des ondes les grandeurs constantes, donc statiques, sont négligées et posées égales à zéro.

<u>Remarque</u> :
on peut également démontrer que $H_x(x,t)=0$
<u>Conclusion</u> :
La composante du champ électromagnétique suivant la direction de propagation (E_x, H_x) étant nulle, l'onde plane est située dans le plan YOZ et donc perpendiculaire à la direction de propagation OX : *l'onde plane est transverse.*

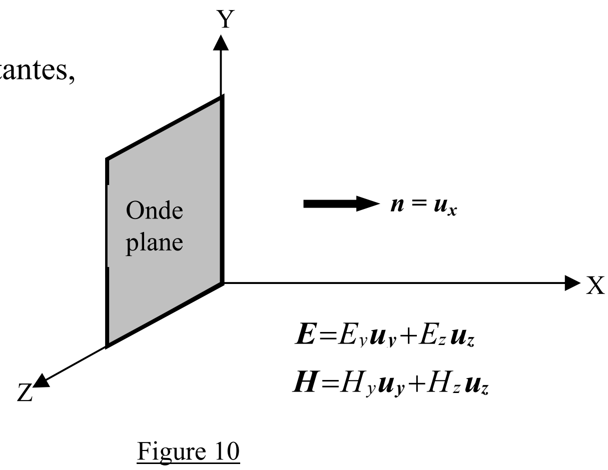


Figure 10

2. Impédance caractéristique

Pour simplifier, supposons toujours une propagation suivant l'axe des x > 0, on peut alors poser

$$\boldsymbol{E}=f\left(t-\frac{x}{v}\right),\ \boldsymbol{H}=g\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}=0 \text{ et}$$

$$E_x=0$$

l'équation de MF est :

$$rot\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$rot\boldsymbol{E}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}_x & \boldsymbol{u}_y & \boldsymbol{u}_z\\ \partial/\partial x & 0 & 0\\ 0 & E_y & E_z\end{vmatrix}=-\boldsymbol{u}_y\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{u}_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)$$

d'autre part

$$-\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=-\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t}\boldsymbol{u}_y-\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t}\boldsymbol{u}_z$$

on obtient alors

$$\frac{\partial E_z}{\partial x}=\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t} \quad \text{(a)}$$

et

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}=-\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t} \quad \text{(b)}$$

Par ailleurs

A partir de l'équation de MA $rot\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ nous obtenons ce qui suit :

$$rot\boldsymbol{H}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}_x & \boldsymbol{u}_y & \boldsymbol{u}_z\\ \partial/\partial x & 0 & 0\\ 0 & H_y & H_z\end{vmatrix}=-\boldsymbol{u}_y\left(\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{u}_z\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}\boldsymbol{u}_y+\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t}\boldsymbol{u}_z$$

on a alors

$$\frac{\partial H_z}{\partial x}=-\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t} \quad \text{(c)}$$

et

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}=\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t} \quad \text{(d)}$$

Si on pose $E_y=f_1\left(t-\frac{x}{v}\right)$, l'équation (c) donne :

$$\frac{\partial E_y}{\partial t}=\frac{\partial f_1(u)}{\partial t}=\frac{\partial f_1(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}=f_1'(u)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

donc

$$H_z=\int -\varepsilon_0 f_1'(u)dx$$

$$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{v}\Rightarrow dx=-vdu$$

on arrive alors à

$$H_z=-\varepsilon_0(-v)\int f_1'(u)du=\varepsilon_0 v f_1(u)+Cte=\varepsilon_0 v f_1(u)$$

soit donc

$$H_z=\varepsilon_0 vE_y$$

et

$$\frac{E_y}{H_z}=\frac{E_y}{\varepsilon_0 vE_y}=\frac{1}{\varepsilon_0 v}=\frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\varepsilon_0}=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}=Z_0$$

d'où

$$\frac{E_y}{H_z}=Z_0$$

Si on pose $E_z=f_2\left(t-\frac{x}{v}\right)$, l'équation (d) donne :

$$\frac{\partial E_z}{\partial t}=\frac{\partial f_2(u)}{\partial t}=\frac{\partial f_2(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}=f_2'(u)=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial Hy}{\partial x}$$

$$H_y=\int \varepsilon_0 f_2'(u)dx$$

comme $dx=-vdu$

il vient

$$H_y=-\varepsilon_0 v\int f_2'(u)du=-\varepsilon_0 v f_2(u)+Cte=-\varepsilon_0 v f_1(u)$$

soit $H_y=-\varepsilon_0 vE_z$

et

$$\frac{E_z}{H_y}=\frac{E_z}{-\varepsilon_0 vE_z}=-\frac{1}{\varepsilon_0 v}=-\frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\varepsilon_0}=-\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}=-Z_0$$

$$\frac{E_z}{H_y}=-Z_0$$

Le rapport entre les modules de ***E*** et ***H*** vaut alors :

$$\frac{E}{H}=\frac{\sqrt{E_y^2+E_z^2}}{\sqrt{H_y^2+H_z^2}}=\frac{\sqrt{E_y^2+E_z^2}}{\sqrt{\left(-E_z/Z_0\right)^2+\left(E_y/Z_0\right)^2}}$$

$$\frac{E}{H}=\frac{\sqrt{E_y^2+E_z^2}}{\sqrt{\frac{1}{Z_0^2}\left(E_y^2+E_z^2\right)}}=\frac{1}{1/Z_0}=Z_0$$

