CHAPITRE 2

SUITES NUMÉRIQUES

Définition 2.0.1 *Une suite réelle est une application* $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *qui à tout* n *de* $\mathbb{N}$ *associe un élément* u_n *de* $\mathbb{R}$*, appelé* terme général *de la suite. On notera donc la suite* (u_n)*, ou* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

`Remarque 1 :`

1. Dans certains cas on ne prend qu'une partie de $\mathbb{N}$.
2. Si l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{C}$, (u_n) sera dite suite complexe.
3. Tous les résultats donnés feront référence à des suites réelles. Les résultats cependant valables pour les suites complexes, et dont les démonstrations ne subissent aucunes modifications suite aux différences entre la valeur absolue et le module, seront indiqués par une astérisque.

2.1 Suites monotones

Définition 2.1.1 *Soit* (u_n) *une suite de nombres réels. On dit que* (u_n) *est* croissante *(resp.* décroissante*) si*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant u_n \qquad \textit{(resp. } u_{n+1} \leqslant u_n\textit{).}$$

De plus, (u_n) *est dite* monotone *si elle est croissante ou décroissante. Enfin, l'adverbe* strictement *s'applique si ce sont les inégalités strictes qui sont vérifiées.*

`Remarques 1 :`

– On peut définir la monotonie à partir d'un certain rang, ce qui peut s'avérer très pratique par exemple dans l'étude des limites ;

– Pour étudier la monotonie d'une suite (u_n), on peut :

  1. étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout n,
  2. comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (pour tout n), à condition que la suite (u_n) ne comporte pas de termes nuls,
  3. étudier les variations de la fonction f s'il existe f telle que $f(n) = u_n$.

Exemples :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $u_n = n^2$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\begin{aligned} & u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = (n+1-n)(n+1+n) = 2n+1 > 0 \\ \iff & u_{n+1} > u_n. \end{aligned}$$
   La suite (u_n) est donc strictement croissante.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\begin{aligned} & \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 > 1 \\ \iff & u_{n+1} > u_n. \end{aligned}$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$.
   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, sa dérivée vaut $(2-\ln x)\dfrac{\ln x}{x^2}$. Cette fonction est strictement décroissante sur l'intervalle $]\,\mathrm{e}^2, +\infty[$, ($e^2 \approx 7,389\ 056\ \ldots$). Par conséquent, la suite $(u_n) = \left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$ est strictement décroissante pour $n \geqslant 8$.
   (**Remarque :** *la suite est strictement décroissante pour $n \geqslant 7$).*

2.2 Suites bornées

1. Une suite (u_n) est dite **majorée**, s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$.
2. Une suite (u_n) est dite **minorée**, s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$.

Exemple 2.2.1 *1. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)}$, on a :*

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \quad = 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1. \end{aligned}$$

Finallement, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$, notre suite est minorée par $\frac{1}{2}$ et c'est un minimum puisque $u_1 = \frac{1}{2}$. et elle est croissante, car $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$.

La suite est majorée par 1 et ce n'est pas un maximum, car $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1} \neq 1$.

Définition 2.2.1 ** Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que (u_n) est bornée si*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists M > 0 /\ |u_n| < M.$$

La suite (u_n) définie par $u_n = \sin n + \cos n$ est bornée, en effet on a $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant 2$.
Montrer que l'ensemble $\mathbf{A} = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, a pour bornes supérieure et inférieure $\pm\sqrt{2}$ mais n'a ni maximum ni minimum.

2.3 Suites périodiques

Définition 2.3.1 ** Une suite (u_n) est dite* **périodique**, *s'il existe un nombre $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n$.*

Exemples :

1. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = (-1)^n$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (-1)^{n+2} = (-1)^n(-1)^2 = u_n$. La suite u_n est périodique de période égale à 2.
2. La suite u_n de terme général $u_n = \sin n$, n'a pas de période, car dans $\mathbb{R}$ la fonction $\sin x$ a pour période $p = 2\pi$; or 2π n'est pas un entier.

