
CHAPITRE 4

LA TRANSFORMÉE DE FOURIER

4.1 Fonctions localement intégrables

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application.

Définition 4.1.1

On dit que f est localement intégrable sur I si f est intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans I .

C'est à dire, f est localement intégrable sur I , si quelque soit $[a, b] \subset I$, alors $\int_a^b f(x)dx$ existe.

Remarque 4.1.1

Il est clair que toutes les fonctions continues sont localement intégrables.

On note par $Loc(I, \mathbb{R}) = \{f : I \mapsto \mathbb{R} : f \text{ localement intégrable}\}$.

On a alors $C(I, \mathbb{R}) \subset Loc(I, \mathbb{R})$ et l'inclusion est stricte. Comme exemple la fonction $f(x) = [x]$, (partie entière de x) est localement intégrable mais non continue.

Proposition 4.1.1

L'ensemble $Loc(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, (espace de toutes les fonctions définies de I dans \mathbb{R}).

4.2 L'intégrale de Fourier

Pour conclure l'étude de la théorie des séries de Fourier, on examinera le cas limite où l'intervalle $] -\ell, \ell[$, dans lequel on étudie la série de Fourier, tend vers $] -\infty, \infty[$, c'est à dire lorsque $\ell \longrightarrow \infty$.

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur \mathbb{R} et telle que $I = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ converge.

On suppose que f satisfait aux conditions de Dirichlet et admet un développement en série de Fourier dans l'intervalle $[-\ell, \ell]$, $\ell > 0$. Donc il existe une fonction $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ périodique, de période $T = 2\ell = \frac{2\pi}{\omega}$, vérifiant les hypothèses de Dirichlet (donc développable en série de Fourier) telle que la restriction $g|_{[-\ell, \ell]} = f$.

Alors pour tout $x \in [-\ell, \ell]$ on a :

$$(a) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \right]$$

$$(b) \quad a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x) \cos(n\omega x) dx = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx$$

$$(c) \quad b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x) \sin(n\omega x) dx = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx$$

En remplaçant les quantités (b) et (c) dans (a), on a :

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx + \frac{1}{\ell} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \left(\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \right) dt \right] =$$

$$\frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx + \frac{1}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}(t-x)\right) dt \quad (1)$$

Nous allons étudier cette dernière intégrale quand $\ell \rightarrow \infty$.

Posons $\alpha_1 = \frac{\pi}{\ell}$, $\alpha_2 = \frac{2\pi}{\ell}$, ..., $\alpha_n = \frac{n\pi}{\ell}$ et $\Delta\alpha_n = \alpha_n - \alpha_{n-1} = \frac{\pi}{\ell}$.

En reportant dans l'expression (1) ci-dessus, on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \alpha_n(t-x) dt \right] \Delta\alpha_n$$

Posons $\varphi(\alpha_n) = \int_{-\ell}^{+\ell} f(t) \cos(\alpha_n(t-x)) dt$. Il résulte de cela

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varphi(\alpha_k) \Delta\alpha_k = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos(\alpha_k(t-x)) dt \right) \Delta\alpha_k$$

Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(\alpha_k) \Delta\alpha_k = \int_{\pi/\ell}^{\infty} \varphi(\alpha) d\alpha \quad (\text{l'intégrale de Riemann.})$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(\alpha_k) \Delta\alpha_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos(\alpha_k(t-x)) dt \right) \Delta\alpha_k \right].$$

$$\text{Ainsi } \frac{1}{\pi} \int_{\pi/\ell}^{\infty} \varphi(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/\ell}^{\infty} \left(\int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos(\alpha(t-x)) dt \right) d\alpha.$$

Comme

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\pi/\ell}^{\infty} \varphi(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\alpha) d\alpha$$

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\pi/\ell}^{\infty} \left[\int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos(\alpha(t-x)) dt \right] d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\alpha(t-x)) dt \right] d\alpha.$$

On a finalement la relation pour f continue :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\alpha(t-x)) dt \right] d\alpha$$

Cette dernière expression est appelée intégrale de \mathcal{F} ourier. Cette égalité a lieu en tout point x où f est continue.

Si f possède des discontinuités, on a la formule valable pour tout x :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\alpha(t-x)) dt \right] d\alpha = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

Posons maintenant $\phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\alpha(t-x)) dt$. Il est clair que $\phi(-\alpha) = \phi(\alpha)$ et donc ϕ est paire et par suite $\int_0^{\infty} \phi(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\alpha) d\alpha$.

On a finalement :

L'intégrale de \mathcal{F} ourier .

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\alpha(t-x)) dt \right] d\alpha$$

4.2.1 forme complexe de l'intégrale de \mathcal{F} OURIER

Posons $\psi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\alpha(t-x)) dt$.

