

PROBABILITES

Notions de probabilités

Faculté de Médecine, UDL, SBA
1^{ère} année Médecine

10 Novembre 2015



Plan de cours

- 1 Règles de calcul de probabilités
 - Règle des probabilités complémentaires
 - Système complet d'événements
 - Probabilités conditionnelles
 - Probabilités totales
 - Formule de Bayes
 - Événements indépendants
- 2 Exercices

- La probabilité d'un événement E et celle de son contraire \overline{E} ont pour somme 1:

$$E \cup \overline{E} = \Omega$$

D'où

$$\begin{aligned}\Pr(\Omega) = 1 &= \Pr(E \cup \overline{E}) \\ 1 &= \Pr(E) + \Pr(\overline{E}).\end{aligned}$$

Règle des probabilités complémentaires: Exemple

- Jeter un dés. Quelle est la probabilité d'obtenir moins de 6.

◇ E : "obtenir moins de 6" $\Rightarrow \bar{E}$: "obtenir 6"

$$\Pr(\bar{E}) = q = \frac{1}{6} \implies \Pr(E) = p = 1 - \Pr(\bar{E}) = \frac{5}{6}.$$

- Jeu de 52 cartes, on extrait au hasard 13 cartes. Quelle est la probabilité pour que, parmi ces 13 cartes, il y ait au moins l'un des 4 as ?

◇ E : "il y ait au moins l'un des 4 as" $\Rightarrow \bar{E}$: "il n'y a ait aucune as".

◇ D'où:

$$P(\bar{E}) = q = \frac{C_{48}^{13}}{C_{52}^{13}} = \frac{6327}{20875} \implies p = 1 - q = 69.6\%.$$

Système complet d'événements

- Soit E un événement qui peut se réaliser selon diverses modalités s'excluant l'une l'autre, c'est-à-dire:

$$E = \bigcup_{i=1}^n E_i \text{ et } E_i \cap E_j = \emptyset, \text{ pour } i \neq j$$

(On dit qu'on a un **système complet d'événements**)

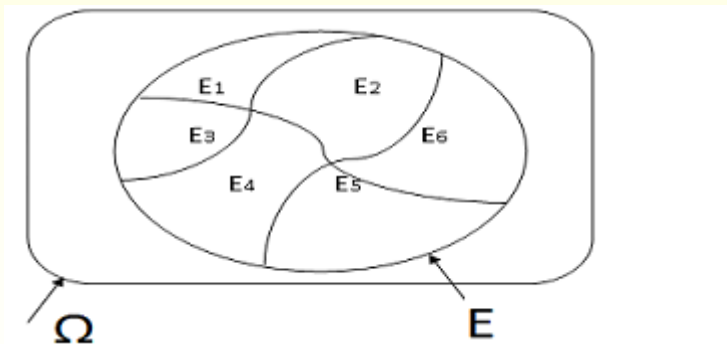


Figure: Système complet

- Alors, la probabilité totale de E est la somme des probabilités des événements consistant en ces diverses modalités:

$$\begin{aligned}\mathbf{Pr}(E) &= \mathbf{Pr}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) \\ &= \mathbf{Pr}(E_1) + \mathbf{Pr}(E_2) + \dots + \mathbf{Pr}(E_n)\end{aligned}$$

- On lance deux dés; Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 10 ?
 - ◇ L'événement E : "obtenir au moins 10" $\Leftrightarrow E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ avec:
 - ◇ E_1 : "obtenir 10" $= \{(4, 6), (6, 4), (5, 5)\} \Rightarrow$ le nombre de cas favorables au $E_1 = |E_1| = 3$.
 - ◇ E_2 : "obtenir 11", $= \{(5, 6), (6, 5)\} \Rightarrow$ nombre de cas favorables au $E_2 = |E_2| = 2$.
 - ◇ E_3 : "obtenir 12" $= \{(6, 6)\} \Rightarrow |E_3| = 1$ (un cas favorables).
 - ◇ $E_1 \cap E_2 = \emptyset, E_1 \cap E_3 = \emptyset, E_2 \cap E_3 = \emptyset$.

Système complet d'événements: Exemple

- ◇ L'ensemble fondamentale est:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(i,j)/1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\} \\ &= \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), \dots, (6,1), \dots, (6,6)\}\end{aligned}$$

et le nombre des cas possibles = $|\Omega| = 36$.

