# Loi de Probabilité

Pr.M.TALEB

# I - VARIABLE ALEATOIRE DISCRETE
# LOI DE PROBABILITE

## I.1 : Variable aléatoire discrète :

Soit x une variable pouvant prendre l'ensemble des valeurs :
$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , \dots\dots\dots , x_n$ ,avec les probabilités
$P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , \dots\dots\dots , P_n$ ,respectivement, telles
que $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots\dots\dots + P_n = 1 = \sum_{i=1}^{n} P_i$ .

On dit que x est variable <u>discrète</u> si elle ne peut prendre que des valeurs isolées et variable <u>aléatoire</u> si sa valeur est fixée par le résultat d'une épreuve.

Donc toutes les (valeurs) variables qui sont associées à une épreuve aléatoire et qui prennent les valeurs numériques discontinues s'appellent variables aléatoires discontinues.

## I.2 : Loi de probabilité :

Représentation graphique

On dit qu'on a définit une loi de probabilité (fonction de distribution) d'une variable aléatoire discontinue si on arrive à déterminer toutes les valeurs que peut prendre la variable xi et toutes les probabilités correspondantes Pi.

On peut présenter une loi de probabilité par un ensemble des couples de valeurs associées de xi et Pi, au moyen d'un tableau :

| $x_i$ | $x_1$ $x_2$ . . . . . . $x_n$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|
| $P_i$ | $P_1$ $P_2$ . . . . . . $P_n$ | 1 |

## Exemple 1 :

On jette un dé équilibré une seule fois.

Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de points obtenus sur chaque face.

- Déterminer la loi de probabilité de cette variable.
- Représenter graphiquement cette loi.

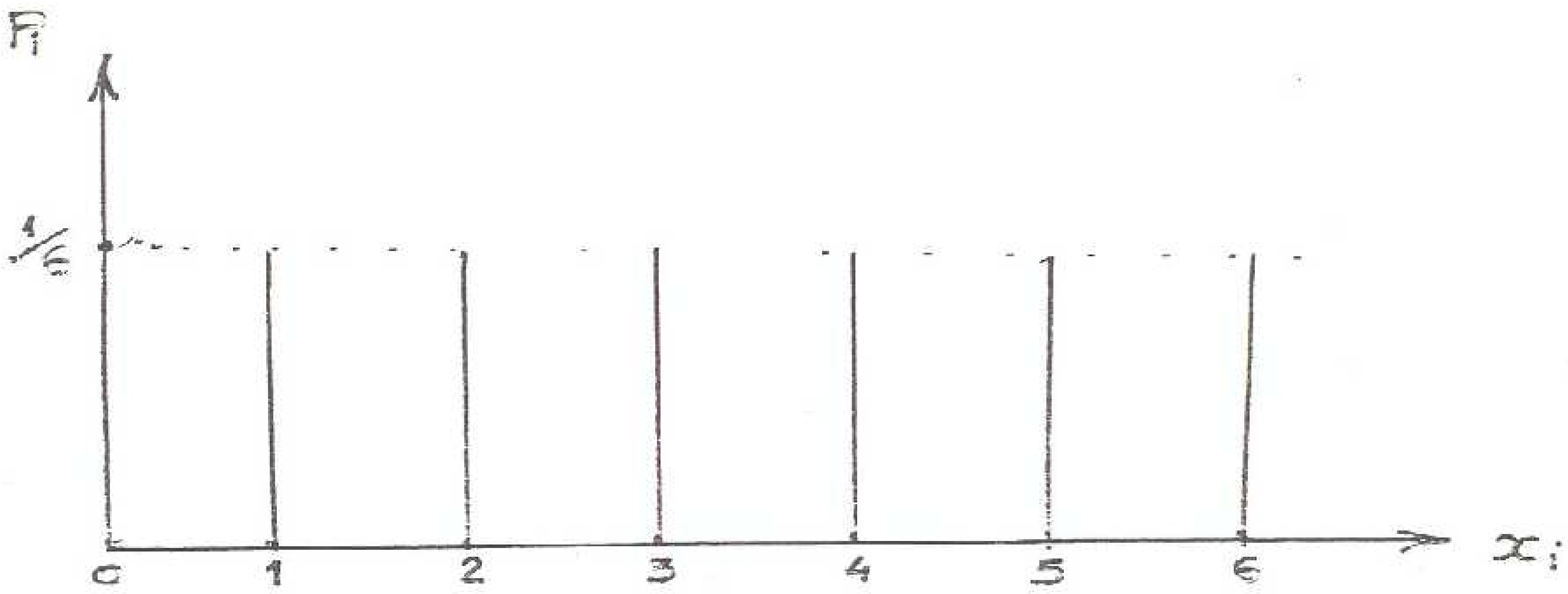
. Loi de probabilité :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_i$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