Soit $\frac{E}{H}=Z_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$

<u>Unité de Z_0</u>

$$[Z_0]=\frac{[E]}{[H]}=\frac{V/m}{A/m}=\frac{V}{A}=\Omega$$

Z_0 est appelée "*Impédance caractéristique*" du milieu dans lequel se déroule la propagation des ondes.
Pour le vide, air : $Z_0 = 120\pi$

3. $\boldsymbol{E \perp H}$

Considérons toujours une propagation suivant l'axe des x positifs, donc on a :

- vecteur de propagation $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{u_x}$
- $E_x=0$
- $\boldsymbol{E}=E_y\boldsymbol{u_y}+E_z\boldsymbol{u_z}$

$$\boldsymbol{E.H}=E_yH_y+E_zH_z=E_y\left(\frac{E_z}{-Z_0}\right)+E_z\left(\frac{E_y}{Z_0}\right)=0$$

<u>Conclusion</u>: *les champs électrique **E** et magnétique **H** sont perpendiculaires entre eux.*

4. Direction de propagation

Calculons $\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{u_x} & \boldsymbol{u_y} & \boldsymbol{u_z} \\ 0 & E_y & E_z \\ 0 & H_y & H_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{u_x} & \boldsymbol{u_y} & \boldsymbol{u_z} \\ 0 & Z_0H_z & -Z_0H_y \\ 0 & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

soit

$$\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H}=\boldsymbol{u_x}\left(Z_0H_z^2+Z_0H_y^2\right)=Z_0H^2\boldsymbol{u_x}$$

comme $\boldsymbol{u_x}=\boldsymbol{n}$, on peut écrire :

$$\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H}=Z_0H^2\boldsymbol{n}$$

<u>Conclusion</u> : *le produit vectoriel de **E** par **H** donne la direction de propagation.*

VII. PROPAGATION DANS UNE DIRECTION QUELCONQUE

Quand la propagation se fait suivant l'axe des x, le champ **E** de l'onde s'exprime par :

$$\boldsymbol{E}=E_0\boldsymbol{u}\exp j(\omega t-\beta x)$$

Suivant OM, le champ **E** s'écrit :

$$\boldsymbol{E}(M)=E_0\boldsymbol{u}\exp j(\omega t-\beta OM) \; ;$$

comme il s'agit d'un même plan d'onde, le champ est le même sur tout le plan :

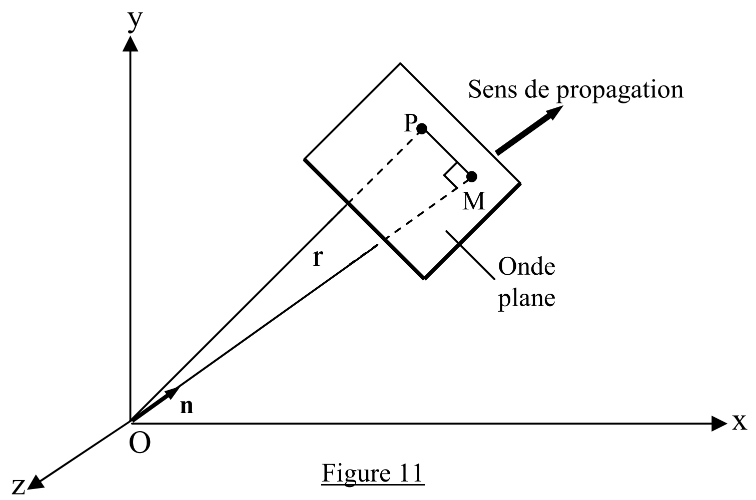
$$E(M)=E(P)$$

Vu que

$$OM=\boldsymbol{n}.\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{n}.\boldsymbol{r}$$

soit donc

$$\boldsymbol{E}(P)=E_0\boldsymbol{u}\exp j(\omega t-\beta\boldsymbol{n}.\boldsymbol{r})$$



<u>Figure 11</u>

On déduit que l'expression du champ se propageant suivant une direction quelconque ***n*** est :

$$\boldsymbol{E}(P)=E_0\boldsymbol{u}\exp j(\omega t-\beta\boldsymbol{n}.\boldsymbol{r})$$

VIII. VITESSE ET LONGUEUR D'ONDE

1. Vitesse de phase

Dans une onde plane considérée à un instant t, les modules de ***E*** et ***H*** ainsi que la phase φ sont constants ;

On peut donc poser que la phase φ est constante :

$$\varphi=\omega t-\beta x=Cte$$

soit

$$d(\omega t-\beta x)=0 \Rightarrow \omega dt-\beta dx=0$$

d'où

$$\frac{dx}{dt}=v=\frac{\omega}{\beta}$$

Vitesse de groupe

La vitesse définie auparavant $v = \omega / \beta$ est appelée vitesse de phase. En réalité, l'onde qui possède une longueur d'onde et une fréquence unique n'est pas capable de transmettre un signal, car un signale implique quelque chose qui commence à un instant et qui se termine à un instant ultérieur, qu'on appelle *Pulse* (Figure).

La vitesse à laquelle le signal est transmis est la vitesse avec laquelle se propage la Pulse.