- Rappel: $\Pr(A) = \frac{\text{nbre de cas favorable}}{\text{nbres de cas possible}}$

- ◇ Donc

$$\begin{aligned}\Pr(E) &= \Pr(E_1 \cup E_2 \cup E_3) \\ &= \Pr(E_1) + \Pr(E_2) + \Pr(E_3) = \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} . \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Probabilités conditionnelles : introduction

- Soit deux événements non exclusifs A et B ($A \cap B \neq \emptyset$)
 - ◇ Exemple: avoir un signe clinique (douleur de la fosse iliaque droite) et avoir une maladie (avoir une appendicite)
- La probabilité de A sachant que B est réalisé.
 - ◇ Exemple: la probabilité d'avoir l'appendicite sachant que patient souffre de douleur de la fosse iliaque droite.
 - ◇ En générale: lors de l'établissement d'un diagnostic, la probabilité pour que le patient soit atteint d'une maladie donnée se modifie au fur et à mesure que les symptômes et les résultats des examens successifs sont connus.

Probabilités conditionnelles : introduction

- Expérience considérée sur une population P
- Événement A de probabilité $\Pr(A) > 0$
- Que devient $\Pr(A)$ si on se restreint à une sous-population de P
 - $A = \text{"taille} \in [170; 175]";$ Sous-population = les hommes
 - $A = \text{présence d'une maladie } M;$ Sous-population = les individus présentant un signe S
- B = événement conditionnant, qui définit la sous-population
 - $B = \text{être un homme} ; B = \text{présenter le signe } S$
- L'ensemble fondamental doit parler de B
 - Ensemble produit
 - Exemple : $\{(M, S), (M, \bar{S}), (\bar{M}, S), (\bar{M}, \bar{S})\}$

- $\Pr(A/B)$ = Prob de A pour les individus présentant B
= Probabilité de A sachant que B (s'est produit)
= Probabilité de A parmi les B
= Probabilité de A si B
- Confusion fréquente entre $\Pr(A/B)$ et $\Pr(A \cap B)$

Probabilités conditionnelles : formule de calcul

- La probabilité conditionnelle est donnée la formule suivante :

$$\begin{aligned}\Pr(A/B) &= \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \\ &= \frac{\text{Nombre de réalisation possible de } A \text{ et } B}{\text{nombre de réalisation de } B}\end{aligned}$$

- $\Pr(B)$ ne doit pas être nul
- $\Pr(B/A)$ est une véritable probabilité
 - $A \cap B \subset B \Rightarrow \Pr(A \cap B) \leq \Pr(B) \Rightarrow \Pr(A/B) \leq 1$
 - Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (au moins chez les B) \Rightarrow
 $\Pr((A_1 \cup A_2)/B) = \Pr(A_1/B) + \Pr(A_2/B)$

- On lance deux dés (équilibrés). La somme est 6. Quelle est la probabilité qu'un des résultats soit 2?
 - ◇ On a 36 résultats possibles, équiprobable.
 - ◇ B : "somme des deux dés = 6" = $\{(2, 4), (4, 2), (1, 5), (5, 1), (3, 3)\}$
 - ◇ A : "au moins un des deux dés donne 2" = $\{(2, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 2), (2, 5), (5, 2), (2, 6), (6, 2)\}$
 - ◇ Le nombre de réalisation de $A \cap B = \{(2, 4), (4, 2)\} = 2$.
 - ◇ $\Pr(A \cap B) = \frac{2}{36} = 0.056$, $\Pr(B) = \frac{5}{36}$ et $\Pr(A) = 11/36$.
 - ◇ D'où $\Pr(A/B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = 2/5$.

- Durée de vie t : $\Pr(t_1 \leq t \leq t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$, avec

$$f(x) = \begin{cases} \alpha t^2(100 - t)^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 100 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- ◇ $\int_0^{100} f(t)dt = 1 \Rightarrow \alpha = 3 \times 10^{-9}$ (il s'agit bien d'une loi de probabilité)
- ◇ Probabilité p de décès entre 60 et 70 sachant qu'on a déjà vécu 60 ?

