PROBABILITES

Notions de probabilités

Faculté de Médecine, UDL, SBA
1ère année Médecine

03 Novembre 2015

Probabilités et statistique

- Probabilités concernent
  - √ Populations, modèles, théorie
  - √ On ne peut y faire des mesures
- Statistique concerne
  - √ Échantillons, monde réel, pratique
  - √ On fait des mesures sur des individus

Probabilités

- Le calcul des probabilités s'occupe de **phénomènes aléatoires** (ou **épreuves aléatoires**).
- Le chapitres 2 et 3 introduisent les concepts **fondamentaux du calcul des probabilités**.
- Ils se limitent à la présentation des sujets nécessaires aux applications statistiques traitées dans les chapitres ultérieurs.

Objectifs: Probabilité

Objectifs spécifiques:

- Savoir utiliser les **tableaux de distribution** de fréquences pour en dériver des probabilités simples.
- Savoir calculer des **probabilités d'événements composés**
- Savoir calculer des **probabilités conditionnelles** en appliquant les règles de combinaisons de probabilités.

Plan de cours

Phénomènes aléatoires 1

- ***Phénomènes déterministes***: sont prévisibles, donnent le même résultat lorsqu'on répète l'expérience et qui ne dépend pas d'une loi de probabilité.
- ***Phénomènes aléatoires***: sont des phénomènes dont on ne peut prévoir le résultat à l'avance, mais qui par "répétition" présentent un certain caractère de régularité (suivent des lois de probabilité).

Phénomènes aléatoires 2

- $\surd$ Un exemple typique est constitué par le jeu de pile ou face
- $\surd$ On ne peut prévoir à priori le résultat d'un lancement "ou tirage", mais si on fait un grand nombre de tirage, on obtiendra une moyenne d'a peu près 50% de "pile" $($si la pièce n'est pas truquée $)$.

Phénomènes aléatoires 3

Penser à n jets successifs d'une même pièce de monnaie:

Nbre de jets	10	100	200	500	1000	10000
	3	45	95	260	491	4995
Fréq relatif	0.3	0.45	0.475	0.52	0.491	0.4995

- D'où: les fréquences relatives tendent vers 0.5 (50%) (tendent vers la probabilité 0.5), quand le nombre de jette de la pièce tend vers infini.

Phénomènes aléatoires 4

- Les phénomènes aléatoire exhibent un type de **régularité**. Cette régularité permet de prédire la **fréquence d'apparition** d'un phénomène.
- **La modélisation** de tels phénomènes (la recherche de **lois**) est le champs d'application du **calcul des probabilités**.
- Une expérience aléatoire est appelée une "épreuve".
- On se limite aux cas où l'expérience peut être **répétée plusieurs fois, dans les mêmes conditions**.

Expérience aléatoire, ensemble fondamental

- **Expérience aléatoire**
  - $\surd$ Ex : lancer de dé, glycémie de 100 personnes
  - $\surd$ Réalisation $\Rightarrow$ mesures $\Rightarrow$ statistique
  - $\surd$ Étude des résultats possibles $\Rightarrow$ probabilités
- **Ensemble fondamental (l'espace d'états)** :
  - $\surd$ noté $\Omega = \{\omega_1, \ldots \omega_n\}$ l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience
  - $\surd$ Ω peut être fini ou infini, dénombrable ou non

Événements 1

- événement = Sous-ensemble de résultats possibles , notés par des majuscules latines: A, B, ect . . . .
  - Exemple: si $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, l'événement résultat pair est $\{2, 4, 6\}$. Il y a $64 = 2^6$ événements.
  - L'événement se produit si le résultat de l'expérience fait partie du sous-ensemble.
    - Exemple: l'événement "résultat pair" est réalisé si on obtient 2 ou 4 ou 6.

Événements 2

- Cas particuliers
  - $\{\omega_i\}$ = réalisation ou événement élémentaire
  - Événement composé: obtenu par une combinaison d'événements élémentaires (réalisation simultanée ou successives de 2 ou plusieurs événements simples)
  - Espace des événements = $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω
  - $\emptyset$ = ensemble vide = événement impossible
  - Ω = événement certain

Événement: Exemple

1. Jeter une pièce de monnaie: c'est une épreuve (expérience), $\Omega = \{P = pile, F = face\}$.
    - "Obtenir Face" est un événement élémentaire: $E_1 = \omega_1 = \{F\}$.
    - "Obtenir Pile" est un événement élémentaire: $E_2 = \omega_2 = \{P\}$.

Exemple

Exemple

2. Jeter une pièce de monnaie 2 fois successivement : épreuve, $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$.
    - "Obtenir 2 faces" est un événement élémentaire : $E_1 = \omega_1 = \{FF\}$.
    - "Obtenir au moins une fois pile" : événement composé : $\{PP, PF, FP\}$.

