

Loi Binomiale-Loi de poisson

Pr. M.TALEB

I. Loi binomiale

- Variable aléatoire discrète:

Lorsque les éventualité se réduisent à une alternative (Echech/ Succès) , la variable aléatoire (Nombre de succès) suit une loi de probabilité appeleé loi Binomiale.

Calcul de la probabilité

- Soit P la probabilité d'un évènement A , donc $q = 1 - p$ est la probabilité de l'évènement contraire.

La probabilité de réaliser x fois, au cours de n épreuves identiques, l'évènement A est :

$$P(x) = C_n^x \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

- OU : $C_n^x = \frac{n!}{x! (n-x)!}$ Combinaison $n \geq x$

n : Nombre d'épreuve, taille de l'échantillon

p : probabilité élémentaire

$n!$: $n(n-1)(n-2).....1$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ (Lire 5 factoriel)

Exemple

- Déterminer la loi de probabilité du nombre de garçon dans une famille de 4 enfants.

Variable aléatoire discrète

$P = \frac{1}{2}$ (Probabilité d'avoir un garçon)

$q = 1/2$ (Probabilité de l'évènement contraire)
d'avoir une fille.

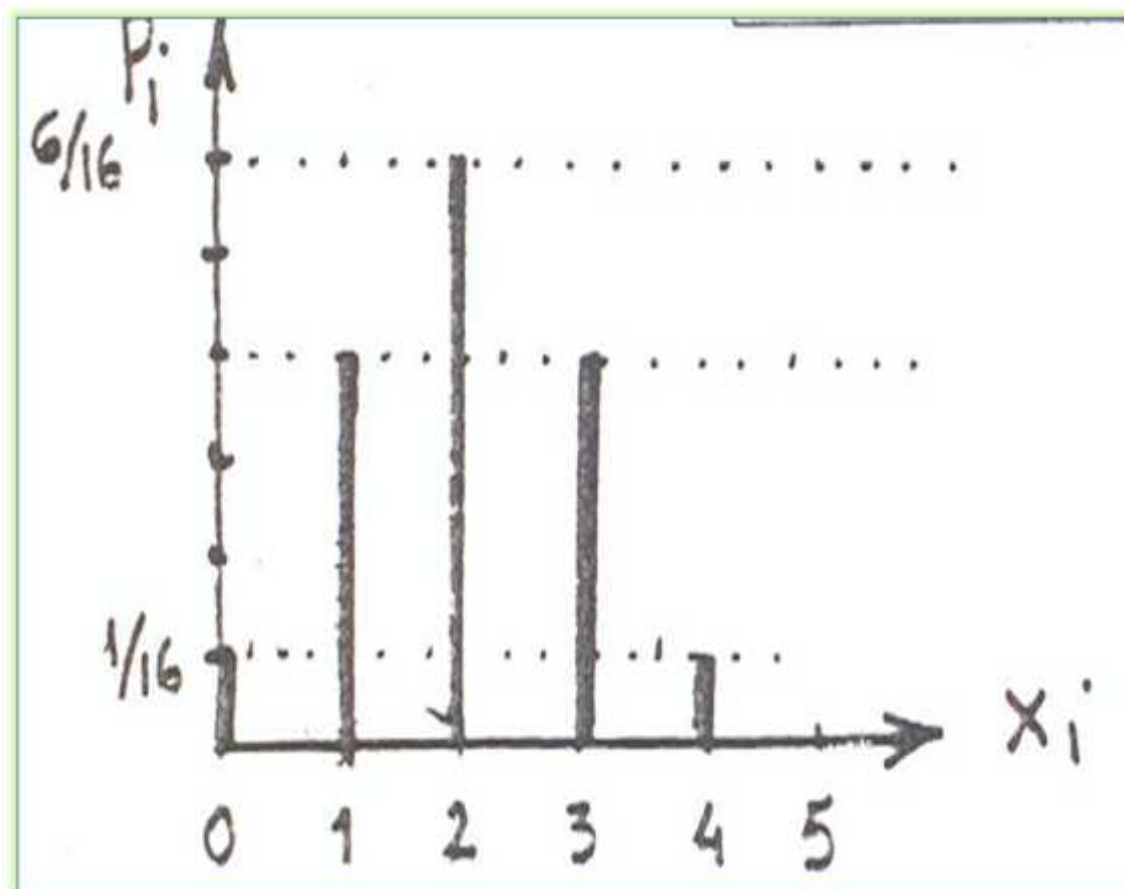
$$\text{pour } x = 0 \Rightarrow P(0) = C_4^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0,062$$

$$\text{pour } x = 1 \Rightarrow P(1) = C_4^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16} = 0,25$$

$$\text{pour } x = 4 \Rightarrow P(4) = C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16} = 0,062$$

Loi de probabilité:

X_i	0	1	2	3	4	Σ
P_i	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16	1



$$P(0) = C_4^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{0! (4-0)!} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

La probabilité de n'avoir aucun garçon est de 0,0625

II. Loi de poisson

- Variable aléatoire discontinue:

On appelle distribution de poisson ,la distribution de probabilité discrète:

$$P(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

- Ou:

$e = 2,71$ (Base de logarithme né-pèrien)

λ = Espérance mathématique

$$E_X = \lambda \text{ et } V(X) = \lambda$$

C'est une loi de probabilité pour les événements faible.

Exemple

- On suppose une variable aléatoire discrète est distribuée dans le temps avec une moyenne de 9 unités par heures.

Quelle est la probabilité d'avoir 3 unités par heure?

(En supposant que cette variable suit la loi de poisson)

$$\begin{aligned}
 E(x) = \lambda = 9 \\
 x = 3
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{aligned}
 P(x=3) &= \frac{9^3 \cdot e^{-9}}{3!} = 0,015 \\
 P(x) &= \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}
 \end{aligned}$$

On peut utilisé la table : $P(x=3) = 0,015$