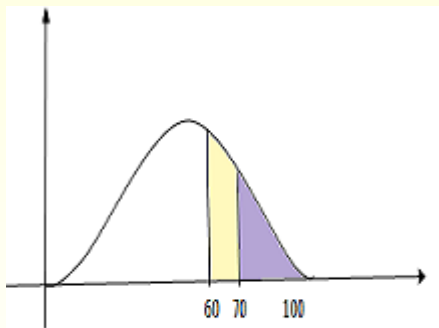
Probabilités conditionnelles: Exemple 2 (Ω infini)

$$\diamond p = \frac{\Pr[(60 \leq t \leq 70) \cap (t \geq 60)]}{\Pr(t \geq 60)} =$$
$$\frac{\Pr(60 \leq t \leq 70)}{\Pr(t \geq 60)}$$

$$\diamond \Pr(60 \leq t \leq 70) =$$
$$\int_{60}^{70} f(t) dt$$

$$\diamond \Pr(t \geq 60) = \int_{60}^{100} f(t) dt$$

$$\diamond p = 0.486$$



Probabilités conditionnelles: Exemple

- On extrait successivement 2 boules d'un sac contenant 10 boules **blanches** et 6 boules **noires**. Quelle est la probabilité pour que les deux boules soient blanches ?
- F : "la première boule extraite est blanche"
 $\Rightarrow \Pr(F) = 10/16.$
- G : "la deuxième boule extraite est blanche"
 $\Rightarrow \Pr(G/F) = 9/15.$
- E : "les 2 boules extraites sont blanches" $\Rightarrow E = F \cap G$,
 $\Rightarrow \Pr(E) = \Pr(G/F) \times \Pr(F) = 3/8$

Exemple: Diagnostic

Parmi les patients qui consultent un médecin , la probabilité d'avoir la maladie M est $\Pr(M) = 0.2$. Un symptôme S permet de détecter à **coup sûr** la présence de la maladie M , mais il n'apparaît pas chez tous ceux qui sont atteints de M . On sait que **10%** des patients qui se présentent à la consultation chez ce médecin ont à la fois **la maladie et le symptôme**. Quelle est la probabilité pour un patient atteint de M de présenter le symptôme S , lorsqu'il se présente à la consultation chez ce médecin?

- Soit M : "avoir la maladie M ", S : "avoir le symptôme S "
- L'énoncé implique que:
 - ◇ $P(M) = 0.2$,
 - ◇ $\Pr(M/S) = 1$ (le symptôme permet de détecter à coup sûr M)
 - ◇ $P(M \cap S) = 0.1$.
- Par définition de probabilité conditionnelle:

$$\Pr(S/M) = \frac{\Pr(M \cap S)}{\Pr(M)} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5.$$

Probabilités conditionnelles: Théorème de la multiplication

- $\Pr(B/A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} \Rightarrow \Pr(A \cap B) = \Pr(B/A) \times \Pr(A).$
- $\Pr(A/B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \Rightarrow \Pr(A \cap B) = \Pr(A/B) \times \Pr(B)$
- Donc La probabilité pour que deux événements A et B se produisent simultanément, soit $\Pr(A \cap B)$, est

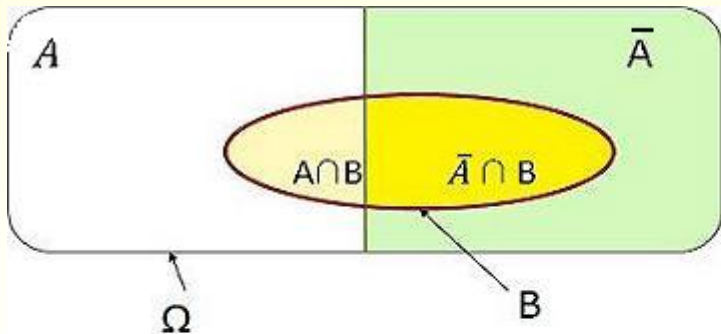
$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B/A) \times \Pr(A) = \Pr(A/B) \times \Pr(B)$$

- En général, si A , B et C sont des événement non exclusifs, alors :

$$\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(A) \times \Pr(B/A) \times \Pr(C/(A \cap B))$$