Événement: Exemple

Exemple

3. Jeter un dé 2 fois successivement: épreuve, $\Omega = \{(i,j)/1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}$. "La somme est =6" est un événement
4. Pour le poids des nouveau-nés exprimé en grammes; on peut considérer que $\Omega = [1000 - 6000]$. $[1500, 2500] \subset [1000 - 6000]$, c'est un événement.
5. Durée de vie d'une ampoule électrique : $\Omega = \mathbb{R}_+$.

Événement: Exemple

6. Naissance: à la suite de la naissance on peut observer les événements possibles suivants : fille ou garçon, le sexe de l'enfant étant le phénomène aléatoire (le résultat: fille ou garçon, ne peut être prédit avec certitude).

Règles de combinaison d'événements 1

- Si A et B sont 2 événements, on veut
  - $A \cap B$ est un événement
  - $A \cup B$ est un événement
  - $C_\Omega A = \overline{A}$ est un événement
- Si E est **fini** ou **infini dénombrable**, tout sous-ensemble de E est un événement
- Si E est **infini non dénombrable** ($\mathbb{R}$), un événement est un intervalle ou une combinaison d'intervalles

Règles de combinaison d'événements 2

a) L'événement "A **ou** B" = "$A \cup B$": se réalise si l'un au moins des événements A et B se réalise.

- ◇ Exemple: "avoir un infarctus du myocarde" **ou** "être diabétique".

b) L'événement "A **et** B" = "$A \cap B$"; se réalise si A et B se réalisent.

- ◇ Exemple: "avoir un infarctus du myocarde" **et** "être diabétique".

c) L'événement bf non A, noté $\overline{A}$, a lieu si et seulement si A n'est pas réalisé.

Règles de combinaison d'événements 3

d) Événements compatibles : événements qui peuvent être conjoints (se réaliser simultanément).

e) Événements A et B incompatibles ou mutuellement exclusifs $\Leftrightarrow$ A et B sont disjoints $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$:

- si A se réalise, B ne se réalise pas et réciproquement, qui signifie que A et B ne peuvent pas se produire ensemble.

f) A implique $B \Leftrightarrow B \subset A$: si A se réalise, alors B se réalise.

g) L'événement A **sans** $B \Leftrightarrow A - B$: A est réalisé sans que B soit réalisé.

Règles de combinaison d'événements: Exemple

- On jette un dé.
  - L'ensemble **fondamentale** = $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
  - L'événement A: **"apparition d'un nombre pair"** $\Leftrightarrow$ $A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$.
  - L'événement B: **"apparition d'un nombre premier"** $\Leftrightarrow$ $B = \{1, 2, 3, 5\}$
  - L'événement C: **"apparition d'un 3"** $\Leftrightarrow C = \{3\}$.

Règles de combinaison d'événements: Exemple

- $\diamond$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$, événement certain: **"apparition d'un nombre pair ou premier"**.
- $\diamond$ $A \cap B = \{2\} =$: **"apparition d'un nombre pair et premier"**.
- $\diamond$ $\overline{C} = \{1, 2, 4, 5, 6\} =$: **apparition d'un nombre autre que 3**.
- $\diamond$ $A \cap C = \emptyset$,: A et C s'**excluent mutuellement**.

Règles de combinaison d'événements: Exemple

- Dans l'exemple précédent Ω était fini, donc dénombrable;
- Ω peut être infini dénombrable comme le cas suivent:
  1. On jette une pièce de monnaie jusqu'à ce qu'on obtient pile
     - $\Omega = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, puisqu'on peut avoir un pile au bout d'un jet, de 2 jets, de n jets.
  2. On vise avec une fléchette une cible suffisamment grande; si on admet que la fléchette est très fine,
     - Ω=$\{$la surface de la cible$\}$: infinie et non dénombrable.

Définition d'une Probabilité

- La théorie des probabilités ne permet pas de calculer toutes les probabilités
- Elle permet le calcul pour les combinaisons d'événements de probabilités connues
- Définition utilisée : **probabilité = limite de fréquence**

Probabilité dans un espace fini: Définition

Définition

À chaque événement A on associe un nombre, noté $\mathbf{P}r(A)$, et appelé "probabilité de A. Ce nombre mesure le degré de vraisemblance qu'on accorde a priori à A, avant la réalisation de l'expérience.

Mathématiquement:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{P} : (\Omega, \mathcal{A}) & \rightarrow & [0, 1] \\ A & \mapsto & \mathbf{P}(A). \end{array}$$

Définitions

- Tout événement A tel que $\mathbf{P}(A) = 1$ est dit quasi-certain.
- Tout événement B tel que $\mathbf{P}(B) = 0$ est dit quasi-impossible.

