Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès.
Faculté des Sciences de l'Ingénieur.
2 ème Année L.M.D. Sciences & Techniques.

TD. N° 1 Suites Numériques.

Exercice 1

1. Soient (u_n) et (v_n) 2 suites réelles définies par : $u_n = \sin n$ et $v_n = \cos n$.
En calculant $u_{n+1} + u_{n-1}$ et $v_{n+1} + v_{n-1}$, montrer que les 2 suites sont divergentes.
2. Quelle est la nature de la suite réelle suivante $w_n = \operatorname{tg} n$?

Exercice 2

1. Étudier les suites suivantes ; puis majorer et minorer, quand c'est possible, chacune d'elle.

a. $r_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ et $s_n = r_n + \dfrac{1}{n.n!}$, $\forall n > 0$.

b. $t_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n > 0$ on montre que (t_{2n}) et (t_{2n+1}) sont adjacentes.

c. $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$, $\forall n > 0$.

d. $w_n = 1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^3} \cdot$ $n > 0$

e. $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$, $n > 0$.

f. $y_0 > z_0 > 0$ et $\begin{cases} y_{n+1} = \dfrac{y_n + z_n}{2}, \\ z_{n+1} = \sqrt{y_n\, z_n}\ . \end{cases}$

2. Donner un majorant et un minorant, quand ils existent, pour chacune d'elles.
3. Calculer les trois premiers termes pour chaque suite.

Exercice 3

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On suppose que les trois sous-suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent respectivement vers A, B et C. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 4

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On suppose que les quatre sous-suites (u_{2n+1}), (u_{3n+2}) , (u_{7n+5}) et (u_{11n+5}) convergent toutes les quatre vers ℓ, la suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 5

On considère la suite réelle (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{n} \cdot$

1. Montrer, que pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_{2n} - u_n \geqslant \dfrac{1}{2}$ ·
2. Que peut-on en conclure.
3. Déterminer une valeur n telle que, l'on ait sûre que $u_n > 4$.

Exercice 6

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. A-t-on toujours

$$(u_n) \text{ est convergente } \iff \lim_{n\to\infty} (u_{n+p} - u_n) = 0, \qquad \forall p \in \mathbb{N}^*?$$