République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur

et de la Recherche Scientifique

Université Djillali Liabès
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
de Sidi Bel-Abbès

B.P. 89, 22000, Sidi Bel-Abbès, Algérie

Support de Cours

Présenté par

Dr. LAZREG JAMAL EDDINE
Laboratoire de Mathématiques
Université de Sidi Bel-Abbès,
e-mail: lazregjamal@yahoo.fr

Equations Différentielles sur les Echelles de Temps

COURS ET EXERCICES CORRIGES

Version Octobre 2021

Table des matières

Introduction

Objectif principal : La théorie des échelles de temps a été introduite par Stefane Hilger [36] dans sa thèse de doctorat en 1988 sous la direction du professeur Bern Aulbach [10]. Son but essentiel etait essentiellement d'unifier l'analyse continue et l'analyse discrète. Il a introduit pour la première fois le concept d'"**échelle de temps**" (***Time scale***) comme nouveau et puissant outil mathématique pour l'étude de certains processus en économie, en physique quantique, en modélisation des populations de certaines espèces d'insecte, et pour l'étude de l'ADN, du circuit électrique, etc.

Plusieurs résultats concernant les équations différentielles restent aussi valables pour les équations aux différences. Néanmoins, d'autres sont complètement différents de leurs homologues des équations aux différences. L'étude des équations dynamiques sur "time scales", à titre d'exemple, permet d'éliminer cet écart et d'éviter de produire des résultats distincts pour les équations différentielles d'une part, et pour les équations aux différences d'autre part. L'idée générale est d'établir un résultat pour une équation dynamique où le domaine de la fonction inconnue est un "time scales" (une échelle de temps) qui, par définition, est un sous-ensemble arbitraire $\mathbb{T}$ non vide et fermé de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Ainsi, lorsqu'on choisit $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$), on obtient le résultat correspondant aux équations différentielles (resp. équations aux différences). Cependant, comme il y a d'autres "time scales", pas seulement l'ensemble des nombres réels et l'ensemble des nombres entiers, on obtient un résultat beaucoup plus général. Depuis, plusieurs mathématiciens se sont mis dans cette nouvelle théorie et l'intérêt qu'ils y apportent est de plus en plus croissant. Les travaux réalisés dans ce domaine sont spectaculaires. Il nous faut aussi mentionner les livres de M. Bohner et A. Peterson ([23,25]) qui sont d'excellentes références dans la théorie du "time scales".

Ce document est une version regroupée de notes de cours du Module (intitulé : Equations Differentielles II) enseigné à l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, en première année année de Master de Mathématiques, spécialité : Analyse fonctionnelle et Equations Differentielles (AFED). Ces enseignements se composent à la fois de cours magistraux et de séances de travaux dirigés.

Je tiens enfin à adresser mes remerciements à tous les étudiants du Master (AFED) qui ont pu contribuer par leurs collaborations, leurs remarques, et leurs suggestions, en particulier Mlle Médina Fatima Zohra.

Quelques références bibliographiques : Pour approfondir les thèmes abordés dans ces pages, voici une sélection de plusieurs ouvrages de référence, qui m'ont été d'une aide remarquable et que l'on pourra consulter avec intérêt en complément de ce cours.

1) M. Bohner and A. Peterson, *Dynamic Equations on Time Scales*, Springer, 2001.

2) M. Bohner and A. Peterson. *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*. Birkhäuser, Boston, 2003

3) R. Agarwal, D. O'Regan and S. Saker, *Dynamic Inequalities On Time Scales*, Springer, 2014.

4) S. G. Georgiev, *Integral Equations on Time Scales*, Atlantis Press, 2016.

5) M. Bohner and S. G. Georgiev, *Multivariable Dynamic Calculus on Time Scales*, Springer, 2016.

6) S. G. Georgiev, *Fractional Dynamic Calculus and Fractional Dynamic Equations on Time Scales*, Springer, 2018.

7) S. G. Georgiev, *Functional Dynamic Equations on Time Scales*, Springer, 2019.

8) Chao Wang, Ravi P. Agarwal, Donal O'Regan and R. Sakthivel, *Theory of Translation Closedness for Time Scales*, Springer, 2020.

Chapitre 1

Calculs sur les Échelles de Temps

Introduction

Nous présentons dans ce chapitre quelques outils fondamentaux de la théorie des échelles de temps. Dans sa thèse de doctorat en 1988, Stephen Hilger a présenté la théorie des échelles de temps, afin d'unifier l'analyse discréte et l'analyse continue (Voir [37]). Une introduction générale y compris quelques définitions et théorèmes sur la théorie des échelles de temps présentés dans ce chapitre peuvent être trouvés dans l'éxcellent ouvrage de Martin Bohner et Allen Peterson (Voir [23]).

1.1 L'Échelle de Temps

Définition 1

Une échelle de temps, notée $\mathbb{T}$, est un sous ensemble non vide fermé de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Exemple 1

Les ensembles suivants sont des échelles de temps : $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $[2,3] \cup \{4,5,7\}$, $[0,1] \cup \mathbb{N}$.

Exemple 2

Les ensembles suivants sont des échelles de temps :

- $\mathbb{H}_n = \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}; H_0 = 0; \forall n \in \mathbb{N}^*\right\}$, *tels que* $\mathbb{H}_n$ *sont les nombres harmoniques.*
- $h\,\mathbb{Z}=\{h\,z\,;\ z \in \mathbb{Z}\}$ *avec* $h \in \mathbb{R}$ *une constante.*
- $q^{\mathbb{N}} = \{q^n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *avec* $q > 1$ *fixé.*
- $\mathbb{P}_{\{a;\ b\}} = \bigcup_{k=0}^{\infty}[k(a+b);\ k(a+b)+a],\ \forall a,\ b \in \mathbb{R}$.

Exemple 3

Les ensembles suivants ne sont pas des échelles de temps :
$[a, b[\ ,\ ]a, b]\ ,\ ]a, b[\ ,\ ]0, 1[$ *avec* a, b *réels tels que* $a < b$.

Exemple 4

L'ensemble de Cantor :

$$\mathbb{P}_{a,b} = \bigcup_{k=0}^{\infty} [k(a+b), k(a+b)+a], \qquad \text{avec} \qquad a, b > 0.$$

est une échelle de temps.

Définition 2

Soit $\mathbb{T}$ *une échelle de temps.*

- *On définit, pour tout* $t \in \mathbb{T}$, *l'opérateur de saut en avant* $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *par :*

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}.$$

- *On définit, pour tout* $t \in \mathbb{T}$, *l'opérateur de saut en arrière* $\rho\ : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *par :*

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

- *On définit, pour tout* $t \in \mathbb{T}$, *la fonction de "granulation-avant" (forward-graininess)* $\mu := \mathbb{T} \to [0, +\infty[$ *par :*

$$\mu(t) := \sigma(t) - t$$

.

- *On définit, pour tout* $t \in \mathbb{T}$, *la fonction de "granulation–arrière" (backward-graininess)* $v := \mathbb{T} \to [0, +\infty[$ *par :*

$$v(t) := t - \rho(t)$$

.

Définition 3

Les opérateurs σ *et* ρ *permettent la classification suivante des points* t *sur une échelle de temps* $\mathbb{T}$ *:*

- *Si* $\sigma(t) > t$, *alors on dit que* t *est dispersé à droite.*
- *Si* $\rho(t) < t$, *alors on dit que* t *est dispersé à gauche.*
- *Si un point est à la fois dispersé à droite et à gauche, il est dit isolé.*
- *Si* $t < \sup \mathbb{T}$ *et* $\sigma(t) = t$, *alors on dit que* t *est dense à droite.*
- *Si* $t > \inf \mathbb{T}$ *et* $\rho(t) = t$, *alors on dit que* t *est dense à gauche.*
- *Si un point est à la fois dense à droite et à gauche, il est dit dense.*

Le tableau suivant illustre les classifications des points :

Nature du point t	si $\cdots$
t est dispersé à droite	$t < \sigma(t)$
t est dense à droite	$t = \sigma(t)$
t est dispersé à gauche	$\rho(t) < t$
t est dense à gauche	$t = \rho(t)$
t est isolé	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t est dense	$\rho(t) = t = \sigma(t)$

Exemple 5

Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} = [0,1] \cup [2,3]$. *Nous avons*

$$\sigma(t) = \begin{cases} t & si\ t \in [0,1[\cup [2,3] \\ 2 & si\ t = 1, \end{cases}$$

et

$$\rho(t) = \begin{cases} t & si\ t \in [0,1] \cup]2,3] \\ 1 & si\ t = 2. \end{cases}$$

Ainsi

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \in [0,1[\cup [2,3] \\ 1 & si\ t = 1, \end{cases}$$

$$v(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \in [0,1] \cup]2,3] \\ 1 & si\ t = 2. \end{cases}$$

Exemple 6

Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *nous avons*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf]t, +\infty[= t.$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\} = \sup]-\infty, t[= t.$$

Comme $\rho(t) = t = \sigma(t)$, *donc tous les points de* $\mathbb{R}$ *sont denses.*

Exemple 7

Soit $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. *Pour tout* $t \in \mathbb{Z}$, *nous avons*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf\{t+1, t+2, \cdots\} = t+1.$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\} = \sup\{\cdots, t-2, t-1\} = t-1.$$

Comme $\rho(t) < t < \sigma(t)$, *donc tous les points de* $\mathbb{Z}$ *sont isolés.*

Exemple 8

Considérons différentes échelles de temps $\mathbb{T}$. *On vérifie facilement (voir TD N°1) que :*

$\mathbb{T}$	$\mu(t)$	$\sigma(t)$	$\rho(t)$
$\mathbb{R}$	0	t	t
$\mathbb{Z}$	1	$t+1$	$t-1$
$h\mathbb{Z}$	h	$t+h$	$t-h$
$q^{\mathbb{N}}$	$(q-1)t$	qt	$\frac{t}{q}$
$2^{\mathbb{N}}$	t	$2t$	$\frac{t}{2}$

Exemple 9

Dans l'échelle de temps $\mathbb{P}_{a,b}$ *(l'ensemble de Cantor), on trouve facilement que*

$$\sigma(t) = \begin{cases} t & si\ t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}[k(a+b), k(a+b)+a), \\ t+b & si\ t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}\{k(a+b)+a\} \end{cases}$$

$$\rho(t) = \begin{cases} t & si\ t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}(k(a+b), k(a+b)+a] \\ t-b & si\ t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}\{k(a+b)\} \end{cases}$$

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}[k(a+b), k(a+b)+a), \\ \\ b & si\ t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}\{k(a+b)+a\}. \end{cases}$$

Exercice 1

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps.
On note par σ l'opérateur de saut avant et par μ la fonction de granulation.
1) Déterminer $\mu(t)$ et $\sigma(t)$ en fonction de t, sachant que $\mu(t) \neq \pm 3$ et

$$\frac{2}{\mu(t)-3} + \frac{3}{\mu(t)+3} + \frac{7}{9-\mu^2(t)} = 0. \tag{1.1}$$

2) Déterminer $\mu(t)$ et $\sigma(t)$ en fonction de t, sachant que

$$\sqrt{\mu(t) + \sqrt{\mu(t)+11}} - \sqrt{\mu(t) - \sqrt{\mu(t)+11}} = 2. \tag{1.2}$$

Solution : Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps.
On définit l'opérateur de saut avant $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par

$$\sigma(t) = inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\},$$

et la fonction de granulation $\mu : \mathbb{T} \to [0, +\infty[$ par

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

1) Supposons que $\mu(t) \neq \pm 3$.
La relation (4.4) équivaut à

$$\frac{2(\mu(t)+3) + 3(\mu(t)-3) - 7}{\mu^2(t) - 9} = 0$$

c-à-d

$$\frac{5\mu(t) - 10}{\mu^2(t) - 9} = 0$$

D'où

$$\mu(t) = 2.$$

Et donc $\sigma(t) = \mu(t) + t = t + 2$.
2) L'equation

$$\sqrt{\mu(t) + \sqrt{\mu(t)+11}} - \sqrt{\mu(t) - \sqrt{\mu(t)+11}} = 2, \tag{1.3}$$

n'a de sens que si $\mu(t) - \sqrt{\mu(t)+11}$, ce qui donne $\mu(t) \geq \dfrac{1+3\sqrt{5}}{2}$.
L'equation (1.3) implique

$$\left(\sqrt{\mu(t) + \sqrt{\mu(t)+11}} - \sqrt{\mu(t) - \sqrt{\mu(t)+11}}\right)^2 = 4,$$

ce qui donne

$$\sqrt{\mu^2(t) - \mu(t) - 11} = \mu(t) - 2,$$

c'est à dire

$$\mu^2(t) - \mu(t) - 11 = (\mu(t) - 2)^2.$$

D'où

$$3\mu(t) = 15.$$

Donc

$$\mu(t) = 5.$$

Et donc $\sigma(t) = \mu(t) + t = t + 5$.

Exercice 2

1) On définit l'ensemble $\widetilde{\mathbb{T}}$ par $\widetilde{\mathbb{T}} = \left\{\frac{1}{3n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Démontrer que $\widetilde{\mathbb{T}}$ n'est pas une échelle de temps.