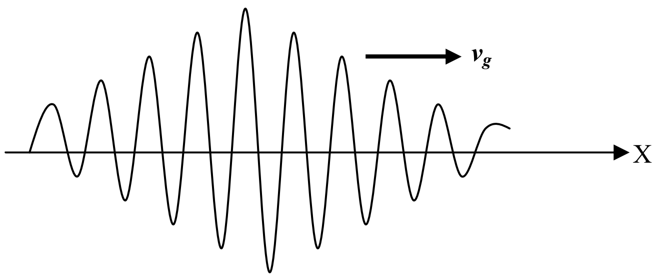


Figure 12

Le pulse n'est pas sinusoïdal puisque son amplitude n'est pas constante le long de l'axe des X. nous devons donc faire une analyse de Fourrier et nous devons donc examiner la situation plus soigneusement.

2. Fréquence d'onde

$$\varphi=\omega t-\beta x$$

Phase dans le temps : $\varphi(t)=\omega t$

Pour t = T,

avec T période dans le temps

on écrit :

$$\omega T=2\pi$$

soit

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \quad \textbf{(1)}$$

3. Longueur d'onde

Phase dans l'espace : $\varphi(x)=\beta x$

Pour x = λ

Avec λ période dans l'espace ou longueur d'onde

on écrit :

$\beta\lambda=2\pi$

soit

$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}$ **(2)**

En combinant les équations (1) et (2), on obtient :

$\omega T=\beta\lambda$

d'où

$\frac{\omega}{\beta}=\frac{\lambda}{T}$

comme $\frac{\omega}{\beta}=v$ et $\frac{1}{T}=f$, on déduit la relation suivante :