`Remarques 1` :

- Une suite de période p, ne prend qu'un nombre fini de valeurs à savoir $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$.
- La réciproque est fausse, par exemple $u_0 = 3, u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 1, u_4 = 5, \ldots, u_{32} = 0, \ldots$ où u_n est le $n^{\text{ème}}$ chiffre après la virgule dans l'écriture décimale du nombre π.
  ($\pi \approx$3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 $\cdots$)
  La suite ne prend évidemment que les nombres $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- Pour les nombres rationnels, à partir d'un certain rang la suite est périodique. Elle sera considérée comme suite périodique.
  Pour les décimales du nombre $\frac{123}{456}$, la suite est périodique de période 18 qu'à partir de la quatrième décimale, on a $\forall n \geqslant 4, u_n = u_{n+18}$.
-

$$\begin{aligned}\frac{123}{456} &= 0,269\ 736842105263157894\ 736842105263157894\ 736842105263157894\ldots\\ &= 0,269\ \overline{736842105263157894}.\end{aligned}$$

Convergence des suites numériques

Définition 2.3.2 ** Une suite (u_n) est dite convergente, et admettant pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On dit alors que « (u_n) tend (ou converge) vers ℓ », et l'on note $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} u_n = \ell$ ou $u_n \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{} \ell$.

Une suite non convergente est dite **divergente.**

Proposition 2.3.1 ** Si une telle limite existe, alors elle est unique.*

Preuve :
Supposons qu'une suite (u_n) converge vers deux éléments $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ distincts.
On se donne $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, on a alors l'existence de deux entiers N_1, N_2 de $\mathbb{N}$ tels que $\forall\, n \geqslant N_1, |u_n - \ell_1| < \varepsilon/2$ et $\forall\, n \geqslant N_2, |u_n - \ell_2| < \varepsilon/2$.
Alors, pour tout entier $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, on aura

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2| \leqslant |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| < \varepsilon.$$

Avec $\varepsilon = |\ell_1 - \ell_2| > 0$, on about à la contradiction $|\ell_1 - \ell_2| < |\ell_1 - \ell_2|$, donc $\ell_1 = \ell_2$.

`Remarque 2` : $(u_n) \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{} \ell \Longleftrightarrow |u_n - \ell| \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{} 0$.

Exemples :

1. Les suites de termes généraux $u_n = 1/n$ et $v_n = 1/\sqrt{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) convergent vers 0.
2. La suite de terme général $u_n = \sin(n\frac{\pi}{2})$ ($n \in \mathbb{N}$) est divergente.
   Preuve :
   Supposons que (u_n) admette pour limite $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon = 1/4$. On aurait alors l'existence d'un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que tout $n \geqslant N$ vérifie $|u_n - \ell| < 1/4$. Or tout $n \geqslant N$ vérifie aussi
   $$|u_{n+1} - u_n| = \left|\sin\frac{(n+1)\pi}{2} - \sin\frac{n}{2}\pi\right| = 1 \leqslant |u_{n+1} - \ell| + |\ell - u_n| = 1/2,$$
   ce qui est absurde. Donc (u_n) est bien divergente.

Proposition 2.3.2 *:*

(i) Toute suite convergente est bornée ;

(ii) Toute suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) est convergente ;

(iii) (*) Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell| \in \mathbb{R}$.

Preuve :

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Supposons que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors par définition, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geqslant N, |u_n - \ell| < \varepsilon$, c'est-à-dire $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$. Ainsi, la suite (u_n) prend les valeurs $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$ et des valeurs dans l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. Or, puisque $|\ell - \varepsilon|$ et $|\ell + \varepsilon|$ sont deux réels inférieurs à $|\ell| + \varepsilon$ (inégalité triangulaire), il vient que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant \sup\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, |\ell| + \varepsilon\}$, et (u_n) est bornée.