Connaissant toutes les valeurs possibles de la variable xi et les valeurs correspondantes de Pi, on a donc défini la loi de probabilité de cette variable.

## Représentation graphique de cette loi :

En portant les valeurs de xi en abscisses et celles des Pi en ordonnées, on obtient un diagramme en bâtons.



Exemple 2 :

On lance une paire de dés. Soit $x$ la somme de points obtenus.

- Déterminer la loi de probabilité de cette variable.
- Construire le graphe correspondant.

## Loi de probabilité :

On peut dénombrer tous les cas possibles en construisant le tableau suivant :

$D_1$

$D_2$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

On remarque que les valeurs possibles de x sont toutes les valeurs entières de 2 à 12 ; x E [2 ; 12 ].

Ainsi les probabilités correspondantes :

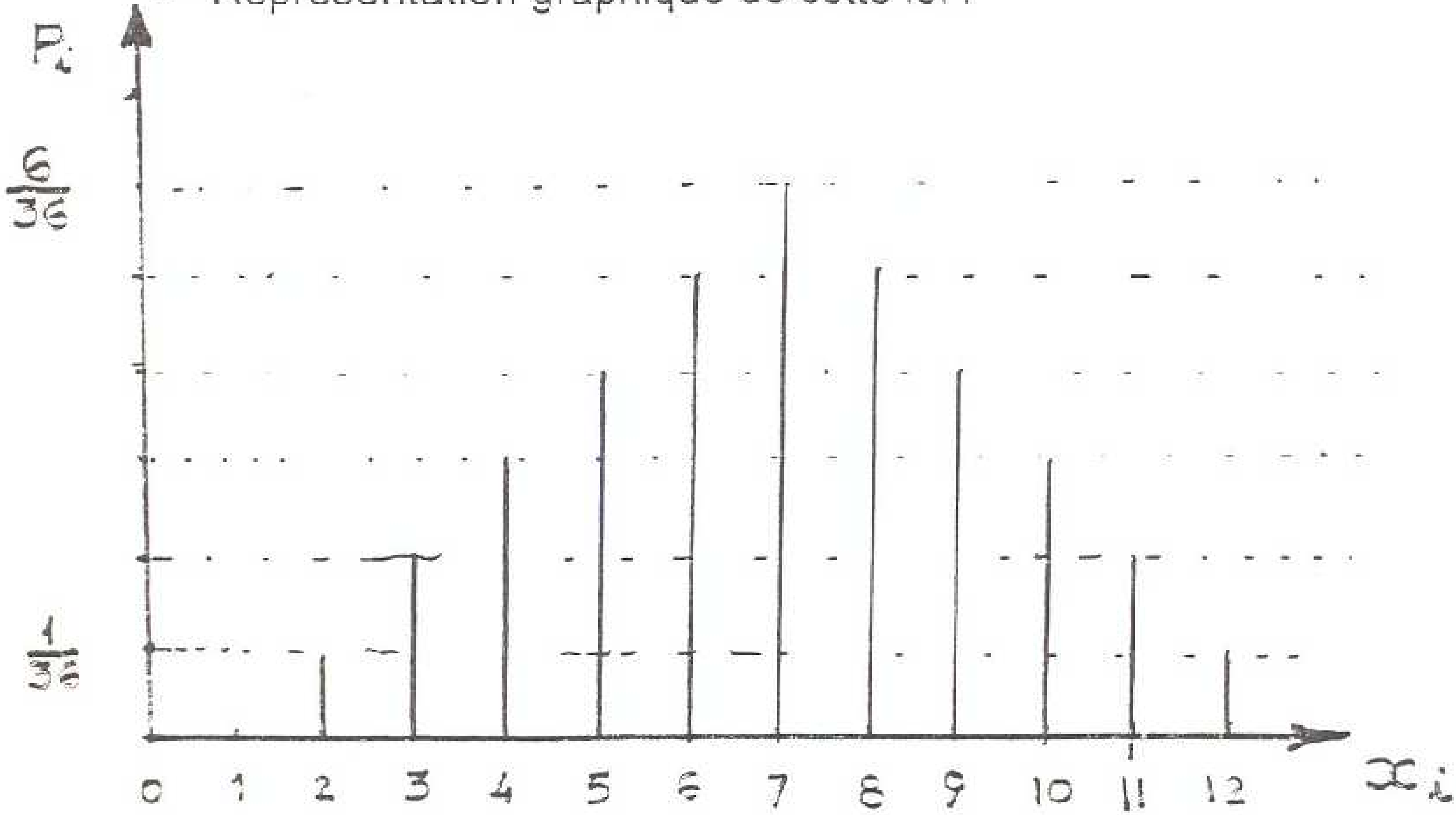
| $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_i$ | $1/36$ | $2/36$ | $3/36$ | $4/36$ | $5/36$ | $6/36$ | $5/36$ | $4/36$ | $3/36$ | $2/36$ | $1/36$ | 1 |