Théorème de la probabilité totale: cas particulier

- Soit $B \subset \Omega$. Dans le cas où $\Omega = A \cup \bar{A}$, alors:
 - ◊ $B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$
 - ◊ $(B \cap A) \cap (B \cap \bar{A}) = \emptyset$ (sont exclusifs) car $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
- $\Pr(B) = \Pr(A \cap B) + \Pr(\bar{A} \cap B)$
 $= \Pr(B/A) \times \Pr(A) + \Pr(B/\bar{A}) \times \Pr(\bar{A})$

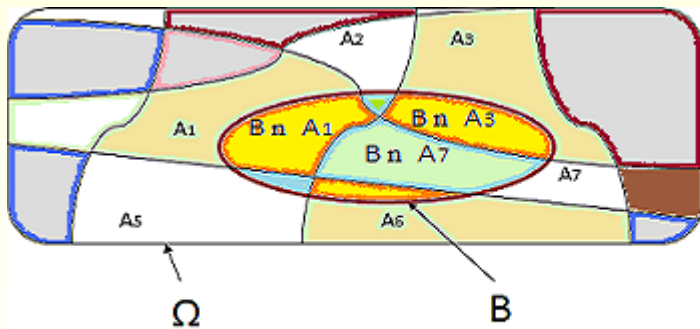


Théorème de la probabilité totale: Exemple 1

- Une population est composée de 40% d'homme et de 60% de femme; 50% des hommes et 30% des femmes fument. Quelle est la probabilité pour une personne choisi au hasard soit fumeur ?
 - ◇ *Fum*: "la personne est fumeur",
 - ◇ *H*: "la personne est un homme"
 - ◇ *F*: "la personne est une femme".
 - ◇ $\Pr(H) = 0.4$, $\Pr(F) = 0.6$; $\Pr(Fum/H) = 0.5$ et $\Pr(Fum/F) = 0.3$
- Comme $\Omega = H \cup F = H \cup \bar{H}$, avec $F = \bar{H}$, donc on a:
$$\begin{aligned}\Pr(Fum) &= \Pr(Fum \cap H) + \Pr(Fum \cap F) \\ &= \Pr(Fum/H) \times \Pr(H) + \Pr(Fum/F) \times \Pr(F) \\ &= 0.5 * 0.4 + 0.3 * 0.6 = 0.38.\end{aligned}$$

Théorème de la probabilité totale: cas général

- Soit $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ une partition de Ω (système complet):
 $\Omega = \bigcup_i A_i$ avec $A_i \cap A_j = \emptyset$, pour $i \neq j$ (les A_i sont exclusifs)



Théorème de la probabilité totale: cas général

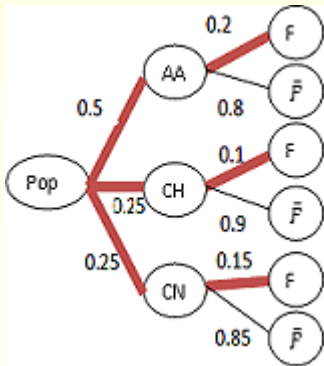
- $B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$
 $= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$
- Les $(B \cap A_i)$ sont exclusifs car les A_i le sont. D'où:
- $\Pr(B) = \Pr(B \cap A_1) + \Pr(B \cap A_2) + \dots + \Pr(B \cap A_n)$
- Théorème de la multiplication:

$$\Pr(B \cap A_i) = \Pr(B/A_i) \times \Pr(A_i)$$

- D'où le théorème de la probabilité totale:

$$\Pr(B) = \sum_{i=1}^n \Pr(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \Pr(B/A_i) \times \Pr(A_i) .$$

Probabilités totales : exemple 3 avec Diagramme en arbre



- Douleur aiguë de l'abdomen
- 3 pathologie:
 - AA (50% des cas) $\Rightarrow \Pr(AA) = 0.5$
 - CH (25% des cas) $\Rightarrow \Pr(CH) = 0.25$
 - CN (25% des cas) $\Rightarrow \Pr(CN) = 0.25$
- 20% des AA ont la fièvre
 $\Rightarrow \Pr(F/AA) = 0.2$
- 10% des CH et 15% des CN
 $\Rightarrow \Pr(F/CH) = 0.1, \Pr(F/CN) = 0.15$

Probabilités totales : exemple 3 avec Diagramme en arbre

- Probabilité de fièvre en cas de douleur aiguë de l'abdomen ?
- $\Pr(F) = \Pr(F/AA) \times \Pr(AA) + \Pr(F/CH) \times \Pr(CH) + \Pr(F/CN) \times \Pr(CN) = 0.162$

Règle:

- La probabilité qu'un chemin particulier de l'arbre se réalise, est, d'après le théorème de la multiplication, le produit des probabilités de chaque branche du chemin.
- Les chemins s'excluent mutuellement, la probabilité d'être reçu est égale à la somme des probabilités d'être reçu pour tout chemin aboutissant à un état *F* (reçu).