2) On définit l'ensemble $\mathbb{T}$ par $\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{3n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$.

(a) Démontrer que l'ensemble $\mathbb{T}$ est une échelle de temps.

(b) Déterminer $\sigma(t)$ et $\rho(t)$ et en déduire la nature des points de $\mathbb{T}$.

Solution :

1) On pose $\widetilde{\mathbb{T}} = \left\{\frac{1}{3n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Démontrons que $\widetilde{\mathbb{T}}$ n'est pas une échelle de temps.

Soit $x_n = \frac{1}{3n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On a $x_n \in \widetilde{\mathbb{T}}$, mais $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \notin \widetilde{\mathbb{T}}$. Donc l'ensemble $\widetilde{\mathbb{T}}$ n'est pas un fermé. Par conséquent, $\widetilde{\mathbb{T}}$ n'est pas une échelle de temps.

2) (a) Démontrons que l'ensemble $\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{3n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$ est une échelle de temps.

En effet : $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{T} =]-\infty, 0[\cup \bigcup_{k\geq 1} \left]\frac{1}{3(k+1)}, \frac{1}{3k}\right[\cup \left]\frac{1}{3}, \infty\right[$ qui est un ouvert. (Voir Cours)

Conclusion : L'ensemble $\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{3n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$ est une échelle de temps .

(b) Déterminons $\sigma(t)$ et $\rho(t)$ et la nature des points de $\mathbb{T}$.

Soit $t \in \mathbb{T}$ un élément choisi arbitrairement.

• Cas $t = \frac{1}{3}$:

On a

$$\sigma\left(\frac{1}{3}\right) = inf\left\{s \in \mathbb{T} : s > \frac{1}{3}\right\} = inf\emptyset = sup\mathbb{T} = \frac{1}{3}.$$

$$\rho\left(\frac{1}{3}\right) = sup\left\{s \in \mathbb{T} : s < \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{6} < \frac{1}{3}.$$

Donc
$\sigma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{3}$ est dense à droite,
et $\rho\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{1}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{3}$ est dispersé à gauche.

• Cas $t = \frac{1}{3n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:
On a

$$\sigma\left(\frac{1}{3n}\right) = inf\left\{s \in \mathbb{T} : s > \frac{1}{3n}\right\} = \frac{1}{3(n-1)} > \frac{1}{3n}.$$

$$\rho\left(\frac{1}{3n}\right) = sup\left\{s \in \mathbb{T} : s < \frac{1}{3n}\right\} = \frac{1}{3(n+1)} < \frac{1}{3n}.$$

De $t = \frac{1}{3n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on tire $n = \frac{1}{3t}$. Et donc

$$\sigma(t) = \sigma\left(\frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{3(n-1)} = \frac{1}{3\left(\frac{1}{3t}-1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{t}-3} = \frac{t}{1-3t}.$$

Et

$$\rho(t) = \rho\left(\frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{3(n+1)} = \frac{1}{3\left(\frac{1}{3t}+1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{t}+3} = \frac{t}{1+3t}.$$

Donc
$\sigma\left(\frac{1}{3n}\right) > \frac{1}{3n} \Rightarrow t$ est dispersé à droite,
et
$\rho\left(\frac{1}{3n}\right) < \frac{1}{3n} \Rightarrow t$ dispersé à gauche.

Conclusion : $t = \frac{1}{3n}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ est un point isolé.

• Cas $t = 0$:
Alors

$$\sigma(0) = inf\{s \in \mathbb{T} : s > 0\} = 0.$$

$$\rho(0) = sup\{s \in \mathbb{T} : s < 0\} = sup\emptyset = inf\mathbb{T} = 0.$$

Donc
$\sigma(0) = 0 \Rightarrow t = 0$ est dense à droite,
et
$\rho(0) = 0 \Rightarrow t = 0$ est dense à gauche.

Conclusion : $t = 0$ est un point dense.

1.2 Les sous ensembles dérivés d'une échelle de temps

De chaque échelle de temps on peut extraire les sous ensembles suivants :

Définition 4

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps. On définit l'ensemble $\mathbb{T}^\kappa$ défini par :

$$\mathbb{T}^\kappa = \begin{cases} \mathbb{T} -]\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}] & si \ \sup \mathbb{T} < +\infty \\ \mathbb{T} & si \ \sup \mathbb{T} = +\infty. \end{cases}$$

C'est à dire, si $\mathbb{T}$ admet un maximum dispersé à gauche M, alors $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} - \{M\}$, sinon $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$.

Pour n $\in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{T}^{\kappa^n} = (\mathbb{T}^{\kappa^{n-1}})^\kappa$, avec la convention $\mathbb{T}^{\kappa^0} = \mathbb{T}$.
Pour une échelle de temps donnée, on a : $\mathbb{T}^\kappa \neq \mathbb{T}^{\kappa^2}$.
En effet, Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} =]-\infty, 1] \cup \{2, 4, 6, 9\}$. On a alors

$$\mathbb{T}^\kappa =]-\infty, 1] \cup \{2, 4, 6\}$$

et

$$\mathbb{T}^{\kappa^2} = \mathbb{T}^{\kappa^\kappa} =]-\infty, 1] \cup \{2, 4\}.$$

Exercice 3

Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$. Déterminer $\mathbb{T}^\kappa$.

Solution : On a

$$\mathbb{T} = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}.$$

Donc $\sup \mathbb{T} = 1$, et $\rho(\sup \mathbb{T}) = \rho(1) = \frac{1}{2}$. Doù :

$$\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} - \left]\frac{1}{2}, 1\right] = \mathbb{T} - \{1\}$$

$$\mathbb{T}^\kappa = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right\} \cup \{0\}.$$

Exercice 4

Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} = \{2n, n \in \mathbb{N}^*\}$. Déterminer $\mathbb{T}^\kappa$.

Solution : On a $\mathbb{T} = \{2, 4, 6, 8, \cdots\}$. Donc : $\sup \mathbb{T} = +\infty$. D'où $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$.

Définition 5

Soient a,b deux réels tels que $a < b$ et $\mathbb{T}$ une échelle de temps. On définit l'intervalle [a,b] dans $\mathbb{T}$, et on le note $[a,b]_\kappa^\mathbb{T}$, par :

$$[a,b]_\kappa^\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}.$$

Exercice 5

Soit $[a,b]$ un intervalle dans une échelle de temps $\mathbb{T}$ où b est un point dense à gauche. Déterminer $[a,b]_\kappa^\mathbb{T}$.

Solution : On a $[a,b[\subset \mathbb{T}$ et b est dense à gauche (ie : $\rho(b) = b$) ; alors :

$$\sup \mathbb{T} = b < +\infty.$$

Donc

$$[a,b]_\kappa^\mathbb{T} = [a,b]_\mathbb{T} -]b,b] = [a,b]_\mathbb{T} \ (car\ ]b,b] = \emptyset).$$

Définition 6

Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit les fonctions $f^\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ et $f^\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ par :

$$f^\sigma(t) := (fo\sigma)(t) = f(\sigma(t));\ pour\ tout\ t \in \mathbb{T},$$

et

$$f^\rho(t) := (fo\rho)(t) = f(\rho(t));\ pour\ tout\ t \in \mathbb{T}.$$

Exercice 6

Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} = \{2^{n+2}, n \in \mathbb{N}^*\}$ et la fonction $f(t) = t^2 + t - 1$. Déterminer $f^\sigma(t) = 4t^2 + 2t - 1$, pour tout $t \in \mathbb{T}$

Solution :

Pour tout $t \in \mathbb{T}$, nous avons

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\};$$

Soient :

$$t \in \mathbb{T} : t = 2^{n+2},\ n \in \mathbb{N}^*,$$
$$s \in \mathbb{T} : s = 2^{l+2},\ l \in \mathbb{N}^*.$$

D'après la définition de σ(t), on a :

$$\begin{aligned} s > t &\Longrightarrow 2^{l+2} > 2^{n+2} \\ &\Longrightarrow l + 2 > s + 2 \\ &\Longrightarrow l > s \\ &\Longrightarrow l = \{n+1, n+2, n+3, ...\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\sigma(t) = 2^{(n+1)+2} = 2t.$$

$$f^{\sigma}(t) = f(\sigma(t)) = f(2t) = (2t)^2 + 2t - 1.$$

$$f^{\sigma}(t) = 4t^2 + 2t - 1 \quad , \quad pour\ tout\ t \in \mathbb{T}.$$

Chapitre 2

Calcul Différentiel sur les Echelles de Temps

2.1 Différentiabilité sur les échelles de temps

Nous présentons dans cette section la définition de la Δ-Dérivée et quelques unes de ses propriétés fondamentales.

2.1.1 La Delta Dérivée

Définition 7

Soit la fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. On dit que f est Δ-différentiable en $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ s'il existe un nombre $f^{\Delta}(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de t satisfaisant :

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|, \quad \textit{pour tout } s \in U.$$

On appelle $f^{\Delta}(t)$ la Δ-dérivée de f en t.

Définition 8 (*Δ-Dérivée*)

Nous disons que f est delta (ou Hilger) différentiable (ou tout simplement différentiable) sur $\mathbb{T}^{\kappa}$ si $f^{\Delta}(t)$ existe pour tout $t \in \mathbb{T}$.
Si f est Δ-différentiable en tout point $t \in \mathbb{T}$, alors $f^{\Delta} : \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ est dite la Δ-dérivée de f sur $\mathbb{T}^{\kappa}$.

Lorsque $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, la Δ-dérivée n'est autre que la dérivée usuelle, c'est-à-dire, $f^{\Delta} = f'$, et, dans le cas où $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, on obtient : $f^{\Delta} = \Delta f$.

Proposition 1

La delta dérivée est bien définie.

Démonstration : Soient $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ et $f_i^{\Delta}(t), i = 1, 2$, tels que

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f_1^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - s|,$$

et

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f_2^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - s|$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et tout s appartenant à un voisinage U de t, où $U =]t-\delta, t+\delta[\cap \mathbb{T}$ pour quelques $\delta > 0, s \neq \sigma(t)$. Donc,

$$\begin{aligned}
\left|f_1^{\Delta}(t) - f_2^{\Delta}(t)\right| &= \left|f_1^{\Delta}(t) - \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} + \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - f_2^{\Delta}(t)\right| \\
&\leq \left|f_1^{\Delta}(t) - \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}\right| + \left|\frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - f_2^{\Delta}(t)\right| \\
&= \frac{\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f_1^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right|}{|\sigma(t) - s|} \\
&+ \frac{\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f_2^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right|}{|\sigma(t) - s|} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Et comme ϵ est choisi positif arbitrairement alors $f_1^{\Delta}(t) = f_2^{\Delta}(t)$. ■

Théorème 1

Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$.

(i) *Si f est Δ-différentiable en t, alors f est continue en t.*

(ii) *Si f est continue en t et t est dispersé à droite, alors f est Δ-différentiable en t et*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

(iii) *Si t est dense à droite, alors f est Δ-différentiable en t si et seulement si la limite suivante $\lim\limits_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$ existe et est finie.*
Dans ce cas,

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

(iv) *Si f est Δ-différentiable en t, alors*

$$f^{\sigma}(t) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t).$$

Démonstration : Démontrons le 1) : Supposons que f est Δ-differentiable en t, et soit $\varepsilon \in]0; 1[$ arbitrairement choisi et posons :

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{1 + |f^{\Delta}(t)| + 2\mu(t)}.$$

f étant Δ-différentiable en t alors il existe un voisinage U de t tel que

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon^{*}|\sigma(t) - s|, \text{ pour tout } \ s \in U.$$

Et pour tout $s \in U \cap]t - \varepsilon^{*}, t + \varepsilon^{*}[$, nous aurons

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(s)| &= | f(t) + f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) - f(\sigma(t)) + f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) | \\
&\leq \left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| + \left|f(\sigma(t)) - f(t) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| \\
&\leq \varepsilon^{*}|\sigma(t) - s| + | f(\sigma(t)) - f(t) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - t) + f^{\Delta}(t)(s - t) | \\
&\leq \varepsilon^{*}|\sigma(t) - s| + \left|f(\sigma(t)) - f(t) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - t)\right| + \left|f^{\Delta}(t)\right| |s - t| \\
&\leq \varepsilon^{*}|\sigma(t) - s| + \varepsilon^{*}\mu(t) + \varepsilon^{*} \left|f^{\Delta}(t)\right| \\
&= \varepsilon^{*} \left(|\sigma(t) - s| + \mu(t) + \left|f^{\Delta}(t)\right|\right) \\
&= \varepsilon^{*} \left(|\sigma(t) - t + t - s| + \mu(t) + \left|f^{\Delta}(t)\right|\right) \\
&\leq \varepsilon^{*} \left(\sigma(t) - t + |t - s| + \mu(t) + \left|f^{\Delta}(t)\right|\right) \\
&= \varepsilon^{*} \left(2\mu(t) + |t - s| + \left|f^{\Delta}(t)\right|\right) \\
&\leq \varepsilon^{*} \left(2\mu(t) + \varepsilon^{*} + \left|f^{\Delta}(t)\right|\right) \\
&\leq \varepsilon^{*} \left(1 + 2\mu(t) + \left|f^{\Delta}(t)\right|\right) \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Démontrons le 2) : Supposons que f est continue en t et que t est dispersé à droite. Par la propriété de continuité, nous pouvons écrire

$$\lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

Donc, pour pour $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de t tel que

$$\left|\frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}\right| \leq \varepsilon,$$

pour tout $s \in U$. De cela on tire :

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - (\sigma(t) - s)\frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}\right| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|,$$

pour tout $s \in U$. Nous concluons que

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

Démontrons le 3) : Supposons que t est dense à droite et soit $\varepsilon > 0$ choisi arbitrairement. Alors f est Δ-différentiable en t si et seulement s'il existe un voisinage U de t tel que

$$\left|f(t) - f(s) - f^{\Delta}(t)(t - s)\right| \leq \varepsilon^{*}|t - s|, \text{ pour tout } \ s \in U,$$

en d'autres termes, si et seulement si

$$\left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}-f^{\Delta}(t)\right| \leq \varepsilon^{*}, \text{ pour tout } \ s \in U,$$

Qu'on peut traduire par

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s \to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}.$$

Démontrons le 4) : Supposons que f est Δ-différentiable en t.

