PROBABILITES

Notions de probabilités

Faculté de Médecine, UDL
$1^{\text{ère}}$ année CD

30 Septembre 2015

Plan de cours

1. Règles de calcul de probabilités
   - Règle des probabilités complémentaires
   - Système complet d'événements
   - Probabilités conditionnelles
   - Probabilités totales
   - Formule de Bayes
   - Événements indépendants
2. Exercices

Règle des probabilités complémentaires

- La probabilité d'un événement E et celle de son contraire $\overline{E}$ ont pour somme 1:

$$E \cup \overline{E} = \Omega$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbf{Pr}(\Omega) = 1 &= \mathbf{Pr}(E \cup \overline{E}) \\ 1 &= \mathbf{Pr}(E) + \mathbf{Pr}(\overline{E}). \end{aligned}$$

Règle des probabilités complémentaires: Exemple

- Jeter un dés. Quelle est la probabilité d'obtenir moins de 6.
  - E: "obtenir moins de 6" $\Rightarrow \overline{E}$:"obtenir 6"

$$\Pr(\overline{E}) = q = \frac{1}{6} \Longrightarrow \Pr(E) = p = 1 - \Pr(\overline{E}) = \frac{5}{6}.$$

Système complet d'événements

- Soit E un événement qui peut se réaliser selon diverses modalités s'excluant l'une l'autre, c'est-à-dire:

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \text{ et } E_i \cap E_j = \emptyset \text{, pour } i \neq j$$

(On dit qu'on a un **système complet d'événements**)

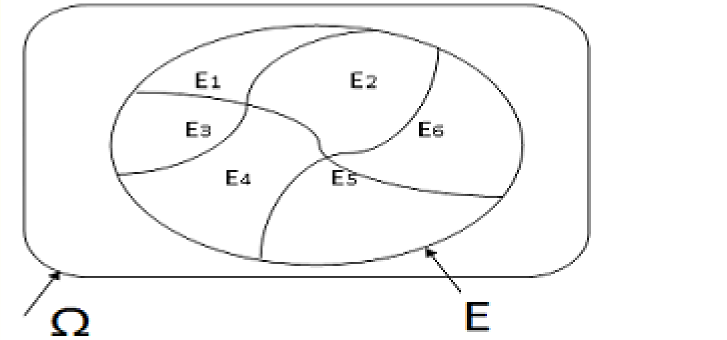


Figure: Système complet

Système complet d'événements

- Alors, la probabilité totale de E est la somme des probabilités des événements consistent en ces diverses modalités:

$$\begin{aligned}\mathbf{Pr}(E) &= \mathbf{Pr}(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) \\ &= \mathbf{Pr}(E_1) + \mathbf{Pr}(E_2) + \ldots + \mathbf{Pr}(E_n)\end{aligned}$$

Système complet d'événements: Exemple

- On lance deux dés; Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 10 ?
  - ◇ L'événement E: "obtenir au moins 10" $\Leftrightarrow E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ avec:
  - ◇ E_1: "obtenir 10" $= \{(4,6),(6,4),(5,5)\} \Rightarrow$ le nombre de cas favorables au $E_1 = |E_1| = 3$.
  - ◇ E_2:"obtenir 11", $= \{(5,6),(6,5)\} \Rightarrow$ nombre de cas favorables au $E_2 = |E_2| = 2$.
  - ◇ E_3: "obtenir 12" $= \{(6,6)\} \Rightarrow |E_3| = 1$ (un cas favorables).
  - ◇ $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $E_1 \cap E_3 = \emptyset$, $E_2 \cap E_3 = \emptyset$.

Système complet d'événements: Exemple

- L'ensemble fondamentale est:
$$\begin{aligned}\Omega &= \{(i,j)/1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}\\ &= \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(6,1),\ldots,(6,6)\}\end{aligned}$$
et le nombre des cas possibles= $|\Omega| = 36$.

- Rappel: $\mathbf{Pr}(A) = \frac{\text{nbre de cas favorable}}{\text{nbes de cas possible}}$

- Donc

$$\begin{aligned}\mathbf{Pr}(E) &= \mathbf{Pr}(E_1 \cup E_2 \cup E_3)\\ &= \mathbf{Pr}(E_1) + \mathbf{Pr}(E_2) + \mathbf{Pr}(E_3) = \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36}\ .\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Probabilités conditionnelles : introduction

- Soit deux événements non exclusifs A et B $(A \cap B \neq \emptyset)$
  - Exemple: avoir un signe clinique (douleur de la fosse iliaque droite) et avoir une maladie (avoir une appendicite)
- La probabilité de A sachant que B est réalisé.
  - Exemple: la probabilité d'avoir l'appendicite sachant que patient souffre de douleur de la fosse iliaque droite.
  - En générale: lors de l'établissement d'un diagnostic, la probabilité pour que le patient soit atteint d'une maladie donnée se modifie au fur et à mesure que les symptômes et les résultats des examens successifs sont connus.