Probabilités totales : exemple 4 avec Diagramme en arbre

- On sait que le taux de réussite au concours dans les trois CHU SBA, Oran et Telemcen sont respectivement (données arbitraires) de 0.2; 0.15 et 0.1 ($\Pr(\text{"réussite"} / \text{"SBA"}) = 0.2$); on sait que 1/4 des étudiants de l'ouest sont à SBA, 1/4 à Oran et 1/2 à Telemcen. Quelle est la probabilité qu'un étudiant de l'ouest soit reçu au concours?

Probabilités totales : exemple 4 avec Diagramme en arbre

- Soient les événements R :"réussite" et E :"Échec". Donc on a:

$$\begin{aligned}\Pr(R) &= \Pr(R \cap SBA) + \Pr(R \cap Telemcen) + \Pr(R \cap Oran) \\ &= 0.15 * 1/4 + 0.2 * 1/2 + 0.1 * 1/4.\end{aligned}$$

Formule de Bayes

- Théorème de la multiplication:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A/B) \times \Pr(B) = \Pr(B/A) \times \Pr(A).$$

- Utilisons le théorème des probabilités totales, on a:

$$\begin{aligned}\Pr(A) &= \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap \bar{B}) \\ &= \Pr(A/B) \times \Pr(B) + \Pr(A/\bar{B}) \times \Pr(\bar{B})\end{aligned}$$

- On obtient la formule de Bayes:

$$\Pr(B/A) = \frac{\Pr(A/B) \times \Pr(B)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(A/B) \times \Pr(B)}{\Pr(A/B) \times \Pr(B) + \Pr(A/\bar{B}) \times \Pr(\bar{B})}$$

valable dès que $\Pr(A) \neq 0$.

- Cette formule est aussi appelée "théorème de la probabilité des causes", car elle permet de renverser un conditionnement.
- Interprétation :
 - ◇ A est une conséquence, B une cause
 - ◇ La formule permet de remonter aux causes
- Pour calculer une probabilité conditionnelle, utiliser :
 - ◇ La définition
 - ◇ Ou formule ou théorème de Bayes

Exercice

Une maladie M se présente sous deux formes M_1 et M_2 avec les probabilités respectives $\Pr(M_1) = 0.2$ et $\Pr(M_2) = 0.8$, et le symptôme S apparaît dans 80% des cas de M_1 et dans 10% des cas de M_2 . Quelle est la probabilité, pour un patient atteint de M qui présente le symptôme S , d'être atteint de M_1 ?

Formule de Bayes: solution d'exercice

- M_1 : "patient atteint de la maladie de type M_1 "
- M_2 : "patient atteint de la maladie de type M_2 "
- S : "patient présente le symptôme S"
- $\Pr(S/M_1) = 0.8$ et $\Pr(S/M_2) = 0.1$
- $\overline{M_1} = M_2$
- D'où:

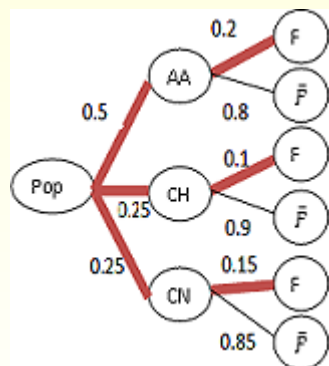
$$\begin{aligned}\Pr(M_1/S) &= \frac{\Pr(S/M_1) \times \Pr(M_1)}{\Pr(S/M_1) \times \Pr(M_1) + \Pr(S/\overline{M_1}) \times \Pr(\overline{M_1})} \\ &= \frac{0.8 \times 0.2}{0.8 \times 0.2 + 0.1 \times 0.8} = 2/3.\end{aligned}$$