- Si f est dense à droite, alors $\sigma(t)=t$, et donc $\mu(t)=0$. Donc

$$f(\sigma(t))=f(t)=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t).$$

- Si t est dispersé à droite, alors

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}.$$

D'où l'on déduit directement que

$$f(\sigma(t))=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t).$$

■

Exemple 10

Soit l'échelle de temps

$$\mathbb{T}=\left\{\frac{1}{1+2n};\ n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\},$$

et posons $f(t)=\sigma(t)$, pour $t\in\mathbb{T}$.
Déterminer $f^{\Delta}(t)$ pour tout $t\in\mathbb{T}^{\kappa}=\mathbb{T}-\{1\}$.

Solution : Pour tout $t\in\mathbb{T}^{\kappa}-\{0\}$, nous avons $t=\dfrac{1}{1+2n}$ équivaut à $n=\dfrac{1-t}{2t}$. Déterminons $\sigma(t)$.

$$\sigma(t)=\inf\left\{\ s\in\mathbb{T}: s>\frac{1}{1+2n}\right\}=\frac{1}{1+2(n-1)}=\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{2\left(\dfrac{1-t}{2t}\right)-1},$$

c'est à dire que

$$\sigma(t)=\frac{t}{1-2t}>t.$$

Donc, tout point t avec $t=\frac{1}{1+2n}$; $n\in\mathbb{N}^{*}$ est dispersé à droite. Nous concluons

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t}=\frac{\sigma(\sigma(t))-\sigma(t)}{\sigma(t)-t}=\frac{2(\sigma(t))^{2}}{(1-2\sigma(t))(\sigma(t)-t)},$$

et en remplacant

$$f^{\Delta}(t)=\frac{2\left(\dfrac{t}{1-2t}\right)^{2}}{\left(1-2\dfrac{t}{1-2t}\right)\left(\dfrac{t}{1-2t}-t\right)},$$

d'où, après simplification

$$f^{\Delta}(t)=\frac{1}{1-4t}.$$

- Si $t=0$ alors $\sigma(t)=\sigma(0)=\inf\{\ s\in\mathbb{T}:s>0\}=0$. Donc $t=0$ est dense à droite. Et nous aurons

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sigma(h))-\sigma(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h}{1-2h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{1-2h}=1,$$

c'est à dire $f^{\Delta}(0)=1$. Et pour tout $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$, $f^{\Delta}(t)=\dfrac{1}{1-4t}$.

Exercice 7

Soit la fonction $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ définie par $f(t)=\lambda$, pour tout $t\in\mathbb{T}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrer que

$$f^{\Delta}(t)=0.$$

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}f^{\Delta}(t)&=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{\sigma(t)-s}\\&=\lim_{s\to t}\frac{\lambda-\lambda}{\sigma(t)-s}\\&=0.\end{aligned}$$

Exercice 8

Soit la fonction $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ définie par $f(t)\ =t^{3}$. Montrer que

$$f^{\Delta}(t)=\sigma(t)^{2}+t\sigma(t)+t^{2}.$$

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}f^{\Delta}(t)&=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{\sigma(t)-s}\\&=\lim_{s\to t}\frac{\sigma(t)^{3}-s^{3}}{\sigma(t)-s}\\&=\lim_{s\to t}\frac{(\sigma(t)-s)(\sigma(t)^{2}+s\sigma(t)+s^{2})}{\sigma(t)-s}\\&=\sigma(t)^{2}+t\sigma(t)+t^{2}.\end{aligned}$$

Exercice 9

Soit la fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \sqrt{t}$. Montrer que

$$f^{\Delta}(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma(t)} - \sqrt{t}}.$$

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{\sigma(t) - s} \\ &= \lim_{s \to t} \frac{\sqrt{\sigma(t)} - \sqrt{s}}{\sigma(t) - s} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma(t)} - \sqrt{t}}. \end{aligned}$$

Exercice 10

Soit la fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{t}$. Montrer que

$$f^{\Delta}(t) = -\frac{1}{t\sigma(t)}.$$

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{\sigma(t) - s} \\ &= \lim_{s \to t} \frac{s - \sigma(t)}{s\sigma(t)(\sigma(t) - s)} \\ &= -\frac{1}{t\sigma(t)}. \end{aligned}$$

Exercice 11

Soit la fonction $f : \mathbb{T} \to h\mathbb{Z}$ définie par $f(t) = t^2$. Montrons que

$$f^{\Delta}(t) = 2t + h.$$

Solution : Nous savons que (voir exercice précédent) $\sigma(t) = t + h$ et

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{\sigma(t) - s} \\ &= \lim_{s \to t} \frac{\sigma^2 - s^2}{\sigma(t) - s} \\ &= \sigma(t) + t \\ &= (t + h) + t \\ &= 2t + h. \end{aligned}$$

Exercice 12

Soit l'echelle de temps $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}}$ avec $q > 1$, et $\sigma(t) = qt$. Montrer que :

$$(\log(t))^{\Delta} = \frac{\log q}{q - 1} \times \frac{1}{t}.$$

Solution : Comme $q > 1$ alors t est dispersé à droite et on a

$$\begin{aligned} \frac{\log \sigma(t) - \log(t)}{\mu(t)} &= \frac{\log(qt) - \log(t)}{\mu(t)} \\ &= \frac{\log q}{qt - t} \\ &= \frac{\log q}{q - 1} \times \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Exercice 13

Soient $\mathbb{T}$ une échelle de temps, et $t \in \mathbb{T}$ un point dispersé à droite. On définit la fonction f par :

$$f(t) = 2\sin(t) + t^2 - 3t^3.$$

- *Déterminer $f^{\Delta}(t)$.*

Solution :

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= 2 \cdot \frac{sin(\sigma(t)) - sin(t)}{\mu(t)} + \frac{(\sigma(t))^2 - t^2}{\mu(t)} - 3\frac{(\sigma(t))^3 - t^3}{\mu(t)} \\ &= 2 \cdot \frac{2\sin\left(\frac{\sigma(t)-t}{2}\right)\cos\left(\frac{\sigma(t)+t}{2}\right)}{\mu(t)} + \frac{(\sigma(t) - t)(\sigma(t) + t)}{\mu(t)} \\ &- 3 \cdot \frac{(\sigma(t) - t)((\sigma(t))^2 + t\sigma(t) + t^2)}{\mu(t)} \end{aligned}$$

$$= 4 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\mu(t)}{2}\right)\cos\left(\frac{\sigma(t)+t}{2}\right)}{\mu(t)} + \sigma(t) + t - 3((\sigma(t))^2 + t\sigma(t) + t^2)$$
$$= 4 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\mu(t)}{2}\right)\cos\left(\frac{\sigma(t)+t}{2}\right)}{\mu(t)} - 3(\sigma(t))^2 + \sigma(t)(1-3t) + t - 3t^2.$$

Exercice 14

Considérons la fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t^2$ où

$$\mathbb{T} = \left\{\frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Déterminer $f^{\Delta}(t)$.

Solution :

Pour tout $t \in \mathbb{T}$ il existe $n \in \mathbb{N}^* : t = \dfrac{n}{2}$. Donc

$$\sigma(t) = \frac{n+1}{2},$$

comme

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)},$$

alors

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2}{\frac{n+1}{2} - \frac{n}{2}} \\ &= \frac{n+1}{2} + \frac{n}{2} \\ &= n + \frac{1}{2} \\ &= 2t + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$f^{\Delta}(t) = 2t + \frac{1}{2}.$$

Théorème 2

Si $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sont Δ-différentiables en $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$, alors

(i) *La somme $f+g$ est Δ-différentiable en t avec*

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

(ii) *Pour toute $\alpha \in \mathbb{R}$, (αf) est Δ-différentiable en t avec*

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

(iii) *Le produit fg est Δ-différentiable en t avec*

$$\begin{aligned}(fg)^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t)g(t) + f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t)\\ &= f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t).\end{aligned}$$

(iv) *si $f(t)f^{\sigma}(t) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est Δ-differentiable en t avec*

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f^{\sigma}(t)f(t)}.$$

(v) *Si $g(t)g^{\sigma}(t) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est Δ-differentiable en t avec*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g^{\sigma}(t)g(t)}.$$

Démonstration : Démontrons le i) : 1) Soit $\varepsilon > 0$ choisi arbitrairement. Alors il existe deux voisinages U_1 et U_2 de t tels que

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - s|, \text{ pour tout } \ s \in U_1,$$

et

$$\left|g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - s|, \text{ pour tout } \ s \in U_2.$$

En posant $U = U_1 \cap U_2$ nous aurons, pour tout $s \in U$:

$$\begin{aligned}&\left|(f+g)(\sigma(t)) - (f+g)(s) - \left[f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)\right](\sigma(t) - s)\right|\\ &= \left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) + g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right|\\ &\leq \left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| + \left|g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right|\\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - s| + \tfrac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - s|\\ &= \varepsilon|\sigma(t) - s|.\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $f+g$ est Δ-différentiable en t et

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

Démontrons le ii) : 1) Supposons que $\alpha \neq 0$ et choisissons $\varepsilon > 0$ arbitrairement. Alors comme f est Δ-différentiable en t, il existe un voisinage U de t tel que

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \frac{\varepsilon}{|\alpha|}|\sigma(t) - s|, \text{ pour tout } \ s \in U$$

Donc, pour tout $s \in U$ on peut écrire

$$\begin{aligned}\left|\alpha f(\sigma(t)) - \alpha f(s) - \alpha f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| &= |\alpha| \left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| \\ &\leq |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Démontrons le iii) : Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ choisi arbitrairement et définissons le réel ε^* par

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{1 + |f(t)| + |g(\sigma(t)| + |g^{\Delta}(t)|}.$$

On vérifie facilement que $\varepsilon^* \in]0, 1[$. Comme $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sont Δ-différentiables en $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$, alors il existe deux voisinages U_1 et U_2 de t tels que

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon^*|\sigma(t) - s|, \text{ pour tout } \ s \in U_1$$

et

$$\left|g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon^*|\sigma(t) - s|, \text{ pour tout } \ s \in U_2.$$

Et $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ étant Δ-différentiable en $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$, alors elle est continue en t et donc

$$|f(t) - f(s) \leq \varepsilon^* \text{ pour tout } \ s \in U_3,$$

où U_3 est un voisinage de t. Posons $U := U_1 \cap U_2 \cap U_3$, et soit $s \in U$. Nous aurons

$$\begin{aligned}&\left|(fg)(\sigma(t)) - (fg)(s) - \left[f^{\Delta}(t)g(\sigma(t)) + f(t)g^{\Delta}(t)\right](\sigma(t) - s)\right| \\ &= | \left[f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right] g(\sigma(t)) \\ &\quad + \left[g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right] f(t) \\ &\quad + \left[g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right] [f(s) - f(t)] \\ &\quad + (\sigma(t) - s)g^{\Delta}(t)[f(s) - f(t)]| \\ &\leq \varepsilon^* \, |\sigma(t) - s \, \|g(\sigma(t)) \, | + \varepsilon^* | \, \sigma(t) - s\| \, f(t)| \\ &\quad + \varepsilon^*\varepsilon^*|\sigma(t) - s| + \varepsilon^*|\sigma(t) - s| \left|g^{\Delta}(t)\right| \\ &= \varepsilon^*|\sigma(t) - s| \left[|g(\sigma(t))| + |f(t)| + \varepsilon^* + \left|g^{\Delta}(t)\right|\right]\end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon^*|\sigma(t)-s|\left[1+|f(t)|+|g(\sigma(t))|+\left|g^\Delta(t)\right|\right]$$
$$= \varepsilon|\sigma(t)-s|.$$

D'où fg est Δ-différentiable en t et

$$(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f^\sigma(t)g^\Delta(t).$$

On obtient

$$(fg)^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g^\sigma(t).$$

en intervertissant f et g dans le dernier résultat obtenu.
Démontrons le iv) : Comme si $f(t)f^\sigma(t) \neq 0$, alors les expressions $\dfrac{1}{f(t)}$ et $\dfrac{1}{f(\sigma(t))}$ sont définies. Posons $g(t) = \frac{1}{f(t)}$. alors $g^\Delta(t)$ doit satisfaire, par définition,

$$\left|g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t)-s)\right| \leq \varepsilon|\sigma(t)-s|, \text{ pour tout } \ \omega > 0$$

Comme $g(\sigma(t)) = \frac{1}{f(\sigma(t))}$ et $g(s) = \frac{1}{f(s)}$ on doit ontenir

$$\left|\tfrac{f(s)-f(\sigma(t))}{f(s)f(\sigma(t))} - g^\Delta(t)(\sigma(t)-s)\right| \leq \varepsilon|\sigma(t)-s|.$$

Donc, $g^\Delta(t) = \left(\dfrac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\dfrac{f^\Delta(t)}{f(t)f^\Delta(t)}$.
Démontrons le v) : En utilisant (ii) et (iv), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) &= \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)^\Delta(t) \\
&= f(t)\left(\frac{1}{g}\right)^\Delta(t) + f^\Delta(t)\frac{1}{g(\sigma(t))} \\
&= -f(t)\frac{g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))} + f^\Delta(t)\frac{1}{g(\sigma(t))} \\
&= \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.
\end{aligned}$$

■

Exercice 15

Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ où $h > 0$ fixé. Démontrer que

$$t = \frac{1}{2}f_2^\Delta(t) - \frac{h}{2},$$

et

$$t^2 = \frac{1}{3}f_3^\Delta(t) - \frac{h}{2}f_2^\Delta(t) + \frac{1}{6}h^2,$$

où $f_i(t) = t^i, i = 1,\ldots,3,\ t \in \mathbb{T}$.