Probabilités conditionnelles : introduction

- Expérience considérée sur une population P
- Événement A de probabilité $\mathbf{Pr}(A) > 0$
- Que devient $\mathbf{Pr}(A)$ si on se restreint à une sous-population de P
  - A = "taille $\in [170; 175]$"; Sous-population = les hommes
  - A = présence d'une maladie M; Sous-population = les individus présentant un signe S
- B = événement conditionnant, qui définit la sous-population
  - B=être un homme ; B=présenter le signe S
- L'ensemble fondamental doit parler de B
  - Ensemble produit
  - Exemple : $\{(M, S), (M, \overline{S}), (\overline{M}, S), (\overline{M}, \overline{S})\}$

Probabilités conditionnelles : Notation

- $\mathbf{Pr}(A/B)$ = Prob de A pour les individus présentant B
  = Probabilité de A sachant que B (s'est produit)
  = Probabilité de A parmi les B
  = Probabilité de A si B
- Confusion fréquente entre $\mathbf{Pr}(A/B)$ et $\mathbf{Pr}(A \cap B)$

Probabilités conditionnelles : formule de calcul

- La probabilité conditionnelle est donnée la formule suivante :

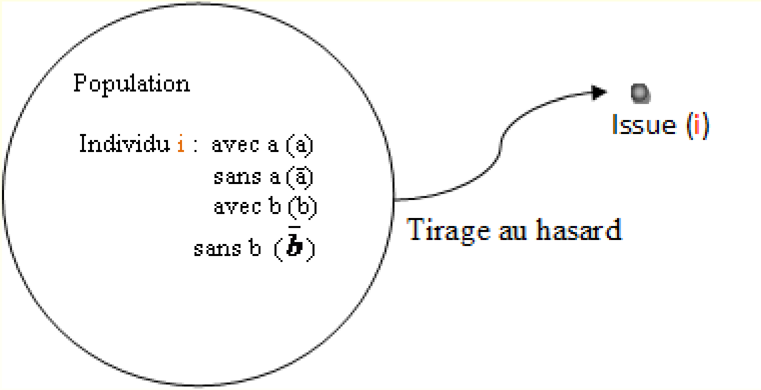
$$\mathbf{Pr}(A/B) = \frac{\mathbf{Pr}(A \cap B)}{\mathbf{Pr}(B)} = \frac{\text{Nombre de réalisation possible de } A \ et \ B}{\text{nombre de réalisation de } B}$$

- $\mathbf{Pr}(B)$ ne doit pas être nul
- $\mathbf{Pr}(B/A)$ est une véritable probabilité
  - $A \cap B \subset B \Rightarrow \mathrm{Pr}(A \cap B) \leq \mathrm{Pr}(B) \Rightarrow \mathrm{Pr}(A/B) \leq 1$
  - Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (au moins chez les B) $\Rightarrow$ $\mathrm{Pr}((A_1 \cup A_2)/B) = \mathrm{Pr}(A_1/B) + \mathrm{Pr}(A_2/B)$

Probabilités conditionnelles: Interprétation fréquentielle

- Les individus de la population aient ou n'aient pas les caractères a et b.
  - Exemple, b: "la personne fume"; a: "elle a le cancer".
- Considérons le schéma de sondage (l'épreuve aléatoire) suivant: on tire un individus i et on observe a ou $\overline{a}$ et b ou $\overline{b}$.

Probabilités conditionnelles: Interprétation fréquentielle



Probabilités conditionnelles: Interprétation fréquentielle

- $\Omega = \{ab, a\overline{b}, \overline{a}b, \overline{a}\overline{b}\}$.
- N_a: nombre d'individus avec a (cas favorable),
- N_b: nombre d'individus avec b (cas favorable),
- N_{ab}: nombre d'individus avec a **et** b (cas favorable),
- N = Taille de la population.

- Soient $A = \{a\}$: "a le cancer" et $B = \{b\}$: "fumeur".
- $\mathbf{Pr}(A) = \frac{N_a}{N}$, $\mathbf{Pr}(B) = \frac{N_b}{N}$, $\mathbf{Pr}(A \cap B) = \frac{N_{ab}}{N}$.

Probabilités conditionnelles: Interprétation fréquentielle

- La probabilité de **cancer** pour un **fumeur** pourra être définie comme:

$$\frac{N_{ab}}{N_b} = \frac{N_{ab}/N}{N_b/N} = \frac{\mathbf{Pr}(A \cap B)}{\mathbf{Pr}(B)} = \mathbf{Pr}(A/B).$$

  - Il s'agit de la proportion d'individus avec cancer dans la sous-ensemble des fumeurs.
  - Noter que l'ensemble fondamentale n'est pas Ω, mais la sous-population de fumeur: $\Omega' = \{ab, a\bar{b}\}$.
- De façon similaire on définit le probabilité de cancer pour un non fumeur: $\mathbf{Pr}(A/\overline{B})$.