Formule de Bayes: cas général

- Soit $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ un système complet d'événements pour l'ensemble E (partition de E), et B un autre événement.
- Pour chaque A_i , $\Pr(A_i/B) = \frac{\Pr(B \cap A_i)}{\Pr(B)}$
- Utilisons le théorème des probabilités totales: on obtient la formule de Bayes générale:

$$\Pr(A_i/B) = \frac{\Pr(A_i) \times \Pr(B/A_i)}{\Pr(A_1) \times \Pr(B/A_1) + \Pr(A_2) \times \Pr(B/A_2) + \dots + \Pr(A_n) \times \Pr(B/A_n)}$$

Formule de Bayes générale: Exemple



- Douleur aiguë de l'abdomen
- Un patient présente de la fièvre. Probabilité de chacune des causes
- Quel est le diagnostic le plus probable ?
- Rappel : $\Pr(F) = 0.162$

Formule de Bayes: Exemple

- La probabilité de pathologie AA chez un patient présente la fièvre est:

$$\begin{aligned}\Pr(AA/F) &= \frac{\Pr(F/AA)}{\Pr(F)} \\&= \frac{\Pr(F/AA)}{\Pr(F/AA) \times \Pr(AA) + \Pr(F/CH) \times \Pr(CH) + \Pr(F/CN) \times \Pr(CN)} \\&= \frac{0.2 \times 0.5}{0.162} = 0.62\end{aligned}$$

- $\Pr(CH/F) = 0.15$, $\Pr(CN/F) = 0.23$

Événement indépendants: Introduction

- Soient A et B deux événements de probabilité connus: $\Pr(A) > 0$ et $\Pr(B) > 0$.
- Quelle est la probabilité pour que A et B se réalisent simultanément: $\Pr(A \cap B) = ?$
- On peut estimer cette probabilité par l'expérience en utilisant sa fréquence stabilité, mais c'est long et coûteux.
- Il y a des cas où, par chance, cette probabilité se déduit immédiatement de celles de A et de B .

Événement indépendants: Définition 1

- A est **indépendant** de B si la réalisation ou non de B **n'influe pas sur** celle de A (le fait que l'un des deux événement soit réaliser ne modifie pas la probabilité de l'autre). D'où la définition suivante:

Définition

- A et B sont indépendant si $\Pr(A/B) = \Pr(A)$.
- Si A et B **ne sont pas indépendant**, on dit qu'ils sont **liés**.

Événement indépendants: Définition 2

- D'après la probabilité conditionnelle: $\Pr(A/B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$, elle entraîne que:

A et B sont indépendants ssi $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \times \Pr(B)$

- Autres formes: $\Pr(A/\overline{B}) = \Pr(A)$, $\Pr(B/A) = \Pr(B)$

- Ne pas confondre événements indépendants et événements exclusifs (incompatibles):
 - ◇ Si $A \cap B = \emptyset$ (sont exclusifs)
 - si B est réalisé, A ne peut pas l'être et réciproquement (la réalisation de B influe sur celle de A : elle l'empêche). En effet:
 $\Pr(A \cap B) = 0 \Rightarrow \Pr(A/B) = 0 = \Pr(B/A)$.
 - D'autre part $\Pr(A \cap B) = 0 \neq \Pr(A) \times \Pr(B) \Leftrightarrow A$ et B ne sont pas indépendants.
 - ◇ Si A et B sont indépendants
 - La réalisation de B n'influe pas sur celle de A et réciproquement
 - $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \times \Pr(B) \neq 0 \Rightarrow (A \cap B) \neq \emptyset \Rightarrow A$ et B sont compatible.

Indépendance entre deux événements : exemple 1

- Au cours de l'épreuve de dé à 6 faces, non truquée, on considère les trois événements:
 - A : "le numéro sorti est strictement plus grand que 4";
 - B : "le numéro sorti est impair";
 - C : "le numéro sorti est strictement supérieur à 3".
- ★ Montrer que A et B sont indépendants et que \overline{B} et C sont liés.

Indépendance entre deux événements : exemple 2

Exemple 2

Dans une population donnée, un individu peut être atteint d'une affection A avec probabilité $1/100$ et d'une affection B , indépendante de A , avec une probabilité $1/20$. Quelle est la probabilité pour qu'un individu choisi au hasard soit atteint des deux maladies?