Solution : On rappelle que tous les points de $\mathbb{T}$ sont dispersés à droite et que

$$\sigma(t) = t + h, \quad \mu(t) = h, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Donc, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} f_2^{\Delta}(t) - \frac{h}{2} &= \frac{1}{2} \frac{(\sigma(t))^2 - t^2}{\sigma(t) - t} - \frac{h}{2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(\sigma(t) - t)(\sigma(t) + t)}{\sigma(t) - t} - \frac{h}{2} \\
&= \frac{1}{2}(\sigma(t) + t) - \frac{h}{2} \\
&= \frac{1}{2}(2t + h) - \frac{h}{2} \\
&= t + \frac{h}{2} - \frac{h}{2} \\
&= t.
\end{aligned}$$

Et, de la même façon

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3} f_3^{\Delta}(t) - \frac{h}{2} f_2^{\Delta}(t) + \frac{1}{6} h^2 \\
&= \frac{1}{3} \frac{(\sigma(t))^3 - t^3}{\sigma(t) - t} - \frac{h}{2} \frac{(a(t))^2 - t^2}{\sigma(t) - t} + \frac{1}{6} h^2 \\
&= \frac{1}{3} \frac{(\sigma(t) - t)\left((\sigma(t))^2 + t\sigma(t) + t^2\right)}{\sigma(t) - t} - \frac{h}{2} \frac{(\sigma(t) - t)(\sigma(t) + t)}{\sigma(t) - t} + \frac{1}{6} h^2 \\
&= \frac{1}{3}\left((\sigma(t))^2 + t\sigma(t) + t^2\right) - \frac{h}{2}(\sigma(t) + t) + \frac{1}{6} h^2 \\
&= \frac{1}{3}\left((t + h)^2 + t(t + h) + t^2\right) - \frac{h}{2}(t + h + t) + \frac{1}{6} h^2 \\
&= \frac{1}{3}\left(3t^2 + 3ht + h^2\right) - ht - \frac{h^2}{2} + \frac{1}{6} h^2 \\
&= t^2.
\end{aligned}$$

Exercice 16

Soit $f : \mathbb{T} \longleftarrow \mathbb{R}$ une fonction Δ-dérivable en $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Montrer que :

$$(f^2)^{\Delta} = f^{\Delta}(f^{\sigma} + f)$$

Solution : On a :

$$\begin{aligned}
(f^2)^{\Delta}(t) &= (f \cdot f)^{\Delta} \\
&= f^{\Delta}(t) \cdot f(t) + f^{\sigma}(t) f^{\Delta}(t) \\
&= f^{\Delta}(t)(f(t) + f^{\sigma}(t)).
\end{aligned}$$

Remarque 1

Si $f : \mathbb{T} \longleftarrow \mathbb{R}$ *est* Δ*-dérivable en* $t \in \mathbb{T}^\kappa$*, alors*

$$\begin{aligned}\left(f^3\right)^\Delta(t) = \left(ff^2\right)^\Delta(t) &= f^\Delta(t)f^2(t) + f(\sigma(t))\left(f^2\right)^\Delta(t)\\ &= f^\Delta(t)f^2(t) + f^\sigma(t)f^\Delta(t)\left(f^\sigma(t) + f(t)\right)\\ &= f^\Delta(t)\left(f^2(t) + f(t)f^\sigma(t) + \left(f^\sigma\right)^2(t)\right).\end{aligned}$$

Exercice 17

Montrer par recurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ *que*

$$\left(f^n\right)^\Delta(t) = f^\Delta(t)\sum_{k=0}^{n-1} f^k(t)\left(f^\sigma\right)^{n-1-k}(t).$$

Solution : La propriété est vraie pour $n = 2$, et $n = 3$.
Supposons que $\left(f^n\right)^\Delta(t) = f^\Delta(t)\sum_{k=0}^{n-1} f^k(t)\left(f^\sigma\right)^{n-1-k}(t)$, pour $n \geq 3$ et démontrons que

$$\left(f^{n+1}\right)^\Delta(t) = f^\Delta(t)\sum_{k=0}^{n} f^k(t)\left(f^\sigma\right)^{n-k}(t).$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}\left(f^{n+1}\right)^\Delta(t) =& \left(ff^n\right)^\Delta(t) = f^\Delta(t)f^n(t) + f^\sigma(t)\left(f^n\right)^\Delta(t)\\ =& f^\Delta(t)f^n(t) + f^\Delta(t)\left(f^{n-1}(t) + f^{n-2}(t)f^\sigma(t)\right.\\ &\left. + \cdots + f(t)\left(f^\sigma\right)^{n-2}(t) + \left(f^\sigma\right)^{n-1}(t)\right)f^\sigma(t)\\ =& f^\Delta(t)\left(f^n(t) + f^{n-1}(t)f^\sigma(t) + f^{n-2}(t)\left(f^\sigma\right)^2(t) + \cdots + \left(f^\sigma\right)^n(t)\right)\\ =& f^\Delta(t)\sum_{k=0}^{n} f^k(t)\left(f^\sigma\right)^{n-k}(t).\end{aligned}$$

Exercice 18

Soient f, g, h *trois fonctions* Δ*-dérivables sur* $\mathbb{T}^\kappa$*. Déterminer* $(fgh)^\Delta(t)$*.*

Solution : Soit $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Alors on peut écrire

$$\begin{aligned}(fgh)^\Delta(t) &= ((fg)h)^\Delta(t)\\ &= (fg)^\Delta(t)h(t) + (fg)(\sigma(t))h^\Delta(t)\\ &= \left(f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t)\right)h(t) + f^\sigma(t)g^\sigma(t)h^\Delta(t)\\ &= f^\Delta(t)g(t)h(t) + f^\sigma(t)g^\Delta(t)h(t) + f^\sigma(t)g^\sigma(t)h^\Delta(t).\end{aligned}$$

Définition 9

Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction Δ-différentiable sur T^{κ}.
Si f^{Δ} est Δ-différentiable sur $(\mathbb{T}^{\kappa})^{\kappa} := \mathbb{T}^{\kappa^2}$, alors f est dite deux fois Δ-différentiable, et la fonction $f^{\Delta\Delta} := (f^{\Delta})^{\Delta}$ est appelée la Δ dérivée seconde de f sur $\mathbb{T}^{\kappa^2}$.
De façon analogue, nous définissons les Δ dérivées d'ordre supérieur $f^{\Delta^n} : \mathbb{T}^{\kappa^n} \to \mathbb{R}$.

Remarque 2

Si f et g sont deux fois Δ-différentiables et que f^{σ} est Δ-différentiable, alors fg est deux fois Δ-différentiable et on a

$$\begin{aligned}(fg)^{\Delta\Delta} &= \left(f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta}\right)^{\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + f^{\Delta^{\sigma}}g^{\Delta} + f^{\sigma^{\Delta}}g^{\Delta} + f^{\sigma^{\sigma}}g^{\Delta\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + \left(f^{\Delta\sigma} + f^{\sigma\Delta}\right)g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}g^{\Delta\Delta}.\end{aligned}$$

Exercice 19

On définit l'échelle de temps $\mathbb{T}$ par $\mathbb{T} := 4^{\mathbb{N}} = \{4^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et la fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = t^3 - t^2 + 3t - 2.$$

1) *Déterminer l'ensemble $\mathbb{T}^{\kappa}$.*
2) *Déterminer $\sigma(t)$ en fonction de t et en déduire la nature des points de $\mathbb{T}$.*
3) *Déterminer les fonctions $f^{\Delta}(t)$, $f^{\Delta\Delta}(t) = \left(f^{\Delta}\right)^{\Delta}(t)$ et $f^{\Delta^3}(t) := (f^{\Delta\Delta})^{\Delta}(t)$ en fonction de t.*

Solution : Soit l'échelle de temps $\mathbb{T}$ par $\mathbb{T} := 4^{\mathbb{N}} = \{4^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et la fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = t^3 - t^2 + 3t - 2.$$

1) Déterminons l'ensemble $\mathbb{T}^{\kappa}$.
On a $\mathbb{T} = 4^{\mathbb{N}} = \{4^n,\ n \in \mathbb{N}\} = \{1, 4, 16, \cdots\}$ et donc $sup\mathbb{T} = +\infty$.
D'où

$$\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T}.$$

2) Déterminons $\sigma(t)$ en fonction de t et la nature des points de $\mathbb{T}$.

$$\sigma(t) = inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = inf\{4^l,\ 4^l > 4^n\ ,\ l \in \mathbb{N}\} = 4^{n+1} = 4 \times 4^n = 4t > t.$$

Donc tout point $t \in \mathbb{T}$ est dispersé á droite.
3) Déterminons les fonctions $f^{\Delta}(t)$, $f^{\Delta\Delta}(t) = \left(f^{\Delta}\right)^{\Delta}(t)$ et $f^{\Delta^3}(t)$ en fonction de t.
On a

$$f^{\Delta}(t) = \frac{(\sigma(t))^3 - t^3}{\sigma(t) - t} - \frac{(\sigma(t))^2 - t^2}{\sigma(t) - t} + 3\frac{\sigma(t) - t}{\sigma(t) - t}.$$

Donc
$$f^{\Delta}(t) = \frac{(\sigma(t)-t)\,(\sigma(t)^2+t\sigma(t)+t^2)}{\sigma(t)-t} - \frac{(\sigma(t)-t)(\sigma(t)+t)}{\sigma(t)-t} + 3.$$
Et après simplification
$$f^{\Delta}(t) = \sigma(t)^2 + t\sigma(t) + t^2 - (\sigma(t)+t) + 3.$$
C'est à dire
$$f^{\Delta}(t) = 21t^2 - 5t + 3.$$
De plus,
$$f^{\Delta\Delta}(t) = 21\frac{(\sigma(t))^2 - t^2}{\sigma(t)-t} - 5\frac{\sigma(t)-t}{\sigma(t)-t} = 21(\sigma(t)+t) - 5 = 21(5t) - 5.$$
C'est à dire
$$f^{\Delta\Delta}(t) = 105t - 5.$$
Et
$$f^{\Delta^3}(t) = 105\frac{\sigma(t)-t}{\sigma(t)-t} = 105.$$

Exercice 20

Soit le réel $h > 0$ et considérons l'échelle de temps
$$\mathrm{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}.$$
Déterminer $\sigma(t)$, $\rho(t)$ et $\mu(t)$ puis calculer $f^{\Delta}(t)$ et $f^{\Delta\Delta}(t)$, où $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

Pour tout $t \in \mathbb{T}$, nous pouvons écrire
$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf\{t + nh : n \in \mathbb{N}\} = t + h,$$
et de facon similaire $\rho(t) = t - h$. En conclusion, tout point $t \in \mathbb{T}$ est isolé et
$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + h - t = h \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{T}.$$
On remarque dans ce cas que la fonction μ est constante.
Nous avons
$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{T}.$$

En réitérant le même procédé,

$$\begin{aligned} f^{\Delta\Delta}(t) &= \frac{f^{\Delta}(\sigma(t)) - f^{\Delta}(t)}{\mu(t)} \\ &= \frac{f^{\Delta}(t+h) - f^{\Delta}(t)}{h} \\ &= \frac{\dfrac{f(t+2h) - f(t+h)}{h} - \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}}{h} \\ &= \frac{f(t+2h) - f(t+h) - f(t+h) + f(t)}{h^2} \\ &= \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2}. \end{aligned}$$

Exercice 21

Soit $q > 1$ et et posons $q^{\mathbb{Z}} := \left\{q^k : k \in \mathbb{Z}\right\}$, et considérons l'échelle de temps

$$\mathbb{T} = \overline{q^{\mathbb{Z}}} := q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}.$$

1) Calculer $\sigma(t)$ et $\rho(t)$ pour $t \in \mathbb{T}$.
2) Pour une fonction donnée $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, calculer la deuxieme dérivée de f en $t \neq 0$, lorqu'elle existe.

