Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès. Semestre-4
Faculté des Sciences de l'Ingénieur. Chapitre N°1.
2ème Année L.M.D-Sciences & Techniques. T.D. N°1

Les Fonctions Holomorphes.

On notera $z = x + iy$ avec x et y des réels.

Exercice 1

Montrer que toutes les fonctions dérivables de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions réelles constantes.

Exercice 2

Déterminer toutes les fonctions holomorphes f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et telle que $f(z) = g(x) + ih(y)$, où g et h sont deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Dire si les fonctions suivantes sont dérivables de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$? a, b et m sont trois réels donnés.

$$f(z) = (ax - iby)^2 + i(bx + aiy), \qquad g(z) = m\frac{x^4 + y^4}{1 + x^2 + y^2},\ h(z) = |z| + i\,\mathscr{R}e(z).$$

$$k(z) = \mathrm{e}^{xy}\cos\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right) - i\,\mathrm{e}^{xy}\sin\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right), \qquad \ell(z) = (\mathrm{e}^x\cos y + i\,\mathrm{tg}\,y) + i(\mathrm{e}^x\sin y + ix^2),$$

$$m(z) = \frac{\overline{z}}{z^2 + 1} - \overline{z}^2, \qquad n(z) = \mathrm{Log}\,|z| + i\,\mathrm{Arctg}\,\frac{z - \overline{z}}{i(z + \overline{z})}.$$

Exercice 4

Montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques. α, et β des réels donnés.

$$u_1(x,y) = 2x^2 - 2y^2 + 3y, \qquad u_2(x,y) = \mathrm{sh}\,2x\cos 2y,$$

$$u_3(x,y) = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y), \qquad u_4(x,y) = e^{-2xy}\sin(x^2 - y^2),$$

$$u_5(x,y) = \alpha\log(x^2 + y^2) + \beta, \qquad u_6(x,y) = \mathrm{e}^{x^2 - y^2}\cos(2xy).$$

Déterminer v_k la fonction harmonique conjuguée de u_k . Exprimer $u_k + iv_k$ à l'aide de la seule variable z.

Exercice 5

Peut-on déterminer une fonction f, dérivable de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$, telle que $\mathscr{R}e\, f(z) = \mathrm{Arctg}(y/x)$, et $f(1 + i) = \pi/4$? Dans l'affirmatif, en déduire une fonction g, dérivable de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\mathscr{I}m\ g(z) = \mathrm{Arctg}(y/x)$; (on utilisera la détermination principale du logarithme) .

Exercice 6

Trouver toutes les fonctions harmoniques de la forme :

1. $u(x,y) = \varphi(x^2 - y^2), \varphi$ fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à préciser.
2. $P(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \alpha x + \beta y + \gamma$.

Préciser le conjugué harmonique de $u(x,y)$ et de $P(x,y)$.

Exercice 7

Soit (u,v) un couple de fonctions harmoniques conjuguées dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$; les fonctions u et v ne s'annulent pas simultanément dans D. Montrer que la fonction

$$T(x,y) = \mathrm{Log}\,(u^2(x,y) + v^2(x,y))$$

est harmonique dans D.

Mr Amroun