- si $B \subset A$, alors $\Pr(A \cap B) = \Pr(B)$. D'où

$$\Pr(A/B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = 1, \text{ et } \Pr(B/A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(B)}{\Pr(A)}.$$

Donc A et B ne sont pas indépendants.

- Si on considère 3 événements A , B , C , on dira que ces 3 événements sont indépendants si:
 - 1 sont indépendant 2 à 2: $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \times \Pr(B)$,
 $\Pr(A \cap C) = \Pr(A) \times \Pr(C)$ et $\Pr(B \cap C) = \Pr(B) \times \Pr(C)$,
 - 2 si $\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(A) \times \Pr(B) \times \Pr(C)$.

QCM

On dit qu'un sujet de la population présente un syndrome grippal (causé ou non par le virus de la grippe) s'il a des signes respiratoires, une fièvre subite, des courbatures. Un sujet infecté par le virus de la grippe a 80 chances sur 100 d'avoir ces symptômes. La probabilité pour qu'un sujet quelconque de la population soit infecté par le virus de la grippe est estimée à 30%.

- A- $\Pr(\text{symptômes/Grippe}) = 0,80$.
- B- $\Pr(\text{Grippe/symptômes}) = 0,80$.
- C- $\Pr(\text{Grippe}) = 0,30$.
- D- $\Pr(\text{Grippe et symptômes}) = 0,30$.
- E- $\Pr(\text{Grippe et symptômes}) = 0,24$.

Exercice 1

A partir des données sanitaires on a obtenu les éléments suivants : Coliques néphrétiques et Asthme sont 2 maladies indépendantes.

- Prévalence (nombre ou proportion de malades à un moment donné) de l'asthme = 0,0098.
- Prévalence de coliques néphrétiques = 0,002.
- Prévalence des infections pulmonaires (IP) = 0,10.
- Fréquence des IP chez les asthmatiques = 0,3.
- 40% des asthmatiques sont fumeurs, 30% des fumeurs asthmatiques présentent des affections cardio-vasculaires et 10% des non fumeurs asthmatiques présentent une affection cardio-vasculaire.

- ❶ Quelle est la probabilité d'être asthmatique ou avoir l'infection pulmonaire ?
- ❷ Quelle est la fréquence des porteurs d'asthme ou de coliques néphrétiques ?
- ❸ Un malade présente une IP quelle est la probabilité qu'il soit asthmatique ? (quelle est la fréquence des asthmatiques chez les IP) ?
- ❹ Quelle est la fréquence des affections cardiovasculaires chez les asthmatiques ?
- ❺ Quelle est la fréquence des non fumeurs chez les asthmatiques qui n'ont pas d'affections cardio-vasculaire ?

Exercice 2

Un quart de la population a été vacciné contre une épidémie. On a trouvé que un malade sur cinq avait été vacciné et que parmi les personnes vaccinées, un sur douze a contracté la maladie. On choisit au hasard une personne dans la population.

- 1 Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?
- 2 Sachant que la personne n'a pas été vacciné, quelle est la probabilité qu'elle soit malade.

Exercice 3

On observe trois formes d'une maladie A , notées respectivement A_1 , A_2 , A_3 . Les probabilités respectives de chacune des trois formes sont $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{3}$. Afin d'affiner le diagnostic d'un sujet atteint de la maladie A , un examen E est effectué; le résultat de E est positif dans 10% des cas atteint de la forme A_1 , dans 20% des cas atteints de la forme A_2 et dans 90% des cas de la forme A_3 .

- 1 Quelle est la probabilité pour que le résultat de l'examen E soit négatif chez un sujet tiré au sort parmi ceux atteint de la maladie A .
- 2 On observe chez un patient atteint de la maladie A un résultat positif à l'examen E . Quelle est la probabilité pour qu'il soit atteint de la forme A_1 ? A_2 ? A_3 ?

Exercice 4

Dans une entreprise pharmaceutique, un comprimé est parfait si sa masse en gr est dans $[1.2 - 1.3]$. La probabilité qu'un comprimé soit conforme est 0.98. On tire au hasard un comprimé. Soit A : "le comprimé est conforme", B : "le comprimé est refusé". On contrôle tous les comprimés. Le mécanisme de contrôle est tel que :

- un comprimé conforme est accepté avec une probabilité de 0.98.
- un comprimé non conforme est refusé avec une probabilité de 0.99.