ψ est une fonction impaire et donc pour tout $a > 0$, $\int_{-a}^a \psi(\alpha) d\alpha = 0 = \int_{-a}^a \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\alpha(t-x)) dt \right] d\alpha$.

Donc

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \psi(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\alpha(t-x)) dt \right] d\alpha = 0.$$

On dit dans ce cas que l'intégrale converge en valeur principale de Cauchy vers 0. Ceci

implique qu'on a aussi $\frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\alpha(t-x)) dt \right] d\alpha = 0$ et donc ;

Forme complexe de l'intégrale de \mathcal{F} ourier .

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha(t-x)} dt \right] d\alpha.$$

Posons :

$$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \widehat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt;$$

alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha(t-x)} dt \right] d\alpha = \frac{2\pi f(x)}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{2\pi} f(x).$$

On peut écrire généralement si f possède des discontinuités :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

Maintenant on peut définir la notion de transformée de \mathcal{F} ourier.

4.3 Transformée de Fourier

Définition 4.3.1

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable et absolument intégrable sur \mathbb{R} .

On définit la transformée de Fourier de f , la fonction notée \widehat{f} ou $\mathcal{F}(f)$ de $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$; et sa transformée inverse de $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ par :

	<p><u>Transformée de Fourier .</u></p> $\mathcal{F}(f)(\alpha) = \widehat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x} dx$
	<p><u>Transformée inverse de Fourier .</u></p> $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\alpha)e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$

Exemple 4.3.1

Soit $f(x) = e^{-|x|}$.

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^x e^{-i\alpha x} dx + \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-i\alpha x} dx \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{(1-i\alpha)x} dx + \int_0^{\infty} e^{-(1+i\alpha)x} dx \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1+i\alpha} + \frac{1}{1-i\alpha} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+\alpha^2}. \end{aligned}$$

Puisque f est continue sur \mathbb{R} , La transformée inverse donne :

$$\begin{aligned} f(x) = e^{-|x|} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\alpha)e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha^2} e^{i\alpha x} d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha + i \cdot 0; \end{aligned}$$

d'où :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}.$$

En particulier on a ; $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}$.

4.4 Propriétés

Lemme 4.4.1 (Riemann)

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{K}$ une fonction intégrable sur $[a, b]$. Alors les fonctions $f(t) \cos at$ et $f(t) \sin at$ sont intégrables dans $[a, b]$ pour tout a dans \mathbb{R} et on a :

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(t) \cos at dt = \lim_{\alpha \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(t) \sin at dt = 0$$

Preuve.

f intégrable sur $[a, b]$ implique que pour tout $\varepsilon > 0$,
il existe une subdivision de $[a, b]$ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$
et une fonction en escalier,

$$g : [a, b] \mapsto \mathbb{R} \text{ telles que } |f(t) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

$$\left| \int_a^b (f(t) - g(t)) \cos at dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - g(t)| |\cos at| dt \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, dans chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$, la fonction g est constante et vaut $g|_{]x_k, x_{k+1}[}(t) = c_k$.

On a alors,

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t) \cos at dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(t) \cos at dt = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos at dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(\frac{\sin at}{\alpha} \right)_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} c_k (\sin \alpha x_{k+1} - \sin \alpha x_k) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \pm\infty} 0. \end{aligned}$$

Et par suite,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(t) \cos at dt = 0.$$

Raisonnement identique pour la deuxième intégrale.

Théorème 4.4.1

<p>Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable et absolument intégrable sur \mathbb{R}. Alors</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $\widehat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x} dx$ est normalement convergente. 2. \widehat{f} est bornée. 3. $\lim_{\alpha \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(\alpha) = 0$
--

Preuve.

1. C'est immédiat car $|f(x)e^{-i\alpha x}| = |f(x)|$ qui est intégrable sur \mathbb{R} par hypothèse.

$$2. |\widehat{f}(\alpha)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-i\alpha x}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = M.$$

$$3. \text{ Posons } I(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a |f(x)| dx.$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = I \text{ existe.}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $b > 0$ tel que $|I - I(b)| = I - I(b) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\alpha)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x} dt \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-b} f(x)e^{-i\alpha x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b f(x)e^{-i\alpha x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x} dx \right| \leq \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-b} |f(x)| dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-b}^b f(x)e^{-i\alpha x} dx \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^{\infty} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Donc $|\widehat{f}(\alpha)| \leq I - I(b) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-b}^b f(x)e^{-i\alpha x} dx \right|$.