$v=\lambda f$

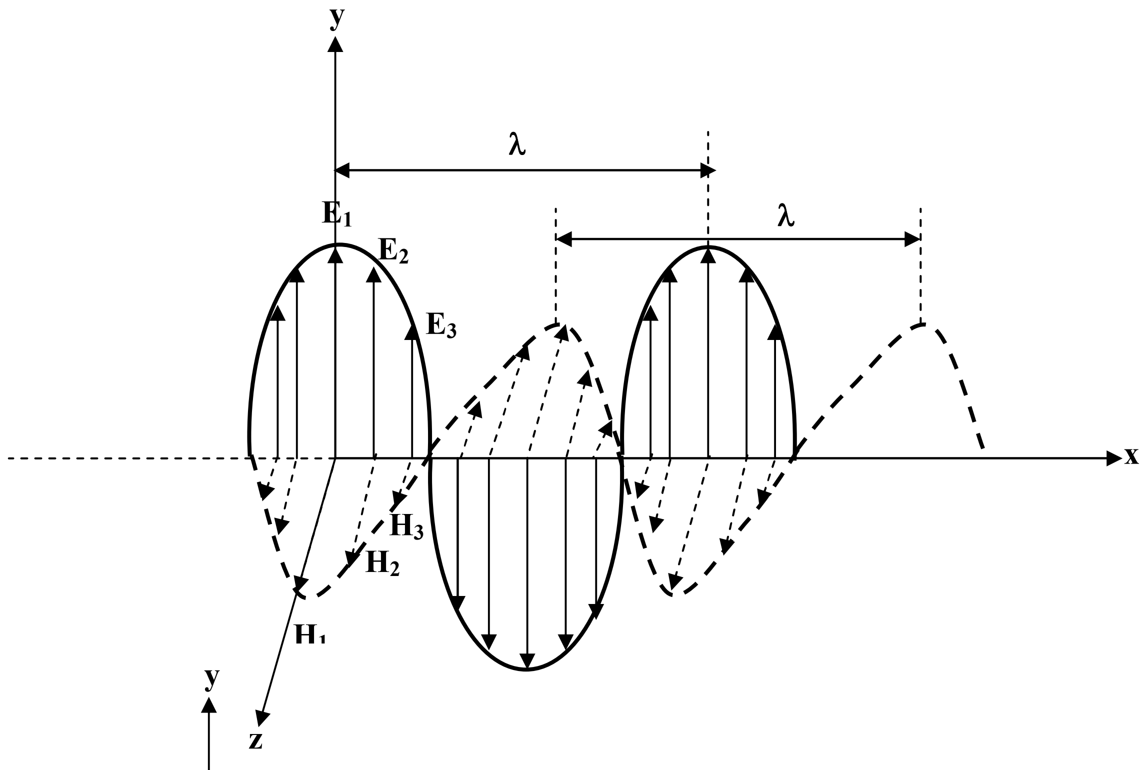
EXERCICE

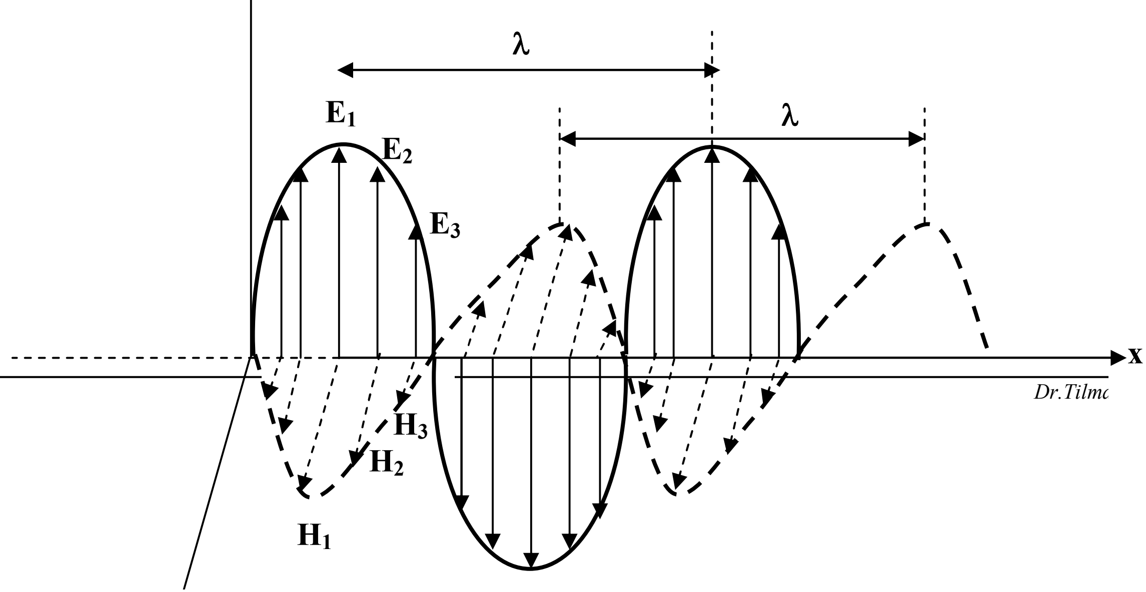
On considère dans le vide une onde plane, dont le champ électromagnétique est exprimé par :

$\boldsymbol{E}=E_0\boldsymbol{u}_y cos(\omega t-\beta x)$ et $\boldsymbol{H}=H_0\boldsymbol{u}_z cos(\omega t-\beta x)$

Tracer l'onde aux instants $\omega t=0$ et $\omega t=\pi/2$.

Solution





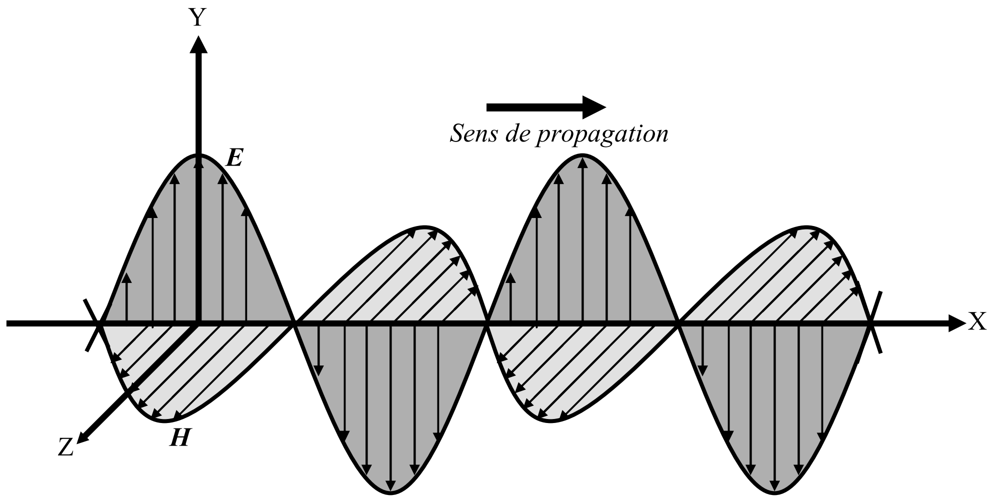


Figure 14

Le champ électrique oscille dans le plan XY et le champ magnétique dans le plan XZ. Ceci correspond à une onde polarisée *linéairement*, c'est à dire *dans un plan*. Le plan de polarisation est défini comme le plan dans lequel oscille le champ électrique, en ce cas le plan XY.

Remarque : il existe un autre type de polarisation : la polarisation circulaire.
Remarque : à côté des ondes planes, les équations de Maxwell admettent également pour solution des ondes électromagnétiques cylindriques ou sphériques. A grande distance de la source, une portion limitée de l'onde cylindrique ou sphérique peut pratiquement être considérée comme plane.

IX. PROPAGATION DE L'ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE

Une onde électromagnétique transporte de l'énergie.

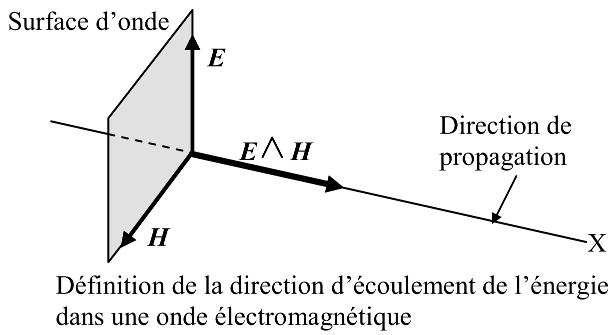


Figure 15

Rappel

Tout champ électrique ***E*** possède une énergie de densité $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$;

et tout champ magnétique ***H*** possède une énergie de densité $w_m = \frac{1}{2}\mu_0 H^2$.

