FACULTÉ DES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

Physique 1 : Mécanique

TD 3 : Cinématique

Exercice 01

Un corps se déplace selon l'axe des x suivant la loi $x(t) = 2t^3 + 5t^2 + 5$, x est en mètre et t en seconde. Trouver

1- sa vitesse et son accélération à chaque instant ;
2- sa position, sa vitesse et son accélération pour t=2 s et t=3s ;
3- sa vitesse et son accélération moyennes entre t=2 s et t=3 s.

Exercice 02

Un mobile en mouvement rectiligne a une accélération $\gamma = 1/t^2$. Sa vitesse initiale à l'instant $t_0 = 1s$ et au point $x = 1$ est nulle.

1- quelle est sa vitesse instantanée $v(t)$?
2- quelle est sa position instantanée $x(t)$?

Exercice 03

Monter que pour un mouvement rectiligne uniformément varié, on a :

$$v^2 - v_0^2 = 2\gamma_0(x - x_0)$$

Exercice 04

Une particule de masse m décrit la trajectoire d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = R\sin \omega t \\ y(t) = R(1 - \cos \omega t) \\ z(t) = bt \end{cases}$$

où R, b et ω sont des constantes positives.

Déterminer

1. La vitesse de la particule ;
2. L'accélération ;
3. Déterminer la trajectoire de la particule puis la représenter.

Exercice 05

Soit la courbe trajectoire de M définie par :

$x = v_1 \cdot t + x_0$; $y = -c \cdot t^2 + v_2 \cdot t + y_0$; $t \in [0, +\infty[$

($v_1, v_2, c; x_0$ et y_0 étant des constantes positives)

1. Représenter la trajectoire ;
2. Quelle est le module de la vitesse v(t) à l'instant t ?; Calculer ce module pour t_1 pour lequel cette vitesse est minimale ;
3. Calculer à t_2 pour lequel $v(t_2) = v(t = 0)$; Calculer $y(t_2)$ et conclure.

Exercice 06

On considère un cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2 \cdot a \cdot x = 0$ et un point mobile sur ce cercle. Soit θ l'angle du rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec $\overrightarrow{x}$. Cet angle est fonction du temps selon la loi : $t = \dfrac{\alpha}{\tan(\theta)}$

avec, α constante strictement positive.

1. Trouver les équations paramétriques de M : x(t) et y(t) ;
2. Calculer la vitesse du point M.

Exercice 07

Les coordonnées polaires d'un point en mouvement sont $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$ et $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta$, $\overrightarrow{u_r}$ étant le vecteur unitaire de l'axe $\overrightarrow{OM}$.

1. Quelles sont les composantes radiales et tangentielles de la vitesse $\overrightarrow{v}$?
2. quelles sont les composantes radiales et tangentielles de l'accélération $\overrightarrow{\gamma}$?

Exercice 08

Démontrer que pour un mouvement circulaire et uniforme d'un point M, l'accélération peut se mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\omega} \wedge (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{r})$$

$\overrightarrow{\omega}$: vitesse angulaire ;

$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$: le vecteur position.

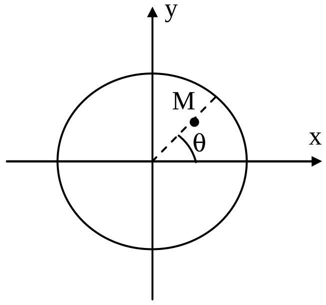
Calculer le module de $\overrightarrow{\gamma}$ dans le cas où :

$$\overrightarrow{\omega} = 3\overrightarrow{k} \quad et \quad \overrightarrow{r} = 5\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$$

Exercice 09

Soit un plateau de manège tournant à vitesse angulaire constante ω. Un observateur, assimilé à un point M, part du centre O et marche uniformément le long d'un rayon du plateau (voir fig. 1) Déterminer l'équation de sa trajectoire en coordonnées polaires dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ lié au sol. Tracer l'allure de la courbe.

Fig. 1



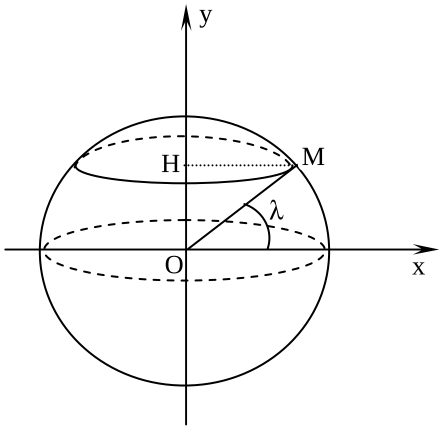
Exercice 10

Une sphère de rayon R est mise en rotation à la vitesse angulaire constante ω, autour d'un axe (Δ) passant par son centre O.

1. Déterminer la vitesse linéaire v d'un point M situé sur la sphère à latitude λ (angle entre OM et le plan équatorial de la sphère) ;
2. En déduire le module de l'accélération γ du point M ;
3. Application numérique. Calculer v et γ dans le cas où le point M est un point situé sur la surface de la terre (la terre étant assimilée à une sphère de centre O et de rayon R).

On donne R= 6380 km, λ=45° et période de révolution de la terre, T=24 h.

