École Supérieure en Informatique ESI Sidi Bel Abbes
المدرسة العليا للإعلام الآلي سيدي بلعباس

Les Nombres Réels

T.D. N° 1

Exercice 1 Quelle condition doivent vérifier les rationnels a, b, c, d pour que le nombre $\dfrac{a+bx}{c+dx}$ soit rationnel $\forall x \in \mathbb{R}$?

Exercice 2

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$, $\quad n$ n'est pas un carré dans $\mathbb{N}$.
3. En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Exercice 3 1. Si a, b, a', b' sont des rationnels et si $\sqrt{b}$ est irrationnel, l'égalité

$$a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}$$

exige $a = a'$ et $b = b'$; l'égalité $a + \sqrt{b} = a' - \sqrt{b'}$ est impossible.
2. Montrer qu'on peut trouver deux entiers a, b tels que $\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$.
3. Montrer que le nombre $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$ est un entier naturel.

Exercice 4 Vérifier que

$$\sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2b^4}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}^{\,3}.$$

Réécrire l'égalité en utilisant seulement les puissances fractionnaires.

Exercice 5 Soient $a, b \in \mathbb{Q}^+$ tels que $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}^+$. Montrer qu'il existe $x, y \in \mathbb{Q}^+$ tels que $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a + \sqrt{b}}$ si et seulement si $a^2 - b$ est un carré dans $\mathbb{Q}$.

Application : Montrer que $\dfrac{\sqrt{28 + 6\sqrt{3}}}{3\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - 5} \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 Soient $x, y \in \mathbb{Q}$, $y > 0$, $\sqrt{y}$ irrationnel. Montrer qu'il n'existe pas de $z \in \mathbb{Q}$ tel que

$$\sqrt[3]{x} = z + \sqrt{y}.$$

Exercice 7 On donne $a = \left(\dfrac{6}{5}\right)^5$ et $b = \left(\dfrac{6}{5}\right)^6$, vérifier que $a^b = b^a$.

Exercice 8 Déterminer $x \in \mathbb{Q}$ sachant que $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 3 = 0$.

Exercice 9 Soient $p \in \mathbb{Q}$ et $q \in \mathbb{R}$, vérifier que le nombre suivant est rationnel

$$\mathscr{X} = \sqrt[3]{\frac{p^3 + 3pq^2 + (p^2+q^2)\sqrt{p^2+4q^2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{p^3 + 3pq^2 - (p^2+q^2)\sqrt{p^2+4q^2}}{2}}.$$

(*On montrera que :* $\mathscr{X}^3 = (p^3 + 3pq^2) - 3q^2\mathscr{X}$)

Exercice 10 Montrer par récurrence :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. En déduire la somme de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Conjecturer une formule générale pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\cdots(k+p)$, et la montrer par récurrence.

2. $\forall a \geqslant -1, \forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geqslant 1+na$, (inégalité de Bernoulli).

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n$.

Exercice 11 Le maximum de deux nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x,y)$. De même on notera $\min(x,y)$ le plus petit des deux nombres x, y. Démontrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x,y,z)$.

Exercice 12 Soit $(a_{ij})_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant m}}$ une famille non vide et bornée de réels ; comparer :

$$\inf_i(\sup_j a_{ij}) \quad \text{avec} \quad \sup_j(\inf_i a_{ij}).$$

Exercice 13 Soient x et y deux réels strictement positifs. On pose

$$M = \frac{x+y}{2} \qquad G = \sqrt{xy} \qquad H = \frac{2xy}{x+y} \qquad Q = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Montrer que M, G, H, Q sont rangés dans un ordre indépendant de x et y.

Exercice 14 Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0,1]\cap\mathbb{Q}\ ,\quad]0,1[\cap\mathbb{Q}\ ,\quad \mathbb{N}\ ,\quad \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 15

1. Montrer que $\left|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$ pour tous réels a et b.
2. Si x et y sont des réels positifs ou nuls, alors $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \sqrt{a+b}$.
3. $(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leqslant \varepsilon) \Longrightarrow x = 0,\ x$ réel ou complexe.

Exercice 16 Soit l'ensemble :

$$A = \left\{\frac{n+2}{n-1} :\ n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2.\right\}$$

1. Montrer que $\sup A = 4$ et $\inf A = 1$.
2. $\max A$ et $\min A$ existent-ils ?.
3. pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$B = \left\{\frac{n+2}{n-1} + \frac{1}{4} :\ n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2\right\},\ C = \left\{\frac{n+2}{n-1}, \frac{1}{4} :\ n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2\right\}.$$

Donner $\sup B, \inf B$ et $\sup C$.