Energie transportée par l'onde

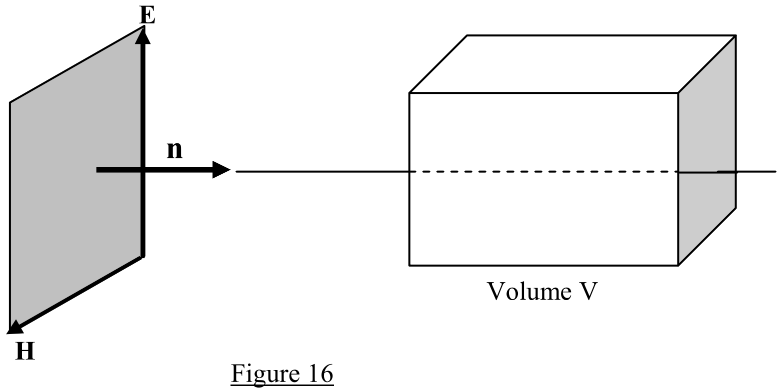


Figure 16

Considérons l'équation de M.A :

$$rot\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \;;$$

dans le vide , on pose $J=0$:

$$rot\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{E}\,rot\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

comme $div(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H})=\boldsymbol{H}\,rot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\,rot\boldsymbol{H}$

vient $\boldsymbol{E}\,rot\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}\,rot\boldsymbol{E}-div(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H})$

soit $\boldsymbol{E}\left(\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=\boldsymbol{H}\left(-\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right)-div(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H})$

d'où

$$-div(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H})=\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial E^2}{\partial t}+\frac{1}{2}\mu_0\frac{\partial H^2}{\partial t}$$

$$-div(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H})=\varepsilon_0\boldsymbol{E}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)+\mu_0\boldsymbol{H}\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right)$$

$$\int -div(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H})dv=\int\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial E^2}{\partial t}+\frac{1}{2}\mu_0\frac{\partial H^2}{\partial t}\right)dv$$

on obtient ensuite

$$\oint -(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H})\boldsymbol{ds}=\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2}\mu_0H^2\right)dv$$

$$\oint -(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H})\boldsymbol{ds}=\frac{\partial}{\partial t}(W_e+W_m)$$

Comme le terme $\frac{\partial}{\partial t}(W_e+W_m)$ représente l'augmentation de l'énergie électromagnétique dans le volume V.

$\oint -(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H})\boldsymbol{ds}$ représente donc l'énergie électromagnétique transportée par l'onde entrant dans le volume V

Remarques

- $\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H}$ est appelé vecteur de *Poynting* (Flux d'énergie par unité de surface).
- $\oint(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H})\boldsymbol{ds}$ représente l'énergie sortant de V.

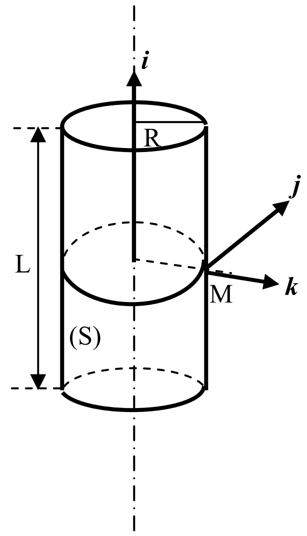
Rayonnement d'un dipôle électrique oscillant :
La source des ondes sonores est un certain corps vibrant tel que la membrane d'un tambour ou la corde d'un violon. Dans le cas des ondes électromagnétiques, les sources des ondes sont de toute évidence les mêmes que les sources du champ électromagnétique ; c'est-à-dire, les charges en mouvement.

La diffusion contribue à réduire l'intensité de l'onde incidente parce que l'énergie absorbée dans l'onde est réemise dans toutes les directions, ce qui produit une diminution effective de l'énergie du rayonnement.

EXERCICE

Un conducteur cylindrique de résistivité ρ, de diamètre 2R est parcouru par un courant I réparti uniformément dans la section. Comparer les pertes Joule et le flux du vecteur de Poynting à travers la surface latérale.

Solution



La puissance dissipée dans le conducteur (Pertes Joule) est

$$P=RI^2$$

avec

$$R=\rho\frac{L}{S} \text{ et}$$

$$I=\int J\,dS=JS=J\pi R^2$$

soit $P=\rho\frac{L}{S}(I)^2=\rho\frac{L}{\pi R^2}I^2$

Le champ électrique dans le conducteur est celui de la loi locale d'Ohm qui assure le mouvement des électrons :

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{J}}{\sigma}=\rho\boldsymbol{J}$$

où

$\sigma=\frac{1}{\rho}$ est la conductivité du conducteur

donc, le champ est uniforme, et vaut en tout point M de la surface latérale (S) du cylindre

$$\boldsymbol{E}=\frac{\rho I}{\pi R^2}\boldsymbol{i}$$

le champ magnétique est calculé par le théorème d'Ampère, en un point de (S) il vaut :

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\boldsymbol{j}$$

le vecteur de Poynting sur la surface est

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}\wedge\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}$$

soit

$$\boldsymbol{P}=\frac{\rho I}{\pi R^2}\boldsymbol{i}\wedge\frac{I}{2\pi R}\boldsymbol{j}=-\frac{\rho I^2}{2\pi^2 R^3}\boldsymbol{k}$$

le flux de $\boldsymbol{P}$ entrant dans le cylindre par la paroi latérale est

$$\phi=\boldsymbol{P}.(-\boldsymbol{k})2\pi RL$$

soit

$$\phi=\rho\frac{L}{\pi R^2}I^2$$

Ce flux n'est autre que la puissance dissipée par effet Joule dans le volume du cylindre.