Comme la fonction $f(x)e^{-i\alpha x}$ est localement intégrable, d'après le lemme de Riemann (4.4.1),

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pm\infty} \int_{-b}^b f(x)e^{-i\alpha x} dx = 0.$$

Il existe alors $M > 0$, tel que pour tout $|\alpha| \geq M$, on a $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-b}^b f(x)e^{-i\alpha x} dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Il résulte que pour tout $|\alpha| \geq M$, $|\widehat{f}(\alpha)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ce qui traduit le fait que $\lim_{\alpha \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(\alpha) = 0$.

Notations.

- $\mathcal{H} = \left\{ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} : f \in \text{Loc}(\mathbb{R}) \text{ et } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty \right\}$.
- $\mathcal{B} = \left\{ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} : \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \right\}$.
- D : opérateur de dérivation définie sur l'ensemble des fonction dérivables $D(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par $Df = f'$.
- P : opérateur défini dans l'ensemble des fonctions $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par $(Pf)(x) = xf(x)$.
- $\widehat{f}(\alpha) = \mathcal{F}(f(x))(\alpha)$

Théorème 4.4.2 [Dérivée de la transformée de Fourier]

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction satisfaisant aux conditions suivantes :

- i) $f \in \mathcal{H}$
- ii) f continue
- iii) $Pf \in \mathcal{H}$

Alors $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (fonctions continûment dérivables) et on a :

$$\mathcal{F}'(f(x))(\alpha) = -i\mathcal{F}(xf(x))(\alpha)$$

Preuve.

Soit la fonction $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ définie par $\varphi(t, x) = f(t)e^{-itx}$.

φ possède les propriétés suivantes :

- a) φ est continue comme produit de deux fonctions continues
- b) $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) = -itf(t)e^{-itx} = -it\varphi(t, x)$ est continue
- c) L'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, x)dt$ est normalement convergente car $|\varphi(t, x)| = |f(t)|$ et $f \in \mathcal{H}$
- d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x)dt$ est normalement convergente car $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) \right| = |tf(t)| = |(Pf)(t)|$ et $Pf \in \mathcal{H}$

Pour ces raisons $\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, x)dt$ est dérivable dans \mathbb{R} et on a :

$$(\widehat{f})'(x) = (D\widehat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x)dt = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [tf(t, x)]e^{-itx} dt$$

Ce qui se traduit par $(D\widehat{f})(x) = -i(\widehat{Pf})(x)$ ou $i(D\widehat{f})(x) = \widehat{(Pf)}(x)$ en multipliant par i chaque membre.

Théorème 4.4.3 [Transformée de \mathcal{F} ourier de la dérivée]

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction satisfaisant aux conditions suivantes :

1. $f \in \mathcal{K}$
2. $f \in C^1(\mathbb{R})$
3. $Df \in \mathcal{K}$

Alors $f \in \mathcal{B}$ et

$$\mathcal{F}(f'(x))(\alpha) = i\alpha \mathcal{F}(f(x))(\alpha)$$

Preuve.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$. Puisque $Df \in \mathcal{K}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|dt$ est convergente et par suite $\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)dt$ converge. D'où $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$ existe. Montrons que $\ell = 0$.

Pour cela, on fait un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\ell \neq 0$.

a) Supposons $\ell > 0$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$. Par définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \geq M$ on a : $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$. Choisissons ε tel que $\ell - \varepsilon > 0$. Il résulte alors que $f(x) > 0$

pour tout $x \geq M$. Donc $\int_M^a (\ell - \varepsilon)dx \leq \int_M^a f(x)dx \leq \int_M^a (\ell + \varepsilon)dx$ puis lorsqu'on fait tendre $a \rightarrow \infty$, on obtient $\int_M^{\infty} f(x)dx \geq \infty$ et par conséquent $\int_M^{\infty} f(x)dx$ diverge. Il en est de même

pour $\int_0^{\infty} f(x)dx = \int_0^M f(x)dx + \int_M^{\infty} f(x)dx$. D'où contradiction car $f \in \mathcal{K}$.

b) Supposons que $\ell < 0$.

On prend $(-f)$ et on adopte le même raisonnement. Conclusion $\ell = 0$.

Exercice.

En s'inspirant de cette démonstration, montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

$$2) i(\widehat{Pf})(x) = ix\widehat{f}(x) = \frac{ix}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ix f(t)e^{-itx} dt.$$

Une intégration par parties avec $u = f$ et $dv = ix e^{-itx} dt$, on obtient :

$$i(\widehat{Pf})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-itx} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-itx} dt \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-itx} dt = \widehat{(Df)}(x).$$

4.5 Quelques propriétés de la transformation de \mathcal{F} ourier

Adoptons la notation $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$.

4.5.1 Linéarité

Soient $f, g \in \mathcal{K}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \mathcal{F}(f)(x) + \beta \mathcal{F}(g)(x)$.