Soit $q > 1$ et posons

$$q^{\mathbb{Z}} := \left\{q^k : k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \text{et} \quad \overline{q^{\mathbb{Z}}} := q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$$

On considère l'échelle de temps $\mathbb{T} = \overline{q^{\mathbb{Z}}}$. Donc, si l'on pose $t = q^m \in \mathbb{T}$

$$\sigma(t) = \inf\{q^n : n \in [m+1, \infty)\} = q^{m+1} = qq^m = qt,$$

et il est clair que $\sigma(0) = 0$. Donc, on obtient $\sigma(t) = qt$ et $\rho(t) = \dfrac{t}{q}$, pour tout $t \in \mathbb{T}$, et par conséquent

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = (q-1)t \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{T}.$$

D'où, 0 est un minimun dense à droite et tout autre point de $\mathbb{T}$ est isolé. Pour une fonction donnée $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ nous avons

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t} \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{T}\backslash\{0\}$$

et

$$f^{\Delta}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0) - f(s)}{0 - s} = \lim_{t\to 0} \frac{f(s) - f(0)}{s}$$

pourvu que cette limite existe. Calculons la deuxième dérivée de f en $t \neq 0$. Nous aurons

$$\begin{aligned} f^{\Delta\Delta}(t) &= \frac{f^{\Delta}(\sigma(t)) - f^{\Delta}(t)}{\mu(t)} \\ &= \frac{f^{\Delta}(qt) - f^{\Delta}(t)}{(q-1)t} \\ &= \frac{\frac{f\left(q^2t\right) - f(qt)}{q(q-1)t} - \frac{f(gt) - f(t)}{(q-1)t}}{q-1)t} \\ &= \frac{f\left(q^2t\right) - f(qt) - qf(qt) + qf(t)}{q(q-1)^2t^2} \\ &= \frac{f\left(q^2t\right) - (q+1)f(qt) + qf(t)}{q(q-1)^2t^2}. \end{aligned}$$

Notons également que $\mu(t) = t$ dans le cas particulier $q = 2$.

Exercice 22

a verifier Soit la fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ et supposons que μ est $\Delta-$différentiable en $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$, et t dispersé à droite. Montrer que

$$f^{\Delta\sigma}(t) = f^{\sigma\Delta}(t)\frac{1}{1+\mu^{\Delta}(t)},$$

$$f^{\sigma\Delta}(t) = \left(1+\mu^{\Delta}(t)\right) f^{\Delta\sigma}(t),$$

$$f^{\sigma\Delta\sigma}(t) = \left(f^{\sigma}\right)^{\Delta\sigma}(t) = \left(1+\mu^{\Delta\sigma}(t)\right) f^{\Delta\sigma\sigma}(t).$$

$$\begin{aligned} f^{\Delta\sigma}(t) &= \left(f^{\Delta}\right)^{\sigma}(t) \\ &= \left(\frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}\right)^{\sigma} \\ &= \frac{f(\sigma(\sigma(t))) - f(\sigma(t))}{\sigma(\sigma(t)) - \sigma(t)} \\ &= \frac{f(\sigma(\sigma(t))) - f(\sigma(t))}{\sigma(t) - t} \frac{1}{\frac{\sigma(\sigma(t)) - \sigma(t)}{\sigma(t) - f}} \\ &= \left(f^{\sigma}\right)^{\Delta}(t)\frac{1}{\sigma^{\Delta}(t)} \\ &= f^{\sigma\Delta}(t)\frac{1}{1+\mu^{\Delta}(t)}, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$f^{\sigma\Delta}(t) = \left(1+\mu^{\Delta}(t)\right) f^{\Delta\sigma}(t).$$

donc

$$\begin{aligned} f^{\sigma\sigma\Delta}(t) &= (f^{\sigma})^{\sigma\Delta}(t) \\ &= \left(1+\mu^{\Delta}(t)\right)\left(f^{\sigma\Delta}\right)^{\sigma}(t). \\ &= \left(1+\mu^{\Delta}(t)\right) f^{\sigma\Delta\sigma}(t) \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} f^{\sigma\Delta\sigma}(t) &= (f^{\sigma})^{\Delta\sigma}(t) \\ &= \left((f^{\sigma})^{\Delta}\right)^{\sigma}(t) \\ &= \left(\left(1+\mu^{\Delta}(t)\right)\left(f^{\Delta}\right)^{\sigma}(t)\right)^{\sigma} \\ &= \left(1+\mu^{\Delta\sigma}(t)\right) f^{\Delta\sigma\sigma}(t). \end{aligned}$$

Dans cette section nous rappelons la défnition et quelques propriétés (sans démonstrations) de la nabla dérivée(∇-dérivée).

2.1.2 La Nabla Dérivée

Définition 10 (*Nabla Dérivée*)

Soit la fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. On dit que f est ∇-différentiable en $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ s'il existe un nombre $f^{\nabla}(t)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de t satisfaisant :

$$|f(\rho(t)) - f(s) - f^{\nabla}(t)(\rho(t) - s)| \leq \varepsilon|\rho(t) - s|, \quad \text{pour tout } s \in V.$$

Si f est ∇-différentiable en tout point $t \in \mathbb{T}$, alors $f^{\nabla} : \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ est dite la ∇-dérivée de f sur $\mathbb{T}^{\kappa}$.

Théorème 3

Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$, alors :

1. *Si f est ∇-différentiable en t, alors f est continue en t.*
2. *Si f est continue en t et t est dispersé à gauche, alors f est ∇-différentiable en t, de plus nous avons :*

$$f^{\nabla}(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{v(t)}.$$

3. *Si t est dense à gauche, alors f est ∇-différentiable en t si $\lim\limits_{s \to t} \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}$ existe et finie. Dans ce cas nous avons :*

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

4. *Si f est ∇-différentiable en t, alors : $f(\rho(t)) = f(t) - v(t) f^{\nabla}(t)$.*

Théorème 4

Si $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *sont* ∇*-différentiables en* $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$*, alors :*

1. *La somme* $(f+g)$ *est* ∇*-différentiable en* t *avec :*

$$(f+g)^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t) + g^{\nabla}(t).$$

2. *Pour toute* $\alpha \in \mathbb{R}$, αf *est* ∇*-différentiable en* t *avec :*

$$(\alpha f)^{\nabla}(t) = \alpha f^{\nabla}(t).$$

3. *Le produit* (fg) *est* ∇*-différentiable en* t *avec :*

$$\begin{aligned}(fg)^{\nabla}(t) &= f^{\nabla}(t)g(t) + f(\rho(t))g^{\nabla}(t). \\ &= f(t)g^{\nabla}(t) + f^{\nabla}(t)g(\rho(t)).\end{aligned}$$

4. *Si* $f(t)f(\rho(t)) \neq 0$*, alors* $\frac{1}{f}$ *est* ∇*-différentiable en* t *avec :*

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\nabla}(t) = -\frac{f^{\nabla}(t)}{f(\rho(t))f(t)}.$$

5. *Si* $g(t)g(\rho(t)) \neq 0$*, alors* $\frac{f}{g}$ *est* ∇*-différentiable en* t *avec :*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\nabla}(t) = \frac{f^{\nabla}(t)g(t) - f(t)g^{\nabla}(t)}{g(\rho(t))g(t)}.$$

2.2 Théoème des valeurs intermédiaires et applications

Soient $\mathbb{T}$ une échelle de temps et a, b deux éléments de $\mathbb{T}$, vérifiant $a < b$. Considérons la fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$.

Théorème 5

Si f est delta differentiable en t, alors il existe une fonction g, définie sur un voisinage U de t, vérifiant

$$\lim_{s\to t} g(s) = g(t) = 0$$

et tel que

$$f(\sigma(t)) = f(s) + \left(f^{\Delta}(t) + g(s)\right)(\sigma(t) - s). \tag{2.1}$$

pour tout $s \in U$.

Démonstration : Définissons la fonction g par :

$$g(s) = \begin{cases} \dfrac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - f^{\Delta}(t) & \text{si } s \neq \sigma(t), t \in \mathbb{T} \\ 0, & \text{si } s = \sigma(t), t \in \mathbb{T} \end{cases} \tag{2.2}$$

Ainsi, la résolution de (2.2) pour $f(\sigma(t))$ nous donne (2.1). Et comme f est delta differentiable en t, alors elle est continue en t. Par conséquent, la fonction g est continue en t et nous avons

$$\lim_{s\to t} g(s) = g(t) = 0.$$

■

Théorème 6

Si $\mathbb{T}$ est une échelle de temps et f une fonction $\Delta-$dérivable en tout point de $[a, b]_{\mathbb{T}}$ avec $f(a) = f(b)$ alors il existe deux éléments $\alpha, \beta \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ tels que

$$f^{\Delta}(\alpha) \leq 0 \leq f^{\Delta}(\beta). \tag{2.3}$$

Démonstration : Comme f est delta differentiable en tout point de $[a, b]$, alors elle est continue sur $[a, b]$. Donc, il existe $\alpha, \beta \in [a, b]$ tels que

$$m = \min_{t\in[a,b]} f(t) = f(\alpha) \quad \text{and} \quad M = \max_{t\in[a,b]} f(t) = f(\beta).$$

Et comme $f(a) = f(b)$, nous supposons que $\alpha, \beta \in [a, b)$.

1. Si $\sigma(\xi_1) > \xi_1$, alors

$$f^{\Delta}(\alpha) = \frac{f(\sigma(\alpha)) - f(\alpha)}{\sigma(\alpha) - \alpha} \geq 0.$$

2. Si $\sigma(\alpha) = \alpha$, then

$$f^{\Delta}(\alpha) = \lim_{t\to\alpha} \frac{f(t) - f(\alpha)}{t - \alpha} \geq 0.$$

3. Si $\sigma(\beta) > \beta$, then

$$f^{\Delta}(\beta) = \frac{f(\sigma(\beta)) - f(\beta)}{\sigma(\beta) - \beta} \leq 0.$$

4. Si $\sigma(\beta) = \beta$, then

$$f^{\Delta}(\beta) = \lim_{t\to\beta} \frac{f(t) - f(\beta)}{t - \beta} \leq 0.$$

■

Exercice 23

Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. *Posons* $f(t) = t^2$. *Déterminer les éléments* $\alpha, \alpha \in]-4, 4[$ *tels que*

$$f^{\Delta}(\alpha) \leq 0 \leq f^{\Delta}(\beta).$$

Solution : On sait que $\sigma(t) = t + 1, \mu(t) = 1$, et que $f(-4) = f(4)(= 16)$. D'autre part,

$$f^{\Delta}(t) = \sigma(t) + t = 2t + 1$$

Donc, en appliquant le théorème 6, nous aurons

$$f^{\Delta}(\alpha) = 2\alpha + 1 \leq 0 \text{ et } f^{\Delta}(\beta) = 2\beta + 1 \geq 0$$

qui sont satisfaites pour $\beta \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $\alpha \in \{-3, -2, -1\}$.

Théorème 7 (*Théorème des valeurs intermédiaires*)

Soit f *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et delta dif- férentiable sur* $[a, b[$. *Alors il existe* $\alpha, \beta \in [a, b[$ *tel que*

$$f^{\Delta}(\alpha) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f^{\Delta}(\beta). \tag{2.4}$$

Démonstration : On définit la fonction Φ sur $[a, b]$ par

$$\Phi(t) = f(t) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a). \tag{2.5}$$

Comme f est une fonction continue sur $[a, b]$ et delta differentiable sur $[a, b[$, alors Φ est continue sur $[a, b]$ et delta differentiable sur $[a, b[$. Et l'on vérifie facilement que

$$\Phi(a) = \Phi(b)(= 0).$$

et donc il existe $\alpha, \beta \in [a, b[$, d'après le Théorème 6, tels que

$$\Phi^{\Delta}(\alpha) \leq 0 \leq \Phi^{\Delta}(\beta). \tag{2.6}$$

De (2.4) on tire

$$\Phi^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Et en remplaçant dans (2.6) on obtient

$$f^{\Delta}(\alpha) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0 \leq f^{\Delta}(\beta) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

C'est à dire,

$$f^{\Delta}(\alpha) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f^{\Delta}(\beta).$$

■

Exercice 24

Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ et la fonction f définie par

$$f(t) = e^t.$$

(a) Déterminer $f^\Delta(t)$ en fonction de t.
(b) En déduire que pour tout $t > 0$, il existe $\xi_1, \xi_2 \in]0, t[$ tels que :

$$e^{\xi_1+1} - e^{\xi_1} \leq \frac{e^t - 1}{t} \leq e^{\xi_2+1} - e^{\xi_2}. \tag{2.7}$$

Solution :
Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ et la fonction f définie par $f(t) = e^t$.
(a) Déterminons $f^\Delta(t)$ en fonction de t.
Comme $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alors $\sigma(t) = t + 1$.