Probabilités conditionnelles: Exemple 1 (Ω fini)

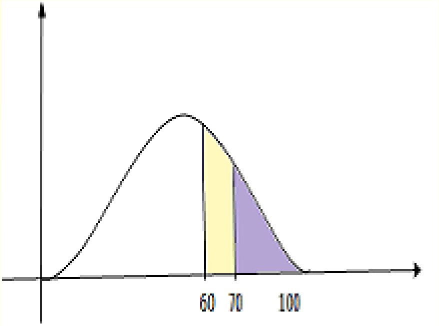
- On lance deux dés (équilibrés). La somme est 6. Quelle est la probabilité qu'un des résultats soit 2?
  - On a 36 résultats possibles, équiprobable.
  - B: "somme des deux dés = 6" = $\{(2,4),(4,2),(1,5),(5,1),(33)\}$
  - A: "au moins un des deux dés donne 2" = $\{(2,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,2),(2,4),(4,2),(2,5),(5,2),(2,6),(6,2)\}$
  - Le nombre de réalisation de $A \cap B = (\{(2,4)(4,2)\}) = 2$.
  - $\Pr(A \cap B) = \frac{2}{36} = 0.056$, $\Pr(B) = \frac{5}{36}$ et $\Pr(A) = 11/36$.
  - D'où $\Pr(A/B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = 2/5$.

Probabilités conditionnelles: Exemple 2 (Ω infini)

- Durée de vie t : $\mathbf{Pr}(t_1 \leq t \leq t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$, avec
$$f(x) = \begin{cases} \alpha t^2(100-t)^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 100 \\ 0 & sinon \end{cases}$$
  - $\int_0^{100} f(t)dt = 1 \Rightarrow \alpha = 3 \times 10^{-9}$ (il s'agit bien d'une loi de probabilité)
  - Probabilité p de décès entre 60 et 70 sachant qu'on a déjà vécu 60 ?

Probabilités conditionnelles: Exemple 2 (Ω infini)

- $p = \frac{\mathbf{Pr}[(60 \leq t \leq 70) \cap (t \geq 60)]}{\mathbf{Pr}(t \geq 60)} = \frac{\mathbf{Pr}(60 \leq t \leq 70)}{\mathbf{Pr}(t \geq 60)}$
- $\mathbf{Pr}(60 \leq t \leq 70) = \int_{60}^{70} f(t)dt$
- $\mathbf{Pr}(t \geq 60) = \int_{60}^{100} f(t)dt$
- $p = 0.486$



Exemple: Diagnostic

Parmi les patients qui consultent un médecin , la probabilité d'avoir la maladie M est $\mathbf{Pr}(M) = 0.2$. Un symptôme S permet de déceler à **coup sûr** la présence de la maladie M, mais il n'apparaît pas chez tous ceux qui sont atteints de M. On sait que 10% des patients qui se présentent à la consultation chez ce médecin ont à la fois **la maladie et le symptôme**. Quelle est la probabilité pour un patient atteint de M de présenter le symptôme S, lorsqu'il se présente à la consultation chez ce médecin?

- Soit M: "avoir la maladie M", S: "avoir le symptôme S"
- L'énoncé implique que:
  - $P(M) = 0.2$,
  - $\Pr(M/S) = 1$ (le symptôme permet de déceler à coup sûr M)
  - $P(M \cap S) = 0.1$.
- Par définition de probabilité conditionnelle:

$$\mathbf{Pr}(S/M) = \frac{\mathbf{Pr}(M \cap S)}{\mathbf{Pr}(M)} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5.$$

Probabilités conditionnelles: Théorème de la multiplication

- $\mathbf{Pr}(B/A) = \frac{\mathbf{Pr}(A \cap B)}{\mathbf{Pr}(A)} \Rightarrow \mathbf{Pr}(A \cap B) = \mathbf{Pr}(B/A) \times \mathbf{Pr}(A)$.
- $\mathbf{Pr}(A/B) = \frac{\mathbf{Pr}(A \cap B)}{\mathbf{Pr}(B)} \Rightarrow \mathbf{Pr}(A \cap B) = \mathbf{Pr}(A/B) \times \mathbf{Pr}(B)$
- Donc La probabilité pour que deux événements A et B se produisent simultanément, soit $\mathbf{Pr}(A \cap B)$, est

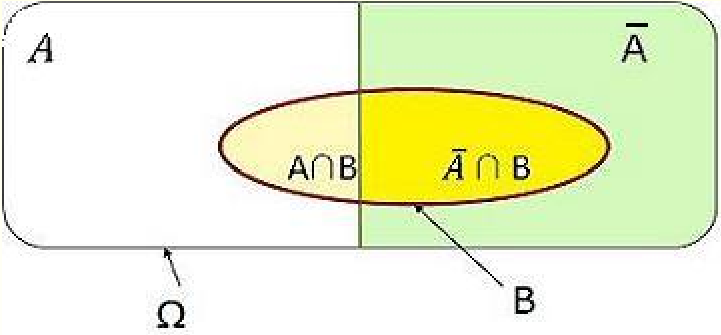
$$\mathbf{Pr}(A \cap B) = \mathbf{Pr}(B/A) \times \mathbf{Pr}(A) = \mathbf{Pr}(A/B) \times \mathbf{Pr}(B)$$

- En général, si A, B et C sont des événement non exclusifs, alors :

$$\mathbf{Pr}(A \cap B \cap C) = \mathbf{Pr}(A) \times \mathbf{Pr}(B/A) \times \mathbf{Pr}(C/(A \cap B))$$