- 1 Calculer la probabilité $\Pr(B/A)$, puis $\Pr(A \cap B)$.
- 2 Calculer la probabilité qu'un comprimé soit refusé.
- 3 La probabilité qu'un comprimé soit conforme sachant qu'il est refusé.

Exercice 5

Dans une population on sait que la probabilité de naissance d'un garçon est de 0,52 et par ailleurs que 2% des filles et 1% des garçons présentent une luxation congénitale de la hanche. On note F l'évènement "naissance d'une fille" et L l'évènement "avoir une luxation de la hanche".

- 1 Calculer les probabilités des événements : " F et L " ; " \bar{F} et L ", " F et \bar{L} ". Les événements F et L sont-ils indépendants?
- 2 Calculer la probabilité qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille.

Exercice 6

Une boîte contient 10 articles dont 4 sont défectueux. On tire 3 objets de cette boîte. Calculer la probabilité pour que ces 3 objets soit défectueux.

Exercice 7

On estime qu'une personne a 6 chances sur 10 d'être atteinte d'une certaine maladie. On effectue deux tests de dépistage. Le premier test est positif à 70% sur les malades et à 20% sur les individus sains. Le second test est positif à 90% sur les malades et 30% sur les individus sains. On suppose que les deux tests sont indépendants et cela chez les malades et chez les sains (indépendance conditionnelle).

- 1 On choisit une personne au hasard, le premier tests est positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit malade.
- 2 On choisit une personne au hasard, les deux tests sont positifs. Quelle est la probabilité que cette personne soit malade.
- 3 Quelle est la probabilité que le second test soit positif si le premier l'a été ?

Exercice 8

Après une certaine forme d'accident cardiaque, on considère qu'en l'absence de prise en charge, il y a 3 issues possibles : décès, complications donnant des séquelles irréversibles, état inchangé. Lorsqu'un patient a eu des complications, on considère qu'il ne peut plus revenir à l'état inchangé. Au bout d'un temps $T_1 = 1$ après l'accident, on définit donc 3 événements possibles : D_1 = "être décédé à T_1 " (l'instant du décès est compris entre 0 et T_1) ; C_1 = "être vivant, mais avec complications, à T_1 " (les complications se sont produites entre 0 et T_1 , et il n'y a pas eu de décès ensuite) ; I_1 = "être vivant dans l'état inchangé à T_1 ". Si on attend jusqu'au temps $T_2 = 2$ après l'accident, on définit 3 nouveaux événements : D_2 = "être décédé à T_2 " (l'instant du décès est entre 0 et T_2) ; C_2 = "être vivant, mais avec complications, à T_2 "; I_2 = "être dans l'état inchangé à T_2 ". En notant $\overline{D_1}$ l'événement "être vivant à T_1 "

1 On suppose ne connaître que $\Pr(D_1) = \Pr(D_2/\overline{D_1}) = 0.1$.

- Interpréter en une phrase l'écriture $\Pr(D_2/D_1)$. En déduire la valeur de cette probabilité.
- En utilisant le théorème des probabilités totales, exprimer $\Pr(D_2)$ en fonction des événements D_1 et $\overline{D_1}$. En déduire la valeur de $\Pr(D_2)$.

2 On suppose de plus que

$$\Pr(D_2/\overline{D_1}) = \Pr(D_2/I_1) = \Pr(D_2/C_1).$$

- Interpréter en une phrase l'ensemble de ces égalités. En déduire la valeur de $\Pr(C_2/C_1)$.
- On donne les probabilités suivantes : $\Pr(C_1) = 0.3$, $\Pr(C_2/I_1) = 0.2$. Calculer $\Pr(C_2)$.

Exercice 9

Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0.1%. Autorisez-vous la commercialisation de ce test?

- Cours Probabilité, Benchikh Tawfik,
<http://www.univ-sba.dz/lsp/s/images/pdf/cours/>
- Probabilités et Biostatistique.
www.chups.jussieu.fr/polys/biostats/CoursProba1.pdf
- FMPMC Pitié-Salpêtrière-probabilités, cours 1 et 2.
www.chups.jussieu.fr/polys/biostats/coursProba-1-2/
- Notions de Probabilités, Roch Giorgi, LERTIM, Faculté de Médecine, Université de la Méditerranée, Marseille, France <http://lertim.fr>