(ii) Notons M un majorant de (u_n). Soient $\varepsilon > 0$, $K = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = \sup(K)$. K étant non vide et majoré par M, ℓ existe par l'axiome de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Il vient qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon < u_n \leqslant \ell < \ell + \varepsilon$, soit $|u_n - \ell| < \varepsilon$, et la suite (u_n) converge.

(iii) Découle immédiatement de la relation $\big|\ |a| - |b|\ \big| \leqslant |a - b|$.
Ou encore, découle du théorème 3 vu plus loin, étant donné que l'application $x \longmapsto |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ y est continue, en particulier au point ℓ.

`Remarque 2` : La réciproque de la proposition précédente est fausse. En effet, la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ ($n \in \mathbb{N}$) contredit les trois points : elle n'est pas convergente (raisonner par l'absurde), mais est bornée (par 1), sa valeur absolue converge vers 1 et la sous-suite (u_{2n}) converge vers 1.
pour les suites divergentes, nous en distinguerons

Définition 2.3.3 *Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ (resp.$-\infty$)si,*

$$\forall\ A > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N} \ /\ \forall\ n \geqslant N, \quad u_n > A\ (resp.\ \ u_n < -A).$$

On dit alors que « (u_n) tend vers $+\infty$ », et l'on note $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{} +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{} -\infty$.)

2.4 Premiers résultats importants

2.4.1 Opérations algébriques

Théorème 2.4.1 *(*) : Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent respectivement dans $\mathbb{R}$ vers ℓ et ℓ', et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

(i) $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$;

(ii) (λu_n) converge vers $\lambda\ell$;

(iii) $(u_n \cdot v_n)$ converge vers $\ell\ell'$;

(iv) Si $\ell' \neq 0$ et s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant N, v_n \neq 0$, alors (u_n/v_n) converge vers ℓ/ℓ'.

Preuve :
Il suffit pour chacun des cas de revenir à la définition.
Explicitions par exemple (iii). On se donne $\varepsilon > 0$. Notons que la proposition 2 (i) implique en particulier qu'il existe un réel M tel que $|v_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, il existe aussi $N, N' \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall\, n \geqslant N, |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{|M| + |\ell|} \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \geqslant N', |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{|M| + |\ell|}.$$

On a ainsi que pour tout $n \geqslant \max(N, N')$

$$|u_n v_n - \ell\ell'| = |u_n v_n - \ell v_n + \ell v_n - \ell\ell'| \leqslant |v_n||u_n - \ell| + |\ell||v_n - \ell'| < (|M| + |\ell|)\frac{\varepsilon}{|M| + |\ell|} = \varepsilon,$$

et la suite $(u_n v_n)$ converge bien vers la produit $\ell\ell'$.

`Remarque 3` : Les assertions (i) et (ii) traduisent la fait que l'ensemble des suites numériques convergentes est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et l'application qui à toute suite (u_n) associe sa limite est linéaire.

2.5 Limites et relation d'ordre

Théorème 2.5.1 *(d'encadrement) : Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang. Si (u_n) et (w_n) convergent vers une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$, alors (v_n) converge aussi vers ℓ.*

Preuve :
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe trois entiers $N, N', N'' \in \mathbb{N}$ tels que $\forall\, n \geqslant N, |u_n - \ell| < \varepsilon$, $\forall\, n \geqslant N', |w_n - \ell| < \varepsilon$ et $\forall\, n \geqslant N'', u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Alors pour tout $n \geqslant \max(N, N', N'')$, on a que $-\varepsilon \leqslant u_n - \ell \leqslant v_n - \ell \leqslant w_n - \ell < \varepsilon$, d'où la convergence de (v_n) vers ℓ.

Proposition 2.5.1 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent respectivement vers deux réels ℓ et ℓ'.*
1. Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leqslant \ell'$.
2. Si $\ell < \ell'$ alors, à partir d'un certain rang $u_n < v_n$.