Théorème de la probabilité totale: cas particulier

- Soit $B \subset \Omega$. Dans le cas où $\Omega = A \cup \overline{A}$, alors:
  - $B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \overline{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$
  - $(B \cap A) \cap (B \cap \overline{A}) = \emptyset$ (sont exclusifs) car $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
- $$\begin{aligned}\mathbf{Pr}(B) &= \mathbf{Pr}(A \cap B) + \mathbf{Pr}(\overline{A} \cap B) \\ &= \mathbf{Pr}(B/A) \times \mathbf{Pr}(A) + \mathbf{Pr}(B/\overline{A}) \times \mathbf{Pr}(\overline{A})\end{aligned}$$



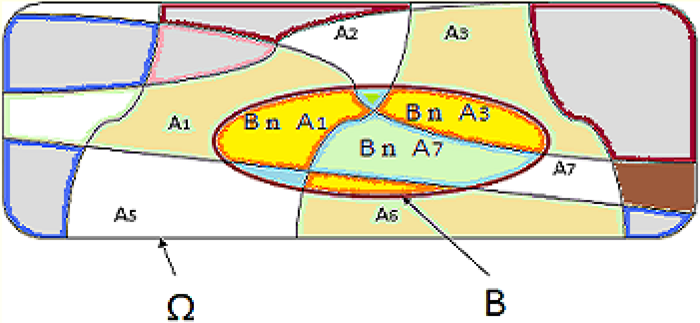
Théorème de la probabilité totale: Exemple 1

- Une population est composé de 40% d'homme et de 60% de femme; 50% des hommes et 30% des femmes fument. Quelle est la probabilité pour une personne choisi au hasard soit fumeur ?
  - Fum: "la personne est fumeur",
  - H: "la personne est un homme"
  - F: "la personne est une femme".
  - $\Pr(H) = 0.4$, $\Pr(F) = 0.6$; $\Pr(Fum/H) = 0.5$ et $\Pr(Fum/F) = 0.3$
- Comme $\Omega = H \cup F = H \cup \overline{H}$, avec $F = \overline{H}$, donc on a:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Pr}(Fum) &= \mathbf{Pr}(Fum \cap H) + \mathbf{Pr}(Fum \cap F) \\
&= \mathbf{Pr}(Fum/H) \times \mathbf{Pr}(H) + \mathbf{Pr}(Fum/F) \times \mathbf{Pr}(F) \\
&= 0.5 * 0.4 + 0.3 * 0.6 = 0.38.
\end{aligned}$$

Théorème de la probabilité totale: cas général

- Soit $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ une partition de Ω (système complet): $\Omega = \bigcup_i A_i$ avec $A_i \cap A_j = \emptyset$, pour $i \neq j$ (les A_i sont exclusifs)



Théorème de la probabilité totale: cas général

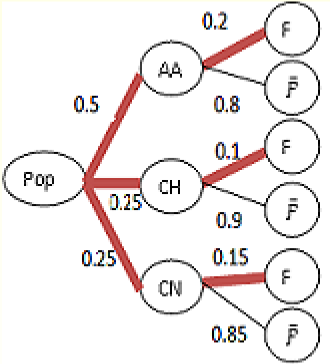
- $B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$
  $= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$
- Les $(B \cap A_i)$ sont exclusifs car les A_i le sont. D'où:
- $\mathbf{Pr}(B) = \mathbf{Pr}(B \cap A_1) + \mathbf{Pr}(B \cap A_2) + \ldots + \mathbf{Pr}(B \cap A_n)$
- Théorème de la multiplication:

$$\mathbf{Pr}(B \cap A_i) = \mathbf{Pr}(B/A_i) \times \mathbf{Pr}(A_i)$$

- D'où le théorème de la probabilité totale:

$$\mathbf{Pr}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Pr}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Pr}(B/A_i) \times \mathbf{Pr}(A_i) \,.$$

Probabilités totales : exemple 3 avec Diagramme en arbre



- Douleur aiguë de l'abdomen
- 3 pathologie:
  - AA (50% des cas) $\Rightarrow \Pr(AA) = 0.5$
  - CH (25% des cas) $\Rightarrow \Pr(CH) = 0.25$
  - CN (25% des cas) $\Rightarrow \Pr(CN) = 0.25$
- 20% des AA ont la fièvre
  $\Rightarrow \mathbf{Pr}(F/AA) = 0.2$
- 10% des CH et 15% des CN
  $\Rightarrow \mathbf{Pr}(F/CH) = 0.1$, $\mathbf{Pr}(F/CN) = 0.15$

Probabilités totales : exemple 3 avec Diagramme en arbre

- Probabilité de fièvre en cas de douleur aiguë de l'abdomen ?
- $$\mathbf{Pr}(F) = \mathbf{Pr}(F/AA) \times \mathbf{Pr}(AA) + \mathbf{Pr}(F/CH) \times \mathbf{Pr}(CH) + \mathbf{Pr}(F/CN) \times \mathbf{Pr}(CN) = 0.162$$

Probabilités totales: Règle de Diagramme en arbre

Règle:

- La probabilité qu'un chemin particulier de l'arbre se réalise, est, d'après le théorème de la multiplication, le produit des probabilités de chaque branche du chemin.
- Les chemins s'excluent mutuellement, la probabilité d'être reçu est égale à la somme des probabilités d'être reçu pour tout chemin aboutissant à un état F (reçu).

