Analyse combinatoire

Pr. M.TALEB

Introduction

- On dit qu'un ensemble est dénombrable si on peut numéroter ses éléments pour les compter.
- Les questions des dénombrements constituent une branche des mathématiques qu'on appelle « Analyse combinatoire ».
- Analyse combinatoire comprend un ensemble de méthode qui permettent de déterminer le nombre de tous les résultats possible d'une expérience particulière.
- La connaissance de ses méthodes de dénombrement est indispensable

  au calcul des probabilités qui constituent le fondement des statistiques.

II. Arrangements

1. Arrangements sans répétition:

On appelle arrangements sans répétition ou arrangement tout court ,de « p » éléments parmi « n » une disposition ordonnée de « p » éléments. un élément quelconque ne figurant qu'une seule fois dans cette disposition.

on parle de tirage sans remise

Ex: a,b,c $\rightarrow$ ab, ac,ba, bc,ca,cb

Le nombre d'arrangements de p objets pris parmi n est noté : A_n^p.

Remarque : On a nécessairement $1 \leq p \leq n$ et $n, p \in \mathbb{N}^*$

Arrangements d'ordre 2 des 3 lettres : a, b , c

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(n-p+1) = A_3^2 = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

- Ex : le nombre de tierce dans une course de 10 chevaux

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 \text{ manières}$$

2. Arrangements avec répétition:

Un arrangement de n objets p à p avec répétition est un arrangement ou chaque objet peut être répété jusqu'à p de fois.

On parle de tirage avec remise

Ex:

a,b,c (n=3, p=2) $\longrightarrow$ ab, ac, ba, bc, ca,cb

aa, bb,cc

- Nombre d'arrangement avec répétition

$$A_n^p = n \times n \times n \times .... \times n = n^p$$

Arrangements d'ordre 2 des 3 lettres : a, b , c

$$A_2^{3} = 3^2 = 9$$

Exemple:

- Combien de fois peut on former une ligne téléphonique d'une ville .
  (sachant qu'une ligne est constituée de 06 Chiffres)

Chaque chiffre est constitué de 10 façons
(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) (n= 10 P= 6)

- Le nombre de lignes téléphoniques est :

$$A_n^p = n^p \quad = \quad A_{10}^{6} = 10^6$$

III. Permutations

1. Permutations sans répétition:

Un permutation de n objets est un ensemble ordonné de ces n objets .

Les permutations de n objets constituent un cas particulier des arrangements (c'est-à-dire , ou n=p)

Ex: a,b,c

abc – acb – bac – cab – bca – cba

Les permutations possibles des 3 lettres :

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots \times 1 = n!$$

$$P_n = 3 != 3.2.1 = 6$$

2. Permutation avec répétition:

Il arrive que parmi les n objets dont on cherche le nombre de permutation , certains d'entre eux , au nombre de r par exemple soient tous semblables. Auquel cas , rien ne distingue les permutations des ces r objets entre eux .

$$\boxed{P_n(\text{avec répétition}_{(r)}) = \frac{P_n}{P_r} = \frac{n!}{r!}}$$

Ex: nombre de permutations possibles avec le mot : TERRE

$$P_5(r_E = 2,\ r_R = 2) = \frac{5!}{2!\,2!} = 30.$$

III. Combinaisons

- On appelle combinaison de p éléments parmis ($n \geq p$) , tout ensemble

que l'on peut former en choisissant p de ces éléments , sans considération d'ordre .

Deux combinaisons distinctes diffèrent donc par al nature d'au moins un élément.

- Les combinaisons possibles des 4 lettres : a-b-c-d 3 à 3   sont :

    Abc, abd, bcd, acd

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

Ex : le nombre de tierces dans le désordre dans une course de chevaux

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \text{ manières}$$