Fig. 2



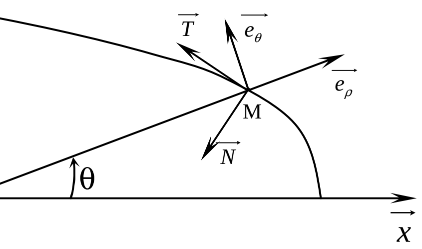
Exercice 11
Deux mobiles M_1 et M_2 se déplacent à vitesse constante selon deux directions orthogonales et se dirigent tous deux vers un point fixe A.
Déterminer la vitesse du mobile M_1 par rapport au mobile M_2.

Exercice 12
Une particule soumise à des champs électriques et magnétiques complexes est en mouvement dans un référentiel galiléen. Les équations de la trajectoire sont, en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} r = r_0 \cdot e^{-\frac{t}{a}} \\ \theta = \dfrac{t}{a} \end{cases}$$

Avec, r_0 et a constantes positives.

Fig. 3



1. Calculer le vecteur vitesse de la particule ;
2. Montrer que l'angle $\left(\vec{v}, \vec{e_\theta}\right)$ est constant. Que vaut cet angle?
3. Calculer le vecteur accélération de la particule ;
4. Montre que l'angle $\left(\vec{\gamma}, \vec{N}\right)$ est constant. Que vaut cet angle ? (on se servira de la question 2) ;
5. Calculer le rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 13
Un anneau de faibles dimensions, assimilable à un point matériel M de masse m, glisse sans frottement sur une tige rigide (D). La tige (D) tourne dans un plan horizontal (Oxy) autour de l'axe vertical Oz avec la vitesse angulaire $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$, où

θ représente l'angle orienté $\left(\vec{i}, \vec{u_r}\right)$ et $\vec{u_r}$ un vecteur unitaire de (D) voir Fig. 4.
Le mouvement du point matériel M sur la droite (D) est décrit par l'équation horaire :

$$r = r_0(1 + \sin \omega t)$$

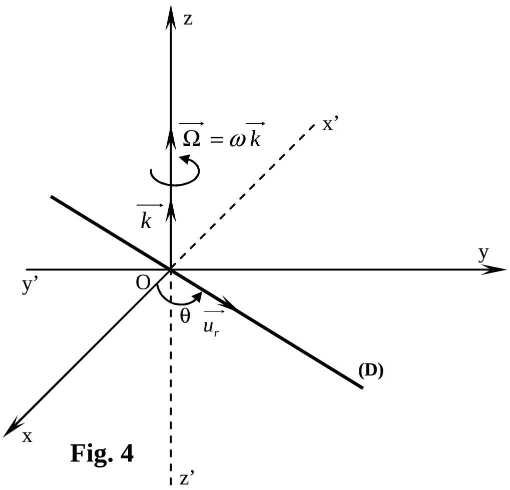


Fig. 4

où r_0 est une constante positive et $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\,\vec{u_r}$.
On appelle mouvement relatif de M son mouvement sur la droite (D) et mouvement absolu son mouvement par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Déterminer, pour l'anneau, dans la base $\left(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}\right)$:
1. la vitesse et l'accélération relatives ;
2. la vitesse et l'accélération d'entraînement ;
3. l'accélération de Coriolis.

Exercice 14
Soit le système suivant, voir Fig. 5, composé de deux tiges. La première tige est en rotation autour du centre O_0 relativement au référentiel galiléen. Une seconde tige est en rotation autour du centre O_1 relativement à la première tige.
1. On s'intéresse au mouvement de la tige (2) relativement à un référentiel R_1 lié à la tige (1). On travaillera dans le repère $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$. L'angle ψ(t) évolue de manière quelconque.
a. En se plaçant en coordonnées polaires dans le référentiel R_1, donner la position, la vitesse et l'accélération du point M ;
b. Sur un schéma, tracer les vecteurs $\vec{e_\rho}$, $\vec{e_\theta}$, $\overrightarrow{v_{/R_1}(M)}$, $\overrightarrow{\gamma_{/R_1}(M)}$ ainsi que les vecteurs accélération tangentielle et accélération normale $\overrightarrow{\gamma_{N/R_1}(M)}$ et $\overrightarrow{\gamma_{T/R_1}(M)}$;
c. Donner en coordonnées cartésiennes, les vecteurs position, vitesse, accélération du point M relativement au référentiel R_1 ;
2. On se place maintenant dans le référentiel R_0. On travaillera dans la base $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$. L'angle θ(t) évolue de manière quelconque. Tous les résultats seront donnés en coordonnées cartésiennes en projection sur la base (x_1, y_1, z_1).
a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\omega_{R_1/R_2}}$ dans la base (1) ;
b. Calculer la vitesse du point P appartenant à (1), point coïncidant au point M, relativement au référentiel R_0, en projection dans la base (1). (Vitesse d'entraînement);
c. Calculer l'accélération du point P appartenant à (1), point coïncidant au point M, relativement au référentiel R_0, en projection dans la base (1);
d. Calculer l'accélération de Coriolis du point M de vitesse relative $\overrightarrow{v_{/R_1}(M)}$, relativement au référentiel R_0, en projection dans la base (1) ;
e. Déduire des questions précédentes la vitesses et l'accélération absolue du point M : $\overrightarrow{v_{/R_0}(M)}$ et $\overrightarrow{\gamma_{/R_0}(M)}$.

Fig. 5