Et donc

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{e^{\sigma(t)} - e^t}{\sigma(t) - t} = \frac{e^{t+1} - e^t}{1}$$

C'est à dire,

$$f^\Delta(t) = e^{t+1} - e^t$$

(b) En appliquant le résultat (**??**) pour la fonction $f = exp$ sur l'intervalle $[a, b] = [0, t]$ on obtient

$$(t - 0)f^\Delta(\xi_1) \leq f(t) - f(0) \leq (t - 0)f^\Delta(\xi_2).$$

C'est à dire,

$$t(e^{\xi_1+1} - e^{\xi_1}) \leq e^t - 1 \leq t(e^{\xi_2+1} - e^{\xi_2}).$$

D'où

$$e^{\xi_1+1} - e^{\xi_1} \leq \frac{e^t - 1}{t} \leq e^{\xi_2+1} - e^{\xi_2}.$$

Définition 11

On dit qu'une fonction $f : \mathrm{T} \to \mathbb{R}$ est croissante à droite au point $t_0 \in \mathrm{T}^\kappa$ lorsqu'elle vérifie les conditions suivantes :

(i) Si t_0 est dispersé à droite, alors $f(\sigma(t_0)) > f(t_0)$;

(ii) Si t_0 dense à droite, alors il existe un voisinage U de t_0 tel que $f(t) > f(t_0)$ pour tout $t \in U$ avec $t > t_0$.
De façon similaire , on dit que f décroissante à droite si l'on a dans (i), $f(\sigma(t_0)) < f(t_0)$ et dans (ii), $f(t) < f(t_0)$

Théorème 8

On suppose que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-differentiable en $t_0 \in \mathbb{T}^\kappa$. Si $f^\Delta(t_0) > 0$, alors f est croissante à droite. Si $f^\Delta(t_0) < 0$, alors f est décroissante à droite.

Démonstration : : Supposons que $f^\Delta(t_0) > 0$. Si t_0 est dispersé à droite, alors

$$f^\Delta(t_0) = \frac{f(\sigma(t_0)) - f(t_0)}{\sigma(t_0) - t_0}$$

et donc on obtient $f(\sigma(t_0)) > f(t_0)$. Supposons que t_0 dense à droite. alors on a

$$f^\Delta(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t_0) - f(t)}{t_0 - t}$$

et donc pour $\epsilon = f^\Delta(t_0)$ il existe un voisinage U of t_0 tel que

$$\left| \frac{f(t_0) - f(t)}{t_0 - t} - f^\Delta(t_0) \right| < \epsilon$$

pour tout $t \in U$ vérifiant $t \neq t_0$. Donc, on obtient

$$0 < \frac{f(t_0) - f(t)}{t_0 - t} < 2f^\Delta(t_0)$$

pour tout $t \in U$ with $t \neq t_0$. On déduite que $f(t) > f(t_0)$ pour tout $t \in U$ with $t > t_0$. Supposons maintenant que $f^\Delta(t_0) < 0$. Si t_0 est dispersé à droite, alors

$$f^\Delta(t_0) = \frac{f(\sigma(t_0)) - f(t_0)}{\sigma(t_0) - t_0}$$

et donc $f(\sigma(t_0)) < f(t_0)$. Si on suppose que t_0 est dense à droite. Alors

$$f^\Delta(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t_0) - f(t)}{t_0 - t}$$

et donc pour $\epsilon = -f^\Delta(t_0)$ il existe un voisinage U of t_0 vérifiant

$$\left| \frac{f(t_0) - f(t)}{t_0 - t} - f^\Delta(t_0) \right| < \epsilon$$

pour tout $t \in U$ tel que $t \neq t_0$. Donc

$$2f^\Delta(t_0) < \frac{f(t_0) - f(t)}{t_0 - t} < 0$$

pour tout $t \in U$ vérifiant $t \neq t_0$. Nous concluons que $f(t) < f(t_0)$ pour tout $t \in U$ vérifiant $t > t_0$. ■

Définition 12

$f : \mathrm{T} \to \mathbb{R}$ admet un maximum local à droite en $t_0 \in \mathbb{T}^\kappa$ lorsqu'elle vérifie :

(i) Si t_0 est dispersé à droite, alors $f(\sigma(t_0)) \leq f(t_0)$;

(ii) Si t_0 est dense à droite, alors il existe un voisinage U of t_0 tel que $f(t) \leq f(t_0)$ pour tout $t \in U$ avec $t > t_0$.

De façon similaire, on dit que f admet un minimum local si l'on a dans
(i), $f(\sigma(t_0)) \geq f(t_0)$ et dans
(ii), $f(t) \geq f(t_0)$.

Exercice 25

Soit l'échelle de temps $\mathbb{T}$ définie par $\mathbb{T} = \mathbb{N}^2 = \{n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$.
On définit les fonctions $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ données par :

$$f(t) = \frac{1}{1+2\sqrt{t}} \cdot ln\frac{(1+\sqrt{t})^2}{t} \ ,$$

et

$$g(t) = ln(t) \ , \quad \text{où} \ \ t \in \mathbb{T}.$$

1) Déterminer $\sigma(t)$ en fonction de t et en déduire la nature des points de $\mathbb{T}$.
2) Déterminer $g^\Delta(t)$ et en déduire $\int f(t)\Delta t$.

Solution :

1) Déterminons $\sigma(t)$ en fonction de t et la nature des points de $\mathbb{T}$.

$$\sigma(t) = inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = inf\{l^2,\ l^2 > n^2\ ,\ l \in \mathbb{N}\} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1.$$

Et comme $t = n^2 \Rightarrow n = \sqrt{t}$ on a alors

$$\sigma(t) = (\sqrt{t}+1)^2 = t + 2\sqrt{t} + 1 > t.$$

Donc tout point $t \in \mathbb{T}$ est dispersé à droite.
2)

$$g^\Delta(t) = \frac{g(\sigma(t)) - g(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{ln\sigma(t) - lnt}{\sqrt{\sigma(t) - t}} = \frac{ln\left(\dfrac{\sigma(t)}{t}\right)}{\sigma(t) - t} = \frac{ln\dfrac{(1+\sqrt{t})^2}{t}}{2\sqrt{t}+1},$$

C'est à dire,

$$g^\Delta(t) = \frac{1}{1+2\sqrt{t}} \cdot ln\frac{(1+\sqrt{t})^2}{t} = f(t).$$

Donc $\int f(t)\Delta t = g(t) + C^{st}$, où $C^{st} \in \mathbb{R}$.
Conclusion :

$$\int \frac{1}{1+2\sqrt{t}} \cdot ln\frac{(1+\sqrt{t})^2}{t} \Delta t = ln(t) + C^{st}.$$

2.3 Règles de Calcul

Remarque 3

Soient : $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables, alors la dérivée de $(f \circ g)$ est donnée par

$$(f \circ g)'(t) = g'(t)f'(g(t)).$$

Cette règle n'est pas valable pour toutes les échelles de temps. En effet :
Posons $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ et soient les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(t) = t^2 \text{ et } g(t) = 2t.$$

On a

$$f^{\Delta}(t) = 2t \text{ et } g^{\Delta}(t) = 2.$$

On obtient $(f \circ g)(t) = 4t^2$ et

$$\begin{aligned}(f \circ g)^{\Delta}(t) &= 4(t+1)^2 - 4t^2\\ &= 8t + 4.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}g^{\Delta}(t)f^{\Delta}(g(t)) &= 2(2(2t))\\ &= 8t.\end{aligned}$$

Conclusion : Pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ on a

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) \neq g^{\Delta}(t)f^{\Delta}(g(t)), \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Théorème 9

[23] Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continûment différentiable et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ Δ-différentiable, alors $f \circ g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable et on a

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = g^{\Delta}(t) \int_0^1 f'[g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t)]dh.$$

Exercice 26

Soient $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telles que* $g(t) = t^2$ *et* $f(t) = e^t$.
On a :

$$g^{\Delta}(t) = 2t + 1 \text{ et } f'(t) = e^t 0$$

La dérivée de la composition des deux fonctions est donnée par

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = g^{\Delta}(t) \int_0^1 f'[g(t) + h\mu(t) g^{\Delta}(t)] dh.$$

$$= g^{\Delta}(t) \int_0^1 e^{(t^2 + h(2t+1))} dh$$

$$= (2t+1) e^{(t^2)} \left[\frac{e^{(2t+1)}}{2t+1} - \frac{1}{2t+1} \right]$$

$$= e^{(t^2)} (e^{(2t+1) - 1}).$$

Chapitre 3

Calcul Integral sur les Echelles de Temps

3.1 Intégration sur les échelles de temps

Définition 13 (*Fonction réglée*)

Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est une fonction réglée (regulated function) si f admet une limite (finie) à droite en tout point dense à doite et une limite (finie) à gauche en tout point dense à gauche dans $\mathbb{T}$.

Exemple 11

On pose $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ (une échelle de temps) et

$$f(t) = \frac{t^2}{t-1}, \qquad g(t) = \frac{t}{t+1}, \quad t \in \mathbb{T}$$

On vérifie que tous les points de $\mathbb{T}$ sont dispersés à droite. Les points $t \in \mathbb{T}, \ \ t \neq 1$, sont dispersés à gauche.
Et comme $\lim\limits_{t \to 1^-} f(t) = -\infty$ (n'est pas finie) alors la fonction f n'est pas réglée.
Par contre, comme $\lim\limits_{t \to 1^-} g(t) = \dfrac{1}{2}$ (existe et est finie) alors la fonction g est réglée.

Exemple 12

Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ et la fonction

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} & \text{pour } t \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0 & \text{pour } t = 0 \end{cases}$$

Tous les points de $\mathbb{T}$ sont denses et $\lim_{t\to 0^-} f(t), \lim_{t\to 0^+} f(t) = +\infty$ (infinie). Donc la fonction f n'est pas réglée.

Exercice 27

Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ et

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{t-1} & \text{pour } t \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \\ 3 & \text{pour } t = 1 \end{cases}$$

La fonction f est elle réglée ?

Définition 14

Une fonction continue $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite pré-différentiable avec comme région de différentiation $D \subset \mathbb{T}^k$, si $\mathbb{T}^k\backslash D$ est dénombrable et ne contient aucun point isolé à droite de $\mathbb{T}$, et f est différentiable en tout $t \in D$.

Exemple 13

Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ et la fonction

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t-2} & \text{si } \mathbb{R}\backslash\{2\} \\ 0 & \text{si } t = 2 \end{cases}$$

Comme la fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ n'est pas continue en $t = 2$, alors elle n'est pas pre-differentiable.

Exemple 14

Soit l'échelle de temps $\mathrm{T} = \mathbb{N} \cup \left\{1 - \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ et posons

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \mathbb{N} \\ t & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme f n'est pas continue en $t = 1$, alors elle n'est pas pre-differentiable.

Exercice 28

Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} = \mathbb{P}_{a,b} = \bigcup_{k-0}^{\infty}[k(a+b), k(a+b)+a]$ *pour* $a > b > 0$. *Définissons la fonction* $f : \mathrm{T} \to \mathbb{R}$ *par*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \in \bigcup_{k-0}^{\infty}[k(a+b), k(a+b)+b] \\ t-(a+b)k-b & si\ t \in [(a+b)k+b, (a+b)k+a] \end{cases}$$

Vérifier que f *est pre-differentiable avec région de différentiation*

$$D = \mathbb{T}\backslash \bigcup_{k=0}^{\infty}\{(a+b)k+b\}.$$

Exercice 29

Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *et posons*

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t+1} & si\ t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\} \\ 0 & si\ t = -1 \end{cases}$$

Vérifiez si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est pré-différentiable, et si c'est le cas, trouvez la région de différenciation.*

Maintenant, nous énonçons le principal théorème d'existence de pré-primitive.

Théorème 10 (*Existence de Pré-primitive*)

Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction réglée. Alors il existe une fonction* F *pré-différentiable de région de différentiation* D *telle que*

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \forall t \in D.$$

Nous énonçons dans ce cas la définition suivante.

Définition 15

Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réglée. Une fonction F dont le théorème précédent affirme l'existence, est appelée pré-primitive de f.
Nous définissons alors l'intégrale indéfinie d'une fonction réglée f par

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C,$$

où C est une constante arbitraire et F une pré-primitive de f.
L'intégrale de Cauchy se définit alors par :

$$\int_r^s f(t)\Delta t = F(s) - F(r), \forall s, r \in \mathbb{T}.$$

Définition 16

Une fonction $F : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ si

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \forall t \in \mathbb{T}^k.$$

Théorème 11 (*Existence de Primitives*)

Toute fonction densément continue à droite admet une primitive.
En particulier si $t_0 \in \mathbb{T}$, alors F définie par

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau)\Delta t, \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}$$

est une primitive de f.