X. REFLEXION ET TRANSMISSION DES ONDES

1. Réflexion par un conducteur parfait

L'onde incidente est totalement réfléchie, il n'y a pas d'onde transmise à travers le conducteur, car le champ électrique dans le conducteur est nul.

2. Réflexion par un diélectrique

Vu que le champ électrique pénètre à l'intérieur d'un diélectrique, contrairement à un matériau conducteur, l'onde incidente donne naissance en plus de l'onde réfléchie à une onde transmise.

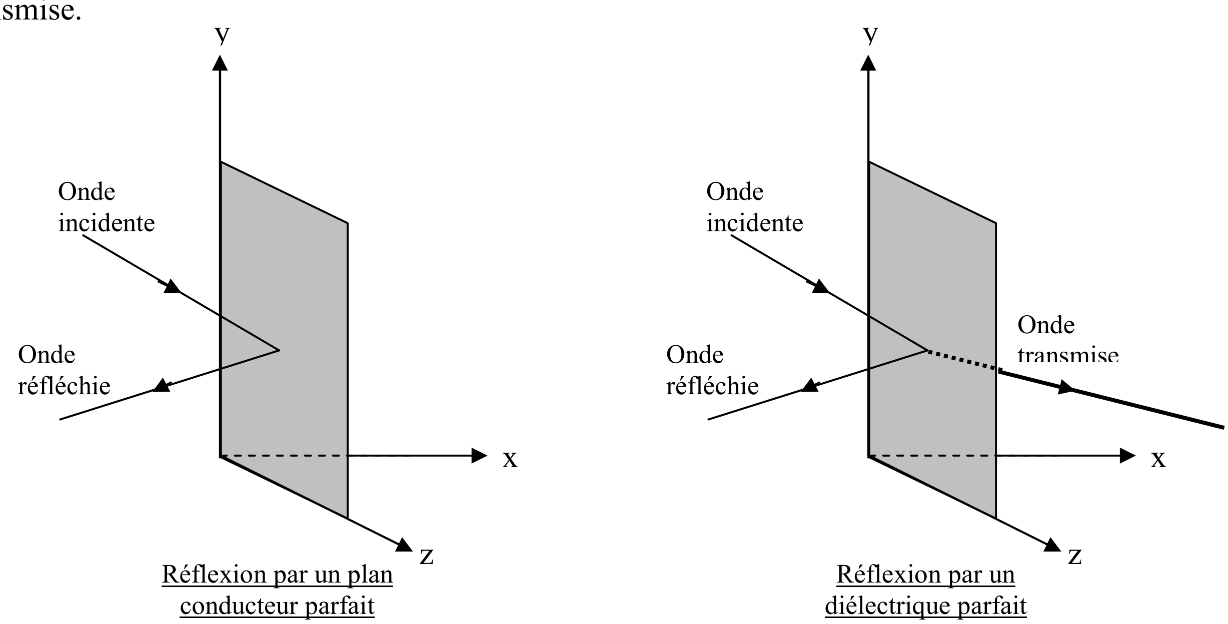


Figure 17

XI. ONDES GUIDEES

Soient P1 et P2 deux plans métalliques parallèles

L'onde qui entre à l'intérieur subit une succession de réflexions multiples puis sort de l'autre côté : on dit que l'onde est guidée.

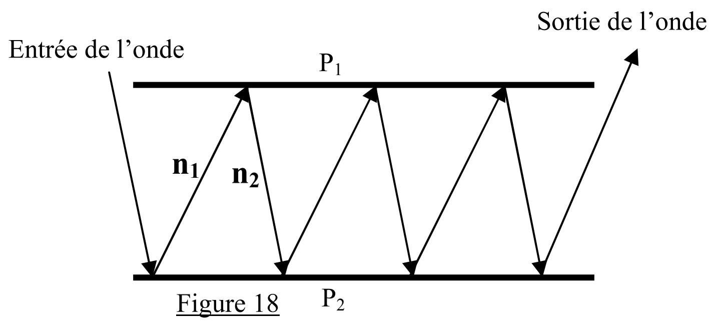


Figure 18

Exemples de guide d'onde

- fibre optique :

c'est un tube métallique cylindrique

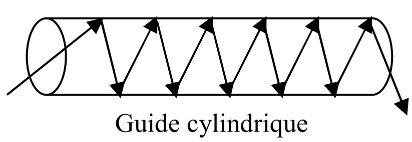
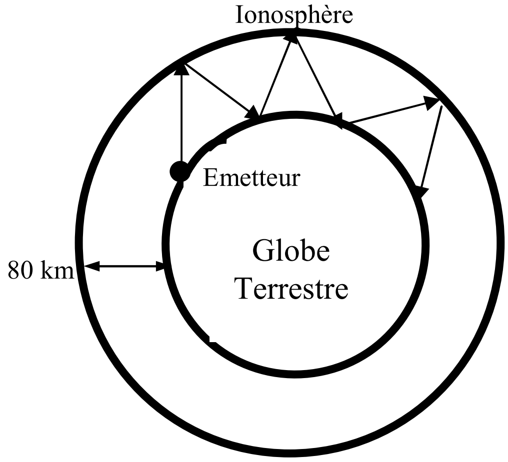


Figure 19

- Guide d'ondes radio :

Les ondes émises par la station radio sont réfléchies d'une part par la surface de la terre et d'autre part par la couche atmosphérique de l'ionosphère.