Probabilité: définition

- En pratique, la probabilité = fréquence d'apparition quand le nombre d'épreuves est grand (la probabilité comme limite de "fréquence").
  - Jets successifs d'une même pièce de monnaie n fois

Nbre de jets	10	100	200	500	1000	10000
Fréq relatif	3	45	95	260	491	4995
	0.3	0.45	0.475	0.52	0.491	0.4995

  - Notons $f_n(A) = \frac{\text{le nombre de fois où il est réalisé}}{n}$, la fréquence de réalisation de l'événement A. Alors:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_n(A).$$

Probabilité: remarque

- $\surd$ Cette approche n'est pas toujours possible, par exemple: événements jamais observés.
- $\surd$ Pour avoir une idée des propriétés de ces nombres (les probabilités des événements), on utilise les propriétés des fréquences.

Règles (axiomes) du calcul des probabilités

- Des propriétés des fréquences, on déduit:

(P0) $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$;

(P1) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$;

(P2) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ si $A \cap B = \emptyset$

- Il en découle:
  - $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$
  - $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A}) = 1$.
  - $\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$, si les A_i sont 2 à 2 disjoints.
  - $\mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.
  - $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$ si $A \subset B$.

Probabilités sur un ensemble fondamental fini

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots \omega_n\}$

- On doit donner les probabilités de tout événement élémentaire $\{\omega_i\}$:

$$\mathbf{P}(\{\omega_i\}) = \mathbf{P}(\omega_i)\text{ , pour tout } \omega_i \in \Omega\,.$$

  - ◇ $\mathbf{P}(\omega_i) \geq 0$,
  - ◇ $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\omega_i) = 1$ (n nombre d'événements élémentaires)

- Si $A = \{\omega_1, \omega_4, \omega_5\}$, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\omega_1) + \mathbf{P}(\omega_4) + \mathbf{P}(\omega_5)$
- En générale, $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega_j \in A} \mathbf{P}(\omega_j) = 1$, ($\omega_j \in A$).

Cas particulier: Probabilité uniforme

Considérons l'expérience suivante: on jette un dé, donc $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si le dé n'est pas truqué (homogène), chacune des 6 faces du dé à la même probabilité de sortir.

- Parmi les 6 cas possibles, il y en a "1" pour lequel le nombre de points obtenus est, par exemple 2. On dira que la probabilité d'obtenir 2 points est $\frac{1}{6}$.
- Parmi les 6 cas possibles, il y en a 3 pour lequel le nombre de points obtenus est pair $\{2, 4, 6\}$. On dira que la probabilité d'obtenir un chiffre pair est égale à : $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Probabilité uniforme

- **Ensemble équiprobable**: les événements élémentaires ont tous la même probabilité $1/n$
  - ◇ Si A possède k éléments, sa probabilité est k/n (nombre de cas favorables sur nombre de cas total)
- **Remarque:**
  - ✓ Quand on dit qu'on tire "au hasard", on sous-entend que l'ensemble probabilisé considérée est équiprobable.

Probabilité uniforme

Définition

La probabilité d'un événement est égal au rapport du nombre de cas favorables à cet événement au nombre total des cas possibles, supposés également vraisemblables (N):

$$\mathbf{P}(A) = p_i = \frac{\text{nbre de cas favorable}}{\text{nbes de cas possible}} = \frac{n_i}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

où $|A|$ est le cardinal ou nombre d'éléments de A.

Probabilité uniforme: Remarque

- ✓ Le cas des ensemble finis équiprobables est le plus simple à appréhender. Il faut insister sur le fait que l'équiprobabilité n'est qu'un cas particulier des ensembles probabilisé; ce n'est (de loin) pas le plus utile en médecine.

Exemple: Croisement

- A étant le caractère dominant et a le caractère récessif
  - exemple; la couleur des yeux, noir pour A et bleu pour a,
- on croise deux individus hétérozygotes Aa.
- Il y a 4 possibilité: $Aa \times Aa \rightarrow AA(\frac{1}{4})$, $aA(\frac{1}{4})$, $Aa(\frac{1}{4})$ et $aa(\frac{1}{4})$.
- Mendel a formulé l'hypothèse que chacun de ces événements à la même probabilité, c-à-d $\frac{1}{4}$.
- Cette hypothèse est justifiée.