Preuve :
1. Supposons que $\ell > \ell'$. Alors à partir d'un certain rang, on aurait $\ell > \ell' \Rightarrow v_n - \ell < v_n - \ell' \Rightarrow u_n - \ell \leqslant v_n - \ell < v_n - \ell'$. Les membres de gauche et de droite tendent vers 0, donc par le théorème précédent, (v_n) converge vers ℓ, ce qui est absurde par unicité de la limite, donc $\ell \leqslant \ell'$.

2. Si $\ell < \ell'$, alors en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}(\ell' - \ell) > 0$, les intervalles $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ et $]\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon[$ sont disjoints, et tout élément du premier est strictement inférieur à tout élément du second. Par définition, $u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ et $v_n \in]\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon[$ à partir d'un certain rang, soit $u_n < v_n$.

2.6 Suites adjacentes

Définition 2.6.1 *Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites* adjacentes *si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence converge vers 0.*

Lemme 2.6.1 *: Supposons que (u_n) soit une suite croissante adjacente à (v_n), une suite décroissante. Alors*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n.$$

Preuve :
Par hypothèse, on a pour tout n que $u_n \leqslant u_{n+1}$ et $v_n \geqslant v_{n+1}$. Alors, toujours pour tout n,

$$(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) \leqslant (v_n - u_n) - (v_n - u_n) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_n - u_n,$$

donc la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et tend vers 0, donc elle est à termes positifs (conséquence de la démonstration précédente), ce qui signifie que pour tout n, $v_n \geqslant u_n$.

Théorème 2.6.1 *: Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.*

Preuve : Supposons, quitte à échanger les rôles de (u_n) et (v_n), que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante. Puisque ces suites sont adjacentes, (u_n) est majorée par v_0 et (v_n) par u_0, ce qui rend ces deux suites convergentes. Notons ℓ et ℓ' leurs limites respectives, que l'on suppose différentes, de sorte que

$$\forall\, \varepsilon' > 0, \exists\, N' \in \mathbb{N} \mid \quad n \geqslant N' \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon' \;;$$
$$\forall\, \varepsilon'' > 0, \exists\, N'' \in \mathbb{N} \mid \quad n \geqslant N'' \Rightarrow |v_n - \ell'| < \varepsilon''.$$

On remarque alors que pour tout $n \geqslant \max(N', N'')$, on a
$|(u_n - v_n) - (\ell - \ell')| \leqslant |u_n - \ell| - |v_n - \ell'| < \varepsilon' + \varepsilon''$.
En posant alors $N = \max(N', N'')$ et $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$, on a la convergence de $(u_n - v_n)$ vers $\ell - \ell'$.
Or

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n - v_n = 0 = \ell - \ell' \quad \Longleftrightarrow \quad \ell = \ell'.$$

`Remarque 2` : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes qui convergent vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors u_n et v_n sont des valeurs approchées de ℓ respectivement par défaut et par excès (en supposant (u_n) croissante et (v_n) décroissante), avec une erreur inférieure à $\varepsilon_n = v_n - u_n$.

Exercice : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Montrer que ces suites sont adjacentes, déterminer leur limite commune et donner un encadrement de cette limite à 10^{-3} près.

__Solution__ : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \\ \text{et} \quad v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n\cdot n!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{(n+1)^2 - n}{n(n+1)\cdot(n+1)!} \\ &= \frac{n(n+1) - (n+1)^2 + n}{n(n+1)\cdot(n+1)!} = \frac{n^2 + 2n - (n+1)^2}{n(n+1)\cdot(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)\cdot(n+1)!} < 0. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{} 0.$$

D'après ces trois calculs, les suites (u_n) et (v_n) sont bien adjacentes.
Il vient directement que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} v_n = \ell$.