Définition 17 (*Fonction rd-continue*)

Une fonction $f :\ \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite densément continue à doite (ou plus simplement rd-continue) si elle est continue en tout point dense à droite et que sa limite à gauche en tout point dense à gauche existe.
L'ensemble de toutes les fonctions $f :\ \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ rd-continues est noté par

$$\mathrm{C}_{rd} = \mathrm{C}_{rd}(\mathbb{T}) = \mathrm{C}_{rd}(\mathbb{T},\ \mathbb{R})$$

L'ensemble des fonctions différentiables dont les dérivées sont rd-continues est noté

$$C^1_{\mathrm{rd}} = C^1_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T}) = C^1_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

Exercice 30

Soit $\mathbb{T} = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{2\} \cup \left\{2 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$. *On définit la fonction* f : $\mathbb{T} \to [0,\ 2]$ *par*

$$f(t) = \begin{cases} t & si \quad t \neq 0, \\ 0 & si \quad t = 0. \end{cases}$$

•*Les points isolés sont* 0 *et* 2.

•*La fonction* f *est continue en tout point isolé.*

•*Le point* 0 *est dense à droite. Le point* 2 *est dense à gauche. La limite à droite de* f *en* 0 *existe est égale à* $f(0)$, *donc* f *est continue en* 0.

•*La fonction* f *est discontinue en* 2 *puisque* $\lim\limits_{t \to 2} f(t) \neq f(2)$ *mais la limite à gauche de* f *existe en* 2.

Donc f *n'est pas continue, mais elle est rd-continue.*

Théorème 12

[27] Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *et* $g :\ \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, *alors les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. *Si* f *est continue sur* $\mathbb{T}$, *alors elle est rd-continue sur* $\mathbb{T}$.
2. *Si* f *est rd-continues sur* $\mathbb{T}$, *alors elle est réglée sur* $\mathbb{T}$.
3. *Si* $f :\ \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *et* $g :\ \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *sont réglées ou rd-continues, alors* $(f \circ g)$ *est aussi réglée ou rd-continue.*

Remarque 4

La fonction saut avant $\sigma :\ \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *est rd-continue.*

Définition 18

a effacer repetition Soient $\mathbb{T}$ *une échelle de temps et* $a,\ b \in \mathbb{T}$. *Si* F *est une* Δ-*primitive de* f, *alors le* Δ-*intégrale de Cauchy est défini par :*

$$\int_a^b f(t)\Delta t := F(b) - F(a).$$

Théorème 13 (*Existence de la primitive [35]*)

Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction réglée. Alors il existe une fonction* $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *qui est* Δ-*différentiable sur une région* $\mathrm{D} \subset \mathbb{T}$ *telle que :*

$$F^{\Delta}(t) = f(t),\ pour\ tout\ t \in \mathrm{D}.$$

Définition 19

Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction réglée. Toute fonction F du théorème précédent est dite Δ- primitive (ou anti-dérivée) de f. On définit la Δ-intégrale de la fonction f par :

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + c$$

où c est une constante arbitraire.

Exemple 15

Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ et posons $g(t) = t^3 + t^2$ avec $t \in \mathbb{T}$.
Déterminer $g^\Delta(t)$ et en déduire l'intégrale indéfinie $\int \left(3t^2 + 5t + 2\right) \Delta t$.

On sait que si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alors $\sigma(t) = t + 1, \quad t \in \mathbb{T}$.
Posons $f(t) = 3t^2+5t+2$, avec $t \in \mathrm{T}$. On a (voir exemples précédents sur la dérivation)

$$\begin{aligned}
g^\Delta(t) &= \left(t^3\right)^\Delta + \left(t^2\right)^\Delta \\
&= \left[(\sigma(t))^2 + t\sigma(t) + t^2\right] + [\sigma(t) + t] \\
&= \left[(t+1)^2 + t(t+1) + t^2\right] + [t + 1 + t] \\
&= (t^2 + 2t + 1 + t^2 + t + t^2) + 2t + 1 \\
&= 3t^2 + 5t + 2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\int \left(3t^2 + 5t + 2\right) \Delta t = t^3 + t^2 + c.$$

Exercice 31

Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}^*} = \{2, 2^2, 2^3, \cdots\}$ et posons, pour $t \in \mathbb{T}$, $g(t) = \sin(t)$.
Déterminer $g^\Delta(t)$ et en déduire l'expression de l'intégrale indéfinie

$$\int \left(\frac{2}{t} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right) \Delta t.$$

Démonstration : Si l'on a $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}^*} = \{2, 2^2, 2^3, \cdots\}$, on déduit facilement (voir exercice précédent) que $\sigma(t) = 2t$. Et dans ce cas

$$\begin{aligned}
g^\Delta(t) &= \frac{\sin(\sigma(t)) - \sin t}{\sigma(t) - t} \\
&= \frac{\sin(2t) - \sin t}{t} \\
&= \frac{2}{t} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{3t}{2}\right).
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\int \frac{2}{t}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{3t}{2}\Delta t = \sin t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

■

Exercice 32

Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}^3} = \{1, 3, 3^2, 3^3, \cdots\}$ *et posons* $g(t) = \sin(t)$ *avec* $t \in \mathbb{T}$. *Démontrer que*

$$\int \left(2t + 3\sqrt[3]{t^2} + 3\sqrt[3]{t} + 2\right)\Delta t = t^2 + t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Théorème 14

Toute fonction rd-continue possède une Δ*-primitive. En particulier, si* $t_0 \in \mathbb{T}$ *alors* F *définie par*

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\Delta s,\ t \in \mathbb{T}$$

est une Δ*-primitive de* f.

Exercice 33

Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z},\ h > 0$, *et* $a,\ b \in \mathbb{T}$ *avec* $a < b$, *alors*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h.$$

Théorème 15

Soit une fonction rd-continue $f :\ \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *et* $t \in \mathbb{T}$, *alors*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta s = \mu(t)f(t).$$

Nous énonçons quelques propriétés d'intégration sur les échelles de temps.

Proposition 2

Si $a,\ b,\ c \in \mathbb{T}$ *et* $f,\ g \in \mathrm{C}_{rd}(\mathbf{T})$, *alors*

1. $\displaystyle\int_a^b (f(t)+g(t))\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t.$
2. $\displaystyle\int_a^b \alpha f(t)\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t.$
3. $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t.$
4. $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t.$
5. $\displaystyle\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = f(b)g(b) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t.$
6. $\displaystyle\int_a^a f(t)\Delta t = 0.$
7. $\displaystyle\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau = \mu(t)f(t),\ t \in \mathbb{T}^k.$
8. *Si* $\mid f(t) \mid \leq g(t)$ *sur* $[a,\ b[$, *alors* $\displaystyle\mid \int_a^b f(t)\Delta t \mid \leq \int_a^b g(t)\Delta t.$
9. *Si* $f(t) \geq 0$ *pour tout* $a \leq t \leq b$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0.$

Théorème 16

.

Soient $a, b \in \mathbb{T}$. *Pour toute fonction constante* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(t) = C$ *sur* $[a,\ b]$, *on a*

$$\int_a^b C\Delta t = C(b-a).$$

Définition 20 (*Intégrales Impropres*)

Si $a \in \mathbb{T}$, $\sup \mathbb{T} = \infty$ *et* f *est rd-continu sur* $[a, \infty[$, *alors on définit l'intégrale impropre par*

$$\int_a^\infty f(t)\Delta t = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(t)\Delta t$$

pour tout $a \in \mathbb{T}$. *Si cette limite existe, on dit que cette intégrale impropre est convergente. Sinon, on dit que cette intégrale est divergente.*

Proposition 3

Supposons que $\mathbb{T}$ *une échelle de temps et* f *est une fonction continue croissante sur l'intervalle de temps* $[a, b]$. *Si* F *est l'extension de* f *à l'intervalle réel* $[a, b]$ *donné par*

$$F(s) := \begin{cases} f(s) & \text{if } s \in \mathbb{T}, \\ f(t) & \text{if } s \in (t, \sigma(t)) \notin \mathbb{T}, \end{cases}$$

alors

$$\int_a^b f(t)\Delta t \leq \int_a^b F(t)dt.$$

3.2 Quelques fonctions élémentaires

3.2.1 Le plan complexe de Hilger

Afin de définir la fonction exponentielle sur les échelles de temps nous devons d'abord définir le plan complexe de Hilger.

Définition 21

Soit h un réel strictement positif, i.e. $h > 0$.

- ***L'ensemble des nombres complexes de Hilger*** *est défini par*

$$\mathbb{C}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : z + \frac{1}{h} \neq 0 \right\}.$$

L'axe réel de Hilger *est défini par*

$$\mathbb{R}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : z + \frac{1}{h} > 0 \right\}.$$

- ***L'axe alternatif de Hilger*** *est défini par*

$$\mathcal{A}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : z + \frac{1}{h} < 0 \right\}.$$

- ***Le cercle imaginaire de Hilger*** *est défini par*

$$\mathbb{I}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z + \frac{1}{h} \right| = \frac{1}{h} \right\}.$$

- ***Convention :*** *Pour $h = 0$, on pose*

$$\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}\ ,\ \mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\ ,\ \mathcal{A}_0 = \emptyset\ ,\ \mathbb{I}_0 = \imath\mathbb{R}.$$

Définition 22

Soit h un réel strictement positif, et $z \in \mathbb{C}_h$.

- *On définit* **la partie réelle de Hilger** *du nombre complexe z par*

$$\Re e_h(z) := \frac{|hz + 1| - 1}{h}.$$

- *On définit* **la partie imaginaire de Hilger** *du nombre complexe z par*

$$\mathfrak{Im}_h(z) := \frac{Arg(hz + 1)}{h},$$

où $Arg(z)$ désigne l'argument principal (la détermination principale) du nombre complexe z, c'est à dire qui vérifie

$$-\pi < Arg(z) < \pi.$$

Remarque 5

Il est facile de voir que

$$-\frac{1}{h} < \Re e_h(z) < +\infty,$$

et

$$-\frac{\pi}{h} < \mathfrak{Im}_h(z) < \frac{\pi}{h}.$$

De plus, $\Re e_h(z) \in \mathbb{R}_h$.

Définition 23

Soit h un réel strictement positif, et supposons que $-\frac{\pi}{h} < \varpi < \frac{\pi}{h}$.

- *On définit* ***le nombre imaginaire pur de Hilger*** $\overset{\circ}{i}$ *par*

$$\overset{\circ}{i}\varpi = \frac{e^{i\varpi h} - 1}{h}$$

Proposition 4

Soit $z \in \mathbb{C}_h$. Alors

$$\overset{\circ}{i}\mathfrak{Im}_h(z) \in \mathbb{I}_h.$$

Démonstration : Nous avons $\overset{\circ}{i}\mathfrak{Im}_h(z) = \dfrac{e^{i\varpi\mathfrak{Im}_h(z)} - 1}{h}$, et donc

$$\left|\overset{\circ}{i}\mathfrak{Im}_h(z) + \frac{1}{h}\right| = \left|\frac{e^{i\varpi\mathfrak{Im}_h(z)}}{h}\right| = \frac{1}{h}.$$

■

Proposition 5

Soit $z \in \mathbb{C}_h$. Alors

$$|\overset{\circ}{i}\varpi|^2 = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\varpi h}{2}.$$

Démonstration : Nous avons

$$\overset{\circ}{i}\varpi = \frac{e^{i\varpi h} - 1}{h} = \frac{\cos(\varpi h) - 1 + i\sin(\varpi h)}{h},$$

et donc

$$\begin{aligned}
|\overset{\circ}{i}\varpi|^2 &= \left(\frac{\cos(\varpi h)-1}{h}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\varpi h)}{h}\right)^2 \\
&= \frac{\left[\cos^2(\varpi h) - 2\cos(\varpi h) + 1\right] + \sin^2(\varpi h)}{h^2} \\
&= \frac{2\left[1-\cos(\varpi h)\right]}{h^2} \\
&= \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\varpi h}{2}
\end{aligned}$$

■

Définition 24

*On définit **l'addition "cercle plus"** $\oplus$ sur $\mathbb{C}_h$ par :*

$$z \oplus \omega = z + \omega + hz\omega.$$

Lemme 1

$(\mathbb{C}_h, \oplus)$ est un groupe abélien (commutatif).

Démonstration : Soient z, ω deux éléments de $\mathbb{C}_h$, c'est à dire que $z, \omega \in \mathbb{C}_h$, et $z, \omega \neq -\frac{1}{h}$.

- Montrons que la loi $\oplus$ est interne dans $\mathbb{C}_h$. Nous avons

$$\begin{aligned}
h(z \oplus w) + 1 &= h(z + w + hzw) + 1 \\
&= 1 + hz + hw + h^2 zw \\
&= 1 + hz + hw(1 + hz) \\
&= (1 + hw)(1 + hz) \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

  Donc, la loi $\oplus$ est interne dans $\mathbb{C}_h$.
- La loi $\oplus$ est commutative, en effet, pour tous $z, w \in \mathbb{C}_h$

$$z \oplus \omega = z + \omega + hz\omega = \omega + z + h\omega z = \omega \oplus z.$$

- 0 est l'élément neutre pour la loi $\oplus$ dans $\mathbb{C}_h$. En effet

$$0 \oplus z = z + 0 + h \cdot z \cdot 0 = z.$$

- Tout élément $z \in \mathbb{C}_h$, est inversible et $-\frac{z}{1+hz}$ est son inverse. En effet

$$z \oplus \left[-\frac{z}{1+hz}\right] = z - \frac{z}{1+hz} + hz\left[-\frac{z}{1+hz}\right] = \frac{0}{1+hz} = 0.$$

  D'autre part, $-\frac{z}{1+hz} \in \mathbb{C}$. De plus

$$\left[-\frac{z}{1+hz}\right] + \frac{1}{h} = \left[\frac{1}{h(1+hz)}\right] \neq 0,$$

et donc
$$\left[-\frac{z}{1+hz}\right] \in \mathbb{C}_h.$$
On déduit que tout élément $z \in \mathbb{C}_h$, est inversible d'inverse $-\dfrac{z}{1+hz}$.