Exemple: Croisement

- Si l'on considère le génotype de l'individus issus de croisement, quel est l'espace probabilisé correspondant?
  - L'espace probabilisé est: $\Omega = \{AA, Aa, aa\}$, car Aa et aA sont indistinguables et $\mathrm{P}(AA) = \mathrm{P}(aa) = \frac{1}{4}$ et $\mathrm{P}(Aa) = \frac{2}{4}$.
- Et si c'est le phénotype qui nous intéresse, quel est l'espace probabilisé correspondant?
  - L'espace probabilisé est $\Omega = \{A, a\}$, Comme $A = \{AA, Aa, aA\}$ et $a = \{aa\}$, alors: $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(a) = \frac{1}{4}$.
- À une même épreuve, on peut faire correspondre des espaces probabilisé différents selon le type de résultats auquel on s'intéresse.

Probabilités sur un ensemble infini non dénombrable

$\mathbb{R}$

- Il faut définir les probabilités de tout intervalle
- On utilise une fonction qui dépend des bornes de l'intervalle
  - La fonction de répartition permet un calcul par simple soustraction
  - La densité de probabilité nécessite un calcul d'intégrale

QCM

Dans le dossier médical des urgences, on note :

- age du patient au diagnostic : J (<25), M (26-45), A >45)
- Sexe : H, F
- Motif : Ch (chirurgical), Me (Médical), Psy (Psychiatrique)
- Pour les patients Chirurgie : Gy (gynéco), Ort (Orthopédie), Br (brûlés), Au (autres)

A- : les hommes brûlés de plus de 45 ans sont les sujets $\{A\}$ et $\{H\}$ et $\{Br\}$.

B- : les hommes brûlés de plus de 45 ans sont les sujets $\{A\}$ ou $\{H\}$ ou $\{Br\}$.

C- : les hommes brûlés de plus de 45 ans sont les sujets $\{\bar{J}\}$ et $\{\overline{M}\}$ et $\{Br\}$ et $\{H\}$.

D- : les femmes font partie de $\{\{J\}\, ou\, \{M\}\, ou\, \{A\}\}$ ou F.

E- : les femmes font partie de $\{\{J\}\, ou\, \{M\}\, ou\, \{A\}\}$ ou H.

Exercice 1

Dans un échantillon de 1000 patients, en relève 300 personnes malades des poumons (évènement P), 600 personnes malades du cœur (évènement C) et 200 individus souffrant d'hypertension (évènement H).

1. Calculer le nombre des personnes souffrants d'hypertension et de maladie cardiaques, sachant que 76% des patients souffrent d'hypertension ou de maladies cardiaques.

2. Sachant que le nombre des patients atteints de maladie cardiaque et de maladie pulmonaire est 60 et que le nombre des patients atteints de trois maladies est 0, calculer le nombre de personne souffrant d'hypertension et de maladie pulmonaire.
3. Quelle est la probabilité de trouver un patient souffrant d'hypertension ou d'une maladie pulmonaire?

Exercice 2

Un nouveau vaccin a été testé sur 12500 personnes ; 75 d'entre elles, dont 35 femmes enceintes, ont eu des réactions secondaires nécessitant une hospitalisation. Parmi les 12500 personnes testées, 680 personnes sont des femmes enceintes.

1. Quelle est la probabilitée pour une femme enceinte, d'avoir une réaction secondaire si elle reçoit un vaccin ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne non enceinte, d'avoir une réaction secon- daire ?

Exercice 3

Un groupe décomposé de 80 hommes et de 60 femmes doit désigner 10 de ces membres pour être de garde ce soir. Si la désignation se fait au hasard, quelle est la probabilité pour que le groupe de garde :

$a)$ ne comporte que des hommes ?

$b)$ ne comporte que des femmes?

$c)$ comporte un nombre égal d'hommes et de femme ?

Exercice 4

18 personnes se sont présentées à une collecte de sang. Parmi celles-ci, on a noté : 11 personnes du groupe O, 4 personne du groupe A, 2 personnes du groupe B et 1 personnes du groupe AB. A issue de la collecte, on prélève au hasard 3 flacons parmi les 18 flacons obtenus. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. les sang des 3 flacons appartiennent aux mêmes groupes;
2. parmi les 3 flacons prélevés, il y'a au moins un flacons contenant du sang du groupe A;
3. les sang des 3 flacons appartiennent à 3 groupes différents.

Bibliographie

- Cours Probabilité, Benchikh Tawfik, http://www.univ-sba.dz/lsps/images/pdf/cours/
- Probabilités et Biostatistique. www.chups.jussieu.fr/polys/biostats/CoursProba1.pdf
- FMPMC Pitié-Salpêtrière-probabilités, cours 1 et 2. www.chups.jussieu.fr/polys/biostats/coursProba-1-2/
- Notions de Probabilités, Roch Giorgi, LERTIM, Faculté de Médecine, Université de la Méditerranée, Marseille, France http://lertim.fr