Probabilités totales : exemple 4 avec Diagramme en arbre

- On sait que le taux de réussite au concours dans les trois CHU SBA, Oran et Telemcen sont respectivement $($données arbitraires$)$ de 0.2; 0.15 et 0.1 $(\mathbf{P}r(\text{"réussite"}/\text{"}SBA\text{"}) = 0.2)$; on sait que $1/4$ des étudiants de l'ouest sont à SBA, $1/4$ à Oran et $1/2$ à Telemcen. Quelle est la probabilité qu'un étudiant de l'ouest soit reçu au concours?

Probabilités totales : exemple 4 avec Diagramme en arbre

- Soient les événements R:"réussite" et E:"Échec". Donc on a:

$$\begin{aligned}\mathbf{Pr}(R) &= \mathbf{Pr}(R \cap SBA) + \mathbf{Pr}(R \cap Telemcen) + \cap(R \cap Oran) \\ &= 0.15 * 1/4 + 0.2 * 1/2 + 0.1 * 1/4.\end{aligned}$$

Formule de Bayes

- Théorème de la multiplication:
  $\mathbf{Pr}(A \cap B) = \mathbf{Pr}(A/B) \times \mathbf{Pr}(B) = \mathbf{Pr}(B/A) \times \mathbf{Pr}(A).$
- Utilisons le théorème des probabilités totales, on a:
  $$\begin{aligned}\mathbf{Pr}(A) &= \mathbf{Pr}(A \cap B) + \mathbf{Pr}(A \cap \overline{B}) \\ &= \mathbf{Pr}(A/B) \times \mathbf{Pr}(B) + \mathbf{Pr}(A/\overline{B}) \times \mathbf{Pr}(\overline{B})\end{aligned}$$
- On obtient la formule de Bayes:

$$\mathbf{Pr}(B/A) = \frac{\mathbf{Pr}(A/B)\times\mathbf{Pr}(B)}{\mathbf{Pr}(A)} = \frac{\mathbf{Pr}(A/B)\times\mathbf{Pr}(B)}{\mathbf{Pr}(A/B)\times\mathbf{Pr}(B)+\mathbf{Pr}(A/\overline{B})\times\mathbf{Pr}(\overline{B})}$$

valable dés que $\mathbf{Pr}(A) \neq 0$.

Formule de Bayes

- Cette formule est aussi appelée "théorème de la probabilité des causes", car elle permet de renverser un conditionnement.
- Interprétation :
  - A est une conséquence, B une cause
  - La formule permet de remonter aux causes
- Pour calculer une probabilité conditionnelle, utiliser :
  - La définition
  - Ou formule ou théorème de Bayes

Formule de Bayes: Exercice

Exercice

Une maladie M se présente sous deux forme M_1 et M_2 avec les probabilités respectives $\mathbf{Pr}(M_1) = 0.2$ et $\mathbf{Pr}(M_2) = 0.8$, et le symptôme S apparaît dans 80% des cas de M_1 et dans 10% des cas de M_2. Quelle est la probabilité, pour un patient **atteint de** M qui **présente le symptôme** S, d'être **atteint de** M_1?

Formule de Bayes: solution d'exercice

- M_1: "patient atteint de la maladie de type M_1"
- M_2: "patient atteint de la maladie de type M_2"
- S: "patient présente le symptôme S"
- $\mathbf{Pr}(S/M_1) = 0.8$ et $\mathbf{Pr}(S/M_2) = 0.1$
- $\overline{M_1} = M_2$
- D'où:

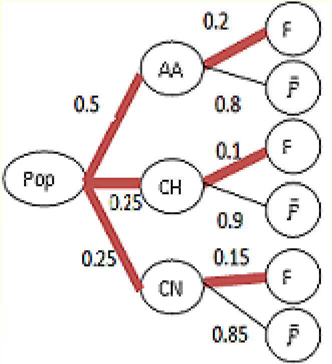
$$\begin{aligned}\mathbf{Pr}(M_1/S) &= \frac{\mathbf{Pr}(S/M_1) \times \mathbf{Pr}(M_1)}{\mathbf{Pr}(S/M_1) \times \mathbf{Pr}(M_1) + \mathbf{Pr}(S/\overline{M_1}) \times \mathbf{Pr}(\overline{M_1})} \\ &= \frac{0.8 * 0.2}{0.8 * 0.2 + 0.1 * 0.8} = 2/3.\end{aligned}$$

Formule de Bayes: cas général

- Soit $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ un système complet d'événements pour l'ensemble E (partition de E), et B un autre événement.
- Pour chaque A_i, $\mathbf{Pr}(A_i/B) = \dfrac{\mathbf{Pr}(B \cap A_i)}{\mathbf{Pr}(B)}$
- Utilisons le théorème des probabilités totales: on obtient la formule de Bayes ganérale:

$$\mathbf{Pr}(A_i/B) = \frac{\mathbf{Pr}(A_i)\times\mathbf{Pr}(B/A_i)}{\mathbf{Pr}(A_1)\times\mathbf{Pr}(B/A_1)+\mathbf{Pr}(A_2)\times\mathbf{Pr}(B/A_2)+\dots+\mathbf{Pr}(A_n)\times\mathbf{Pr}(B/A_n)}$$