Donc on a bien défini la loi de probabilité de cette variable, puisqu'on a déterminé toutes les valeurs possibles de xi et les valeurs des probabilités correspondantes Pi.

On constate que

$$\sum_{i=1}^{11} P_i = 1$$

- Représentation graphique de cette loi :



## I -3. Espérance mathématique et variance.

Espérance mathématique :

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire discontinue, notée $E(x)$ vaut :

$$E(x) = F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + F_3 \cdot x_3 + \cdots + F_n \cdot x_n .$$

$$\Rightarrow \boxed{E(x) = \sum_{1}^{n} F_i \cdot x_i}$$

ex 1 : $E(x) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \cdots + \frac{1}{6} \cdot 6 = 21/6$

$\rightarrow E(x) = 21/6$ .

Pour l'exemple 2 :

$$E(x) = \frac{1}{36}\cdot 2 + \frac{2}{36}\cdot 3 + \cdots + \frac{1}{36}\cdot 12 = 7$$

$\Rightarrow E(x) = 7.$

- Variance :

La variance d'une variable aléatoire discontinue, notée $\sigma_x^2$ ou $V(x)$ est définie par :

$$\boxed{V(x) = \sum P_i \left[x_i - E(x)\right]^2}$$

formule de définition ; qui peut encore s'écrire :

$$\boxed{V(x) = \sum P_i . x_i^2 - \left[E(x)\right]^2}$$

Formule pratique.

Procédure de calcul de E (x) et V (x) d'une variable aléatoire discontinue.

**Reprenons l'exemple N°1**

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_i$ | $1/6$ | $1/6$ | $1/6$ | $1/6$ | $1/6$ | $1/6$ | 1 |
| $P_i x_i$ | $1/6$ | $2/6$ | $3/6$ | $4/6$ | $5/6$ | $6/6$ | $\Sigma P_i \cdot x_i = 21/6$ |
| $P_i x^2_i$ | $1/6$ | $4/6$ | $9/6$ | $16/6$ | $25/6$ | $36/6$ | $\Sigma P_i \cdot x_i^2 = 91/6$ |

$\Rightarrow \quad E(x) = \Sigma P_i \cdot x_i = 21/6$

$\Rightarrow \quad E(x) = 21/6 = 3.5$

$$V(X) = \sum p_i \cdot x_i^2 - \left[E(x)\right]^2$$

$$= \quad 91/6 - \left[21/6\right]^2 = \frac{91}{6} - \frac{441}{36}$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{546 - 441}{36} = \frac{105}{36} = 35/12$$

$$\Rightarrow V(x) = 2{,}9$$

Représentation graphique de la fonction de répartition F(x) :