Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès. Semestre-4
Faculté des Sciences de l'Ingénieur. Chapitre N*0.
2ème Année L.M.D-Sciences & Techniques. T.D. N*0

Les Nombres Complexes.

Exercice 1

Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants,

$\mathscr{A} = 1+(3+2i)^4$, $\mathscr{B} = -\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$, $\mathscr{C} = \left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^8$, $\mathscr{D} = \dfrac{1+ki}{2k+i(k^2-1)}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Donner le module et l'argument des nombres complexes suivants, $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathscr{L} = (\sin x + i\cos x)^n, \quad \mathscr{M} = 1+\cos x + i\sin x, \quad \mathscr{N} = \left(\frac{1+i\operatorname{tg} x}{1-i\operatorname{tg} x}\right)^n.$$

Exercice 3

Donner le module et l'argument des nombres complexes suivants,

$$\mathscr{P} = 1+i, \quad \mathscr{R} = 1+i\sqrt{3}, \quad \text{et} \quad \mathscr{T} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}.$$

En déduire $\sin\dfrac{\pi}{12}$ et $\cos\dfrac{\pi}{12}$. Donner les racines de l'équation $z^3 = 16(1+i)$ sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.

Exercice 4

Montrer que $|z| = 1$ si et seulement si $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$. En déduire que si a b et c sont trois nombres complexes de module 1, alors le nombre $\mathscr{P} = \dfrac{a+b}{1+ab}$ est réel ; et $|a+b+c| = |ab+bc+ac|$.

Exercice 5

Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{C}$, les égalités suivantes sont vérifiées :

1. $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2+|b|^2)$.
2. $|a\bar{b}+1|^2 + |a-b|^2 = (1+|a|^2)(1+|b|^2)$.
3. $|a\bar{b}-1|^2 - |a-b|^2 = (|a|^2-1)(|b|^2-1)$.

Exercice 6

Donner l'équation de la droite passant par les deux points $A(a)$ et $B(b)$, a et b deux nombres complexes donnés.

Exercice 7

Donner l'équation du cercle de centre $c \in \mathbb{C}$, et de rayon $r > 0$. Réciproquement, étudier l'ensemble $E = \{z \in \mathbb{C},\ \text{tel que } z\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} + b = 0\}$, où $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 8

Représenter dans le plan complexe les ensembles suivants :

$E = \{z \in \mathbb{C},\ /\ \mathscr{R}e(1/z) = 1/a,\ a > 0\}$,	$F = \{z \in \mathbb{C},\ /\ \mathscr{I}m[(z-1)/(z+1)] = 0\}$,
$G = \{z \in \mathbb{C},\ /\ z = r\,e^{it} + z_0, r > 0,\ t \in \mathbb{R}\ z_0 \in \mathbb{C}\}$,	$H = \{z \in \mathbb{C},\ /\ \lvert z-2+3i\rvert = 1\}$,
$K = \{z \in \mathbb{C},\ /\ \lvert z-2+3i\rvert = \lvert z+i\rvert\}$,	$L = \{z \in \mathbb{C},\ /\ \mathscr{R}e\, z^2 > \mathscr{I}m\, z^2\}$,
$M = \{z \in \mathbb{C},\ /\ z = (5-i)t+1, \text{où } t \in [0,5]\}$,	$N = \{z \in \mathbb{C},\ /\ 2 \leqslant \lvert z-2+3i\rvert \leqslant 4\}$,
$P = \{z \in \mathbb{C},\ /\ \pi/4 \leqslant \arg\,(z+i) \leqslant \pi/2\}$,	$R = \{z \in \mathbb{C},\ /\ (2-i)z + (2+i)\bar{z} = 1\}$.

Mr Amroun