- Guide d'ondes TV par satellite :

Le satellite réfléchit vers la terre les ondes émises par la station TV.

Figure 20

Réflexion et transmission :

Les directions des trois vecteurs $\boldsymbol{u_i}$, $\boldsymbol{u_r}$ et $\boldsymbol{u_t}$ sont liées entre elles par les lois suivantes, vérifiées expérimentalement :

1) les directions d'incidence, de réflexion et de transmission sont contenues dans un même plan normal à la surface de séparation.
2) L'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion, c'est-à-dire :
$$\theta_i = \theta_r$$
3) $\dfrac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\dfrac{v_i}{v_r}$

Supposons qu'une onde incidente soit écrite comme suit :

$\boldsymbol{E_i} = \boldsymbol{E_{0i}}\sin\left(\omega t - \beta\, \boldsymbol{n_i}.\boldsymbol{r}\right)$,

les ondes réfléchies et transmises sont :

$\boldsymbol{E_r} = \boldsymbol{E_{0r}}\sin\left(\omega t - \beta\, \boldsymbol{n_r}.\boldsymbol{r}\right)$

et

$\boldsymbol{E_t} = \boldsymbol{E_{0t}}\sin\left(\omega t - \beta\, \boldsymbol{n_t}.\boldsymbol{r}\right)$

dans le milieu (1) on trouve les ondes incidente et réfléchie, tandis que dans le milieu (2) n'existe que l'onde transmise. On a alors à la surface de séparation

$\boldsymbol{E_i} + \boldsymbol{E_r} = \boldsymbol{E_t}$ (*)

Pour que cette relation soit satisfaite à chaque instant en tout point de la surface de séparation, il faut que les phases soient identiques dans les équations (1), (2) et (3):

$\omega t - \beta_i\, \boldsymbol{n_i}.\boldsymbol{r} = \omega t - \beta_r\, \boldsymbol{n_r}.\boldsymbol{r} = \omega t - \beta_t\, \boldsymbol{n_t}.\boldsymbol{r}$ (**)

soit,

$\beta_i\, \boldsymbol{n_i}.\boldsymbol{r} = \beta_r\, \boldsymbol{n_r}.\boldsymbol{r} = \beta_t\, \boldsymbol{n_t}.\boldsymbol{r}$ (4)

Comme l'indique la figure, la surface de séparation coïncide avec le plan XZ. L'égalité (4) ne sera donc vérifiée qu'en posant y = 0. Par conséquent

$\boldsymbol{r} = x\, \boldsymbol{u_x} + z\, \boldsymbol{u_z}$.

D'autre part, la direction d'incidence est contenue dans le plan XY, donc :

$\boldsymbol{n_i} = n_{ix}\ \boldsymbol{u_x} + n_{iy}\ \boldsymbol{u_y}$.
$\beta_1 \boldsymbol{n_i}.\boldsymbol{r}=\beta_1 x n_{ix}$ (5)

Comme $\boldsymbol{n_r} = n_{rx}\ \boldsymbol{u_x} + n_{ry}\ \boldsymbol{u_y} + n_{rz}\ \boldsymbol{u_z}$
et
$\boldsymbol{n_t} = n_{tx}\ \boldsymbol{u_x} + n_{ty}\ \boldsymbol{u_y} + n_{tz}\ \boldsymbol{u_z}$

nous obtenons également
$\beta_1 \boldsymbol{n_r}.\boldsymbol{r}=\beta_1 x n_{rx}+\beta_1 z n_{rz}$ (6)
et
$\beta_2 \boldsymbol{n_t}.\boldsymbol{r}=\beta_2 x n_{tx}+\beta_2 z n_{tz}$ (7)

en remplaçant les équations 5, 6 et 7 dans l'équation 4, on obtient :

$\beta_1 n_{ix}=\beta_1 n_{rx}=\beta_2 n_{tx}$ et $\beta_1 n_{rz}=\beta_2 n_{tz}=0$
le second groupe d'équations indique que les vecteurs $\boldsymbol{n_r}$ et $\boldsymbol{n_t}$ n'ont pas de composante suivant l'axe des Z. les rayons incident, réfléchi et transmis sont donc dans un même plan. C'est la loi (1) énoncée précédemment.

Nous voyons ensuite sur la figure que :
$\boldsymbol{n_i} = \boldsymbol{u_x}\ sin\theta_i +$; $\boldsymbol{n_r} = \boldsymbol{u_x}\ sin\theta_r +$; $\boldsymbol{n_t} = \boldsymbol{u_x}\ sin\theta_t +$
le premier groupe d'équations devient alors :
$\beta_1 \sin\theta_i = \beta_1 \sin\theta_r = \beta_2 \sin\theta_t$
et comme par ailleurs :
$\beta_1 = \frac{\omega}{v_1}$ et $\beta_2 = \frac{\omega}{v_2}$
on obtient après simplification par ω

$\frac{1}{v_1}\sin\theta_i = \frac{1}{v_1}\sin\theta_r = \frac{1}{v_2}\sin\theta_t$
on déduit alors :

$\sin\theta_i = \sin\theta_r$, c'est-à-dire $\theta_i = \theta_r$
et
$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{v_1}{v_2}$
nous retrouvons donc, sous une forme plus analytique, les lois (2) et (3) de la réflexion et la transmission.