Formule de Bayes générale: Exemple



- Douleur aiguë de l'abdomen
- Un patient présente de la fièvre. Probabilité de chacune des causes
- Quel est le diagnostic le plus probable ?
- Rappel : Pr(F) = 0.162

Formule de Bayes: Exemple

- La probabilité de pathologie AA chez un patient présente la fièvre est:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Pr}(AA/F) &= \frac{\mathbf{Pr}(F/AA)}{\mathbf{Pr}(F)} \\
&= \frac{F/AA)}{\mathbf{Pr}(F/AA)\times\mathbf{Pr}(AA)+\mathbf{Pr}(F/CH)\times\mathbf{Pr}(CH)+\mathbf{Pr}(F/CN)\times\mathbf{Pr}(CN)} \\
&= \frac{0.2\times 0.5}{0.162} = 0.62
\end{aligned}$$

- $\mathbf{Pr}(CH/F) = 0.15$, $\mathbf{Pr}(CN/F) = 0.23$

Événement indépendants: Introduction

- Soient A et B deux événements de probabilité connus: $\mathbf{Pr}(A) > 0$ et $\mathbf{Pr}(B) > 0$.
- Quelle est la probabilité pour que A et B se réalisent simultanément: $\mathbf{Pr}(A \cap B) =?$
- On peut estimer cette probabilité par l'expérience en utilisant sa fréquence stabilité, mais c'est long et coûteux.
- Il y a des cas où, par chance, cette probabilité se déduit immédiatement de celles de A et de B.

Événement indépendants: Définition 1

- A est **indépendant** de B si la réalisation ou non de B **n'influe pas sur** celle de A (le fait que l'un des deux événement soit réaliser ne modifie pas la probabilité de l'autre). D'où la définition suivante:

Définition

- A et B sont indépendant si $\Pr(A/B) = \Pr(A)$.
- Si A et B **ne sont pas indépendant**, on dit qu'ils sont **liés.**

Événement indépendants: Définition 2

- D'après la probabilité conditionnelle: $\mathbf{Pr}(A/B) = \frac{\mathbf{Pr}(A \cap B)}{\mathbf{Pr}(B)}$, elle entraîne que:

A et B sont indépendant ssi $\mathbf{Pr}(A \cap B) = \mathbf{Pr}(A) \times \mathbf{Pr}(B)$

- Autres formes: $\mathbf{Pr}(A/\overline{B}) = \mathbf{Pr}(A)$, $\mathbf{Pr}(B/A) = \mathbf{Pr}(B)$

Indépendance et incompatibilité

- Ne pas confondre événements indépendants et événements exclusifs (incompatibles):
  - Si $A \cap B = \emptyset$ (sont exclusifs)
    - si B est réalisé, A ne peut pas l'être et réciproquement (la réalisation de B influe sur celle de A : elle l'empêche). En effet: $\Pr(A \cap B) = 0 \Rightarrow \Pr(A/B) = 0 = \Pr(B/A)$
    - D'autre part $\Pr(A \cap B) = 0 \neq \Pr(A) \times \Pr(B) \Leftrightarrow A$ et B ne sont pas indépendants.
  - Si A et B sont indépendants
    - La réalisation de B n'influe pas sur celle de A et réciproquement
    - $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \times \Pr(B) \neq 0 \Rightarrow (A \cap B) \neq \emptyset \Rightarrow A$ et B sont compatible.

Indépendance entre deux événements : exemple 1

- Au cours de l'épreuve de dé à 6 faces, non truquée, on considère les trois événements:
  - A: "le numéro sorti est strictement plus grand que 4";
  - B: "le numéro sorti est impair";
  - C: "le numéro sorti est strictement supérieur à 3".

★ Montrer que A et B sont indépendant et que $\overline{B}$ et C sont liés.

Indépendance entre deux événements : Exercice

Exercice

Dans une population donnée, un individu peut être atteint d'une affection A avec probabilité $1/100$ et d'une affection B, indépendante de A, avec une probabilité $1/20$. Quelle est la probabilité pour qu'un individu choisi au hasard soit atteint des deux maladies?

Indépendance entre deux événements : Notes

- si $B \subset A$, alors $\mathbf{Pr}(A \cap B) = \mathbf{Pr}(B)$. D'où $\mathbf{Pr}(A/B) = \frac{\mathbf{Pr}(A \cap B)}{\mathbf{Pr}(B)} = 1$ et $\mathbf{Pr}(B/A) = \frac{\mathbf{Pr}(A \cap B)}{\mathbf{Pr}(A)} = \frac{\mathbf{Pr}(B)}{\mathbf{Pr}(A)}$. Donc A et B ne sont pas indépendants.
- Si on considère 3 événements A, B, C, on dira que ces 3 événements sont indépendants si:
  1. sont indépendant 2 à 2: $\mathrm{Pr}(A \cap B) = \mathrm{Pr}(A) \times \mathrm{Pr}(B)$, $\mathrm{Pr}(A \cap C) = \mathrm{Pr}(A) \times \mathrm{Pr}(C)$ et $\mathrm{Pr}(B \cap C) = \mathrm{Pr}(B) \times \mathrm{Pr}(C)$,
  2. si $\mathrm{Pr}(A \cap B \cap C) = \mathrm{Pr}(A) \times \mathrm{Pr}(B) \times \mathrm{Pr}(C)$.