Enfin, puisqu'un encadrement de e est donné par $v_n - u_n$, il suffit de déterminer n tel que $v_n - u_n \leqslant 10^{-3}$. Or

$$v_n - u_n \leqslant 10^{-3} \Longleftrightarrow \frac{1}{n \cdot n!} \leqslant 10^{-3}.$$

Déterminons cette quantité pour les premières valeurs de n (en effet, vu la croissance fulgurante de la fonction factorielle, nous n'aurons certainement pas besoin de calculer cette quantité pour plus de 5 valeurs de n). Enfin, on calcule u_6 et v_6 : Finalement,

$$2,71806 \leqslant \ell \leqslant 2,71829.$$

Pour la limite, rappelons un résultat d'analyse (voir cours sur les développements limités),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \cdots + \frac{1}{n!} < \mathrm{e} < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{3}{(n+1)!}.$$

D'où $\ell = \mathrm{e}$, et donc $\mathrm{e} = 2,718\ldots$ Nous venons de déterminer une valeur approchée d'un nombre réel non rationnel grâce à une suite de nombres rationnels. $\diamondsuit$

2.6.1 Suites extraites

Définition 2.6.2 **Toute suite $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, est appelée* suite extraite *(ou* sous-suite*) de (u_n).*

Proposition 2.6.1 *:* Toute suite extraite d'une suite (u_n) convergente converge vers la même limite.*

Preuve :
φ étant strictement croissante, on a que pour tout entier naturel n, $\varphi(n) \geqslant n$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Or $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$, donc on a aussi $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$, d'où le résultat.

Proposition 2.6.2 *:(*) Soient (u_n) une suite et $\ell \in \mathbb{K}$. Pour que (u_n) converge vers ℓ, il faut et il suffit que les deux sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ.*

Preuve :
La condition est nécessaire (proposition précédente). Montrons qu'elle est suffisante : donnons-nous $\varepsilon > 0$. Il existe alors deux entiers $N, N' \in \mathbb{N}$ tels que $\forall\, n \geqslant N, |u_{2n} - \ell| < \varepsilon$ et $\forall\, n \geqslant N', |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$. Par suite, si $n \geqslant 2\max(N, N')$, alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$ (il suffit de distinguer le cas n pair et n impair), donc (u_n) converge vers ℓ.

2.7 Composition par une fonction continue

Théorème 2.7.1 *: Si f est une fonction continue en ℓ, limite d'une suite (u_n), alors la composée $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$.*

Preuve :
Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de l'application f en ℓ nous amène à écrire qu'il existe $\eta > 0$ tel que $|u_n - \ell| < \eta \Rightarrow |f(u_n) - f(\ell)| < \varepsilon$. De plus, la convergence de (u_n) vers ℓ se traduit par

$$\forall\, \varepsilon' > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \mid n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon'.$$

En particulier, avec $\varepsilon' = \eta$, on aboutit à l'implication $n \geqslant N \Rightarrow |f(u_n) - f(\ell)| < \varepsilon$, ce qui prouve bien que $\big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(\ell)$.

Proposition 2.7.1 *:(*) Soient $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et (u_n) une suite définie par récurrence par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Si f est continue en ℓ, alors ℓ est point fixe de f.*

Preuve :
La convergence de (u_n) vers ℓ implique deux choses : la première est que la suite (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ (proposition 4), et la seconde est que $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$ (théorème précédent) par continuité de f en ℓ. Or $u_{n+1} = f(u_n)$, et on en déduit par unicité de la limite que $\ell = f(\ell)$.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. f est continue sur $[-2, +\infty[$, et l'on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 2$. Or

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2 + u_n} - u_n = \frac{(2 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n} > 0,$$

donc (u_n) est croissante et majorée, donc convergente (proposition 2 (ii)) vers une limite $\ell \in [0, 2]$ qui vérifie $f(\ell) = \ell$ par la proposition précédente. Nécessairement, $\ell = 2$.