Si l'équation (**) est satisfaite, l'équation (*) devient :
$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$$

Qui est une relation entre les amplitudes des trois ondes.

XII. SPECTRE DU RAYONNEMENT ELECTROMAGNETIQUE

Spectre du rayonnement électromagnétique
La classification usuelle du spectre électromagnétique est la suivante :

1) Ondes radio et TV
la fréquence f s'étend de quelques kHz à 10^9 Hz ;
la longueur d'onde λ s'étend de quelques km à 0,3m.
Energie des photons est comprise entre 0 et 10^{-5} eV.
Les ondes qui sont utilisées pour les transmissions radio et la télévision sont produites par des dispositifs électroniques, essentiellement des circuits oscillants.

2) Micro-ondes
f : de 10^9 à 3.10^{11} Hz ; λ : de 0,3 à 10^{-3} m;
W : de 10^{-5} à 10^{-3} eV.
Ces ondes sont utilisées dans les radars et d'autres systèmes de communication, mais aussi dans l'analyse de détails très fins des structures atomiques et moléculaires.
Cette région des micro-ondes est également désignée par le sigle UHF (Ultra - Haute-Fréquence par rapport aux fréquences Radio).

3) Le spectre infrarouge
f : de 3.10^{11} à 4.10^{14} Hz ; λ : de 10^{-3} à $7{,}8.10^{-7}$ m ;
W : de 10^{-3} à 1,6 eV.
Ces ondes sont produites par les molécules et les corps chauds. Elles ont de nombreuses applications dans l'industrie, la médecine, l'astronomie.

4) Spectre visible (lumière)
f : de 4.10^{14} à 8.10^{14} Hz ; λ : de $7{,}8.10^{-7}$ à $3{,}8.10^{-7}$ m;
W : de 1,6 à 3,2 eV.
C'est une bande étroite formée par les longueurs d'onde auxquelles notre rétine est sensible.

La lumière est produite par le mouvement des atomes et des molécules par suite des réajustements internes du mouvement des composants, principalement des électrons.

En raison des similitudes dans le comportement des régions infrarouge et ultra-violette du spectre, le domaine de l'optique les inclut également en plus du spectre visible.

Les différentes couleurs que la lumière produit sur l'œil, dépendent de la fréquence ou de la longueur d'onde du rayonnement :

Couleur	Longueur d'onde *λ (m)*	Fréquence *f (Hz)*
Violet	$3{,}90$ à $4{,}55.\ 10^{-7}$	$7{,}69$ à $6{,}59.\ 10^{14}$
Bleu	$4{,}55$ à $4{,}92.\ 10^{-7}$	$6{,}59$ à $6{,}10.\ 10^{14}$
Vert	$4{,}92$ à $5{,}77.\ 10^{-7}$	$6{,}10$ à $5{,}20.\ 10^{14}$
Jaune	$5{,}77$ à $5{,}97.\ 10^{-7}$	$5{,}20$ à $5{,}03.\ 10^{14}$
Orange	$5{,}97$ à $6{,}22.\ 10^{-7}$	$5{,}03$ à $4{,}82.\ 10^{14}$
Rouge	$6{,}22$ à $7{,}80.\ 10^{-7}$	$4{,}82$ à $3{,}84.\ 10^{14}$

5) Rayons Ultra-violets
f : de 8.10^{14} à 3.10^{17} Hz ; λ de $3,8.10^{-7}$ à 6.10^{-10} m ;
W : de 3 à 2.10^{3} eV.
Ces ondes sont générées par des sources chaudes, mettant en jeu des énergies élevées, telles que le soleil ou les décharges électriques. Vu que certains micro-organismes qui absorbent le rayonnement UV sont détruits, ces ondes sont utilisées dans certaines applications médicales et certains procédés de stérilisation.
Le rayonnement ultra-violet du soleil interagit également avec les atomes de la haute atmosphère, produisant ainsi de nombreux ions. Ceci explique pourquoi la haute atmosphère à des altitudes supérieures à 80 km est fortement ionisée, on l'appelle pour cette raison *l'ionosphère*.

6) Rayons X
f : de 3.10^{17} à 5.10^{19} Hz ; λ : de 10^{-9} à 6 10^{--12} m ;
W : de $1,2.10^{3}$ à $2,4.10^{5}$ eV..

La méthode la plus commune de production des rayons X consiste à accélérer un faisceau d'électrons par un potentiel de plusieurs kV et qui tombe sur une plaque métallique.
Sont dangereux, sont utilisées par exemple en radioscopie, mais pendant une durée très brève. L'absorption relativement plus grande des os par rapport au tissu permet une « photographie » précise. Les rayons X sont utilisés dans le traitement du cancer, dans la mesure où ils semblent avoir tendance à détruire les tissus malades plus rapidement que les tissus sains.

7) Rayons γ
f : de 3.10^{18} à 5.10^{22} Hz ; λ : de 10^{-10} à 6 10^{--14} m ;
W : de 10^{4} à 10^{7} eV.
D'origine nucléaire, produits par les corps radio-actifs et sont présents dans les réacteurs nucléaires ; l'absorption des rayons γ peut donc produire des modifications à l'intérieur du noyau.