EXercices

Exercice 1

La population d'une ville compte 48% d'hommes et 52% de femmes. Le premier janvier 2009, 5% des hommes et 1% des femmes avaient la grippe. Notons par H : "hommes", F : "femme" et G : "Grippe".

1. Quelle est la probabilité pour qu'une personne choisie au hasard, soit atteint de la grippe ?
2. On choisit une personne au hasard, elle est grippée. Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme ?

Exercice 2

Dans une entreprise pharmaceutique, un comprimé est parfait si sa masse en gr est dans $[1.2 - 1.3]$. La probabilité qu'un comprimé soit conforme est 0.98. On tire au hasard un comprimé. Soit A : "le comprimé est conforme", B : "le comprimé est refusé ". On contrôle tous les comprimés. Le mécanisme de contrôle est tel que :

- un comprimé conforme est accepté avec une probabilité de 0.98.
- un comprimé non conforme est refusé avec une probabilité de 0.99.

1. Calculer la probabilité $\mathbf{Pr}(B/A)$, puis $\mathbf{Pr}(A \cap B)$.
2. Calculer la probabilité qu'un comprimé soit refusé.
3. La probabilité qu'un comprimé soit conforme sachant qu'il est refusé.

Solution

Soit :

- A: "le comprimé est conforme"
- B: "le comprimé est refusé"
- $\mathbf{Pr}(\overline{B}/A) = 0.98$, $\mathbf{Pr}(B/\overline{A}) = 0.99$, $\mathbf{Pr}(A) = 0.98$, $\mathbf{Pr}(\overline{A}) = 0.02$.

1. $\mathbf{Pr}(B/A) + \mathbf{Pr}(\overline{B}/A) = 1, \Rightarrow$
   $\mathbf{Pr}(B/A) = 1 - \mathbf{Pr}(\overline{B}/A) = 1 - 0.98 = 0.02$.
   $\mathbf{Pr}(A \cap B) = \mathbf{Pr}(B/A) \times \mathbf{Pr}(A) = 0.02 \times 0.98 = 0.0196$.
2. $\mathbf{Pr}$("comprimé soit refusé") $= \mathbf{Pr}(B) =?$
   $$\begin{aligned} \mathbf{Pr}(B) &= \mathbf{Pr}(B \cap A) + \mathbf{Pr}(B \cap \overline{A}) \\ &= \mathbf{Pr}(B/A) \times \mathbf{Pr}(A) + \mathbf{Pr}(B/\overline{A}) \times \mathbf{Pr}(\overline{A}) \\ &= 0.0196 + 0.99 * 0.02 \\ &= 0.0394 \end{aligned}$$
3. $\mathbf{Pr}$("comprimé est conforme / sachant qu'il est refusé")
   $= \mathbf{Pr}(A/B)$
   $\mathbf{Pr}(A/B) = \frac{\mathbf{Pr}(B/A) \times \mathbf{Pr}(A)}{\mathbf{Pr}(B)} = \frac{0.0196}{0.0394} = 0.497$.

Exercice 3

Un patient a reçu une greffe en 2003 dans un hôpital où certain traitement T, dont on a vu plus tard qu'il améliorait la survie du greffon, n'était appliqué qu'à 30 $\%$ des patients. A l'heure actuelle, au début de 2012, le greffon est encore en bon état. Sachant que la probabilité de survie du greffon à 9 ans est $0,35$ sans T et de $0,45$ avec T, quelle est la probabilité pour que ce patient ait reçu le traitement T?

Exercice 4

Dans une population on sait que la probabilité de naissance d'un garçon est de 0,52 et par ailleurs que 2% des filles et 1% des garçons présentent une luxation congénitale de la hanche. On note F l'évènement "naissance d'une fille" et L l'évènement "avoir une luxation de la hanche".

1. Calculer les probabilités des événements : "F et L" ; " et L", " F et ". Les évènements F et L sont-ils indépendants?
2. Calculer la probabilité qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille.

Exercice 5

Une population est composé de 40 $\%$ d'hommes et de 60% de femmes; 50% des hommes et 30% des femmes fument. Quelle est la probabilité pour qu'un fumeur choisi au hasard soit une femme.

Exercice 6

Une boîte contient 10 articles dont 4 sont défectueux. On tire 3 objets de cette boîte. Calculer la probabilité pour que ces 3 objets soit défectueux.

Exercice 7

Un quart de la population a été vacciné contre une épidémie. On a trouvé que un malade sur cinq avait été vacciné et que parmi les personnes vaccinées, un sur douze a contracté la maladie. On choisit au hasard une personne dans la population.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?
2. Sachant que la personne n'a pas été vacciné, quelle est la probabilité qu'elle soit malade.

Exercice 8

18 personnes se sont présentées à une collecte de sang. Parmi celles-ci, on a noté : 11 personnes du groupe O, 4 personne du groupe A, 2 personnes du groupe B et 1 personnes du groupe AB. A issue de la collecte, on prélève au hasard 3 flacons parmi les 18 flacons obtenus. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. les sang des 3 flacons appartiennent aux mêmes groupes;
2. parmi les 3 flacons prélevés, il y'a au moins un flacons contenant du sang du groupe A;
3. les sang des 3 flacons appartiennent à 3 groupes différents.