La démonstration de cette propriété est simple.

4.5.2 Transformée de Fourier de la translation.

Soit $T \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une application. On note $f_T(x) = f(x - T)$.

Si $f \in \mathcal{H}$.

$$\mathcal{F}(f_T)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_T(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - T) e^{-i\alpha x} dx. \text{ On pose } x - T = t.$$

$$\text{Alors } \mathcal{F}(f_T)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(t+T)\alpha} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} e^{-i\alpha T} dt =$$

$$\frac{e^{-i\alpha T}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt.$$

$$\text{Donc } \mathcal{F}(f_T)(\alpha) = e^{-i\alpha T} \mathcal{F}(f)(\alpha).$$

4.5.3 Transformée de Fourier de l'homothétie

Soit $k > 0$ et soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. On note $f_k(x) = f(kx)$.

Si $f \in \mathcal{H}$,

$$\mathcal{F}(f_k)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(kx) e^{-i\alpha x} dx.$$

En posant $kx = t$, on obtient :

$$\mathcal{F}(f_k)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha (t/k)} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it(\alpha/k)} dt \right] = \frac{1}{k} \mathcal{F}(f) \left(\frac{\alpha}{k} \right).$$

4.5.4 Produit de convolution

Problème : Étant données deux fonctions f et g et leurs transformées de Fourier $\mathcal{F}(f)(\alpha)$ et $\mathcal{F}(g)(\alpha)$, peut-on trouver une fonction k telle que

$$\mathcal{F}(k)(\alpha) = \mathcal{F}(f)(\alpha) \cdot \mathcal{F}(g)(\alpha)?$$

Solution

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\alpha) \cdot \mathcal{F}(g)(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-i\alpha y} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y) e^{-i\alpha(x+y)} dx dy \end{aligned}$$

Posons : $x + y = t$ et donc $dy = dt$, l'intégrale double devient :

$$\mathcal{F}(f)(\alpha) \cdot \mathcal{F}(g)(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) e^{-i\alpha t} dx dt$$

Posons : $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) dx$, on a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\alpha) \cdot \mathcal{F}(g)(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\alpha t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\alpha t} dt \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(h)(\alpha) \end{aligned}$$

En posant $k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}h(t)$, la fonction k est solution du problème posée.

Définition 4.5.1

Soit $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur \mathbb{R} . On appelle produit de convolution de f par g , la fonction notée $f \star g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx$

Proposition 4.5.1

Le produit de convolution est commutatif ; et on a :

$$\mathcal{F}(f \star g)(\alpha) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(\alpha)\mathcal{F}(g)(\alpha)$$

Preuve :

La preuve découle directement de la définition ; puisque :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}(f)(\alpha) \cdot \mathcal{F}(g)(\alpha) = \mathcal{F}(g)(\alpha) \cdot \mathcal{F}(f)(\alpha)$$
Exercice 1

Démontrer la commutativité directement à partir de la définition intégrale.

En effet dans l'intégrale $(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx$, on fait le changement de variable en posant $t-x=y$. On obtient :

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-y)f(y)dy = (g \star f)(t).$$

Théorème 4.5.1 [Égalité de Parseval]

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ admettant une transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$.
Alors on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f)(\alpha)|^2 d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

4.6 « Sinus et Cosinus-transformées » de Fourier**Définition 4.6.1**

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction absolument intégrable sur \mathbb{R} .

1. On appelle cosinus-transformée de Fourier de f , la fonction :

$$\widehat{f}_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx$$

L'expression

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \widehat{f}_c(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha$$

est appelée inverse de cosinus-transformée de Fourier de f .

2. On appelle sinus-transformée de Fourier de f , la fonction :

$$\widehat{f}_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx$$

L'expression

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \widehat{f}_s(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha$$

est appelée inverse de sinus-transformée de Fourier de f .

Remarque 4.6.1

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction admettant une transformée de Fourier \widehat{f} .

a) Si f est paire.

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos(\alpha x) - i \sin(\alpha x)) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx. \end{aligned}$$

Or la fonction $x \mapsto f(x) \cos(\alpha x)$ est paire et la fonction $t \mapsto f(x) \sin(\alpha x)$ est impaire. Il s'ensuit alors :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx \text{ car } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx = 0. \text{ D'où :} \\ &\parallel \widehat{f}(\alpha) = \widehat{f}_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx \end{aligned}$$

b) Si f est impaire.

Avec le même raisonnement on obtient l'expression :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx. \text{ D'où :} \\ &\parallel \widehat{f}(\alpha) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx = -i \widehat{f}_s(\alpha). \\ &\parallel \widehat{f}_s(\alpha) = i \widehat{f}(\alpha). \end{aligned}$$