Exercice 9

On estime qu'une personne a 6 chances sur 10 d'être atteinte d'un certaine maladie. On effectue deux tests de dépistage. Le premier test est positif à 70% sur les malades et à 20% sur les individus sains. Le second test est positif à 90% sur les malades et 30% sur les individus sains. On suppose que les deux tests sont indépendants et cela chez les malades et chez les sains (indépendance conditionnelle).

1. On choisit une personne au hasard, le premier tests est positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit malade.
2. On choisit une personne au hasard, les deux tests sont positifs. Quelle est la probabilité que cette personne soit malade.
3. Quelle est la probabilité que le second test soit positif si le premier l'a été ?

- On note:
  - $\star$ M:"la personne est malade",
  - $\star$ $\overline{M}$: "la personne est saine",
  - $\star$ T_1: "le premier test est positif",
  - $\star$ T_2: "le deuxième test est positif".
- On a: $\Pr(M) = \frac{6}{10} = 0.6$, $\Pr(\overline{M}) = 1 - 0.6 = 0.4$, $\Pr(T_1/M) = 0.7$, $\Pr(T_1/\overline{M}) = 0.2$, $\Pr(T_2/M) = 0.9$ et $\Pr(T_2/\overline{M}) = 0.3$.

1. On cherche la probabilité que une personne soit malade sachant que le premier test est positif, donc: $\Pr(M/T_1) = ?$ D'après la formule de Bayes, on a:

$$\begin{aligned} \Pr(M/T_1) &= \frac{\Pr(T_1/M)\times\Pr(M)}{\Pr(T_1/M)\times\Pr(M)+\Pr(T_1/\overline{M})\times\Pr(\overline{M})} \\ &= \frac{0.7\times0.6}{0.7\times0.6+0.2\times0.4} = \frac{0.42}{0.5} = 0.84\,. \end{aligned}$$

2. On cherche la probabilité que une personne soit malade sachant que les deux test sont positifs, c'est-à-dire, T_1 **et** T_2 sont positifs, donc $\Pr(M/(T_1 \cap T_2)) =?$

- En utilisant la formule de Bays, on a:
  $\Pr(M/(T_1 \cap T_2)) =$
  $$\frac{\Pr((T_1 \cap T_2)/M) \times \Pr(M)}{\Pr((T_1 \cap T_2)/M) \times \Pr(M) + \Pr((T_1 \cap T_2)/\overline{M}) \times \Pr(\overline{M})}$$
- Grâce à l'indépendance conditionnelle des résultats, on a:
  $\Pr((T_1 \cap T_2)/M) = \Pr(T_1/M) \times \Pr(T_2/M) = 0.7 * 0.9 = 0.63.$
  $\Pr((T_1 \cap T_2)/\overline{M}) = \Pr(T_1/\overline{M}) \times \Pr(T_2/\overline{M}) = 0.2 * 0.3 = 0.06.$

et donc

$$\begin{aligned}
&\Pr(M/(T_1 \cap T_2)) \\
&= \frac{\Pr((T_1 \cap T_2)/M) * \Pr(M)}{\Pr((T_1 \cap T_2)/M) * \Pr(M) + \Pr((T_1 \cap T_2)/\overline{M}) * \Pr(\overline{M})} \\
&= \frac{0.63 \times 0.6}{0.63 \times 0.6 + 0.06 \times 0.4} = \frac{0.378}{0.402} = 0.94
\end{aligned}$$

3. Rappelons que:

- $\Pr(T_1) = \Pr(T_1/M) \times \Pr(M) + \Pr(T_1/\overline{M}) \times \Pr(\overline{M}) = 0.5$,
- et que
  $\Pr(T_1 \cap T_2) = \Pr[(T_1 \cap T_2) \cap M] + \Pr[(T_1 \cap T_2) \cap \overline{M}]$
  $= \Pr((T_1 \cap T_2)/M) \times \Pr(M) + \Pr((T_1 \cap T_2)/\overline{M}) \times \Pr(\overline{M})$
  $= 0.63 \times 0.6 + 0.06 \times 0.4 = 0.402\,.$
- La probabilité que le second test soit positif si le premier est positif est:

$$\begin{aligned}\Pr(T_2/T_1) &= \frac{\Pr(T_1 \cap T_2)}{\Pr(T_1)} \\ &= \frac{0.402}{0.5} = 0.804\end{aligned}$$

Bibliographie

- Cours Probabilité, Benchikh Tawfik, http://www.univ-sba.dz/lsps/images/pdf/cours/
- Probabilités et Biostatistique. www.chups.jussieu.fr/polys/biostats/CoursProba1.pdf
- FMPMC Pitié-Salpêtrière - probabilités, cours 1 et 2 www.chups.jussieu.fr/polys/biostats/coursProba-1-2/
- Notions de Probabilités, Roch Giorgi, LERTIM, Faculté de Médecine, Université de la Méditerranée, Marseille, France http://lertim.fr