- La loi $\oplus$ est associative. En effet, pour tous $z, w, \varpi \in \mathbb{C}_h$, nous avons d'une part
$$\begin{aligned}(z \oplus w) \oplus \varpi &= (z + w + zwh) \oplus \varpi \\ &= z + w + zwh + \varpi + (z + w + zwh)\varpi h \\ &= z + w + zwh + \varpi + z\varpi h + w\varpi h + zw\varpi h^2.\end{aligned}$$

D'autre part
$$\begin{aligned}z \oplus (w \oplus \varpi) &= z + (w \oplus \varpi) + z(w \oplus \varpi)h \\ &= z + w + \varpi + w\varpi h + z(w + \varpi + w\varpi h)h \\ &= z + w + \varpi + w\varpi h + zwh + z\varpi h + zw\varpi h^2.\end{aligned}$$

Par comparaison on tire
$$(z \oplus w) \oplus \varpi = z \oplus (w \oplus \varpi).$$

C'est à dire que la loi $\oplus$ est associative. Conclusion : $(\mathbb{C}_h, \oplus)$ est un groupe abélien. ■

Exercice 34

Soit $z \in \mathbb{C}_h$. Montrer que
$$z = \Re e_h(z) \oplus \mathring{i}\,\Im\mathfrak{m}_h(z).$$

Démonstration : Nous avons
$$\begin{aligned}\Re e_h(z) \oplus \mathring{i}\,\Im\mathfrak{m}_h(z) =& \frac{|zh+1|-1}{h} \oplus \mathring{i}\,\frac{\mathrm{Arg}(zh+1)}{h} \\ =& \frac{|zh+1|-1}{h} \oplus \frac{e^{i\,\mathrm{Arg}(zh+1)}-1}{h} \\ =& \frac{|zh+1|-1}{h} + \frac{e^{i\,\mathrm{Arg}(zh+1)}-1}{h} + \frac{|zh+1|-1}{h}\cdot\frac{e^{i\,\mathrm{Arg}(zh+1)}-1}{h}h \\ =& \frac{1}{h}\Big(|zh+1| - 1 + e^{i\,\mathrm{Arg}(zh+1)} - 1 + |zh+1|e^{i\,\mathrm{Arg}(zh+1)} \\ & -|zh+1| - e^{i\,\mathrm{Arg}(zh+1)} + 1\Big) \\ =& \frac{1}{h}\Big(|zh+1|e^{i\,\mathrm{Arg}(zh+1)} - 1\Big) \\ =& \frac{1}{h}(zh+1-1) \\ =& z.\end{aligned}$$
■

Définition 25

Soient n un entier naturel non nul et $z \in \mathbb{C}_h$. On définit ***la multiplication "cercle point"*** *$\odot$ sur $\mathbb{C}_h$ par :*

$$n \odot z = z \oplus z \odot + \cdots \odot z,$$

où l'élément z figure n fois dans le membre droit de l'équation précédente.

Proposition 6

Soient n un entier naturel non nul et $z \in \mathbb{C}_h$. Alors on a

$$n \odot z = \frac{(hz+1)^n - 1}{h}.$$

Exercice 35

Démontrer que pour tout entier naturel non nul n et tout $z \in \mathbb{C}_h$, on a

$$n \odot z = \frac{(hz+1)^n - 1}{h}.$$

Démonstration : La démonstration se fait par récurrence.

- L'égalité est vraie pour $n = 1$. En effet, nous avons d'une part

$$1 \odot z = z,$$

et d'autre part

$$\frac{(hz+1)^1 - 1}{h} = \frac{(hz)^1}{h} = z.$$

- L'égalité est vraie pour $n = 1$. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} 2 \odot z =& z \oplus z \\ =& z + z + hz^2 \\ =& 2z + hz^2 \\ =& \frac{(2zh + h^2z^2)}{h} \\ =& \frac{(2zh + h^2z^2 + 1) - 1}{h} \\ =& \frac{(zh+1)^2 - 1}{h}. \end{aligned}$$

- Supposons que $n \odot z = \frac{(hz+1)^n - 1}{h}$, pour $n \geq 2$, et démontrons que

$$(n+1) \odot z = \frac{(hz+1)^{n+1} - 1}{h}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}(n+1)\odot z =&((n\odot z)\oplus z\\ =&\left[\frac{(zh+1)^n-1}{h}\right]\oplus z\\ =&\left[\frac{(zh+1)^n-1}{h}\right]+z+\left[\frac{(zh+1)^n-1}{h}\right]hz\\ =&\frac{(zh+1)^n-1+zh+(zh+1)^n zh-zh}{h}\\ =&\frac{(hz+1)^{n+1}-1}{h}.\end{aligned}$$

■

Définition 26

Soit $z\in\mathbb{C}_h$. On définit ***le "cercle moins" (ou négatif)*** $\ominus$ *de z par :*

$$\ominus z=\frac{-z}{1+hz}.$$

Exercice 36

Soit $z\in\mathbb{C}_h$. Montrer que $\ominus$ est l'inverse additif de z pour l'opération $\oplus$, c'est à dire que

$$\ominus(\ominus z)=z.$$

Démonstration : Nous avons

$$\begin{aligned}\ominus(\ominus z) =&\frac{-(\ominus z)}{1+h(\ominus z)}\\ =&\frac{-\left(\frac{-z}{1+hz}\right)}{1+h\left(\frac{-z}{1+hz}\right)}\\ =&\frac{\left(\frac{z}{1+hz}\right)}{\left(\frac{1+zh-zh}{1+hz}\right)}\\ =&z.\end{aligned}$$

■

Définition 27

Soient $z,\omega\in\mathbb{C}_h$. On définit ***la soustraction "cercle moins"*** $\ominus$ *de z par :*

$$z\ominus\omega=z\oplus(\ominus\omega).$$

Exercice 37

Soient $z, \omega \in \mathbb{C}_h$. Montrer que

$$z \ominus \omega = \frac{z - \omega}{1 + h\omega}.$$

Démonstration : Soient $z, \omega \in \mathbb{C}_h$. Nous avons

$$\begin{aligned} z \ominus \omega &= z \oplus (\ominus \omega) \\ &= z + (\ominus \omega) + hz(\ominus \omega) \\ &= z - \frac{\omega}{1 + \omega h} - \frac{hz\omega}{1 + \omega h} \\ &= \frac{z + hz\omega - \omega - hz\omega}{1 + \omega h} \\ &= \frac{z - \omega}{1 + h\omega} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$z \ominus \omega = \frac{z - \omega}{1 + h\omega}.$$

■

Exercice 38

Soit $z \in \mathbb{C}_h$, et soit $\overline{z}$ son conjugué. Montrer que $\overline{z} = \ominus z$ si et seulement si $z \in \mathbb{I}_h$.

Démonstration : Soit $z \in \mathbb{C}_h$. Nous avons, d'une part

$$\begin{aligned} \overline{z} = \ominus z &\iff \overline{z} = -\frac{z}{1 + hz} \\ &\iff \overline{z} + hz\overline{z} = -z \\ &\iff [z + \overline{z}] + h[z\overline{z}] = 0 \\ &\iff [2\Re e(z)] + h|z|^2 = 0. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{C}_h &\iff \left| z + \frac{1}{h} \right| = \frac{1}{h} \\ &\iff \left| z + \frac{1}{h} \right|^2 = \frac{1}{h^2} \\ &\iff \left(\Re\, e(z) + \frac{1}{h} \right)^2 + \mathrm{Im}^2(z) = \frac{1}{h^2} \\ &\iff \Re\, e(z)^2(z) + \frac{2}{h} \Re\, e(z) + \frac{1}{h^2} + \mathrm{Im}^2(z) = \frac{1}{h^2} \\ &\iff |z|^2 + \frac{2}{h} \Re\, e(z) = 0 \\ &\iff 2\Re e(z) + |z|^2 h = 0. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\overline{z} = \ominus z \Longleftrightarrow z \in \mathbb{I}_h.$$

■

Lemme 2

Soit h un réel strictement positif, et supposons que $-\frac{\pi}{h} < \varpi < \frac{\pi}{h}$. Alors

$$\ominus(\overset{\circ}{i\varpi}) = \overline{\overset{\circ}{i\varpi}}.$$

Démonstration : Nous avons

$$\begin{aligned}
\ominus(\overset{\circ}{i\omega}) &= -\frac{\overset{\circ}{i\omega}}{1 + (\overset{\circ}{i\omega})h} \\
&= -\frac{\frac{e^{i\omega h} - 1}{h}}{1 + \frac{e^{i\omega h} - 1}{h}h} \\
&= -\frac{e^{i\omega h} - 1}{h e^{i\omega h}} \\
&= \frac{e^{-i\omega h} - 1}{h} \\
&= \overline{\overset{\circ}{i\varpi}}.
\end{aligned}$$

■

3.3 La Fonction Exponentielle : Définition et Propriétés

Définition 28

Soit h un réel strictement positif, et supposons que $-\frac{\pi}{h} < \varpi < \frac{\pi}{h}$. On définit la bande $\mathbb{Z}_h$ par

$$\mathbb{Z}_h := \left\{ z \in \mathbb{C}; -\frac{\pi}{h} < \Im m(z) < \frac{\pi}{h} \right\},$$

et où l'on pose par convention $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{C}$.

Définition 29 (*La transformation du cylindre (ou cylindrique)*)

Soit h un réel strictement positif. On définit la transformation du cylindre (ou cylindrique) $\xi_h(z) : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$ par

$$\xi_h(z) = \frac{1}{h} Log(1 + hz),$$

où Log désigne la détermination principale du logarithme. De plus, on définit $\xi_0(z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Remarque 6

Nous appelons ξ_h la transformation cylindrique car en réunissant les lignes limitrophes $\mathrm{Im}(z) = -\frac{\pi}{h}, \mathrm{Im}(h) = \frac{\pi}{h}$ et $\mathbb{Z}_h$ nous obtenons un cylindre. Nous définissons une addition sur *$\mathbb{Z}_h$ par*

$$z + \omega := z + \omega \quad \left(\mathrm{mod}\, \frac{2\pi i}{h}\right), \text{ pour } z, \omega \in \mathbb{Z}_h.$$

Lemme 3

La transformation réciproque de ξ_h est donnée par

$$\xi_h^{-1}(z) = \frac{e^{hz} - 1}{h},$$

pour tout $z \in \mathbb{Z}_h$. Et pour $h = 0$, on a $\xi_0^{-1}(z) = z$.

Démonstration : Supposons que $h > 0$. Nous avons d'une part,

$$\begin{aligned}
\xi_h\left(\frac{1}{h}\left(e^{zh} - 1\right)\right) &= \frac{1}{h} \log\left[1 + h\left(\frac{1}{h}\left(e^{zh} - 1\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{h} \log\left(1 + e^{zh} - 1\right) \\
&= \frac{1}{h} \log\left(e^{zh}\right) \\
&= z,
\end{aligned}$$

d'autre part,

$$\begin{aligned}
\xi_h^{-1}\left(\frac{1}{h} \log(1 + zh)\right) &= \frac{1}{h}\left[\exp\left(\frac{1}{h} \log(1 + zh)h\right) - 1\right] \\
&= \frac{1}{h}\left(e^{\log(1+zh)} - 1\right) \\
&= \frac{1}{h}(1 + zh - 1) \\
&= z.
\end{aligned}$$

Ainsi, les deux transformations sont bien (réciproque) inverse l'une de l'autre. ∎

Exercice 39

La transformation cylindrique ξ_h est un groupe d'homomorphisme de $(\mathbb{C}_h, \oplus)$ vers $(\mathbb{Z}_h, +)$.

Solution : Soient $h > 0$ et $z, \omega \in \mathbb{C}_h$.

$$\begin{aligned}
\xi_h(z \oplus w) &= \frac{1}{h}\log(1 + (z \oplus w)h) \\
&= \frac{1}{h}\log\left(1 + zh + wh + zwh^2\right) \\
&= \frac{1}{h}\log[(1 + zh)(1 + wh)] \\
&= \frac{1}{h}\log(1 + zh) + \frac{1}{h}\log(1 + wh) \\
&= \xi_h(z) + \xi_h(w)
\end{aligned}$$

N.B. : Le cas $h = 0$ est trivial.

Définition 30

On dit qu'une fonction $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est régressive si

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0 \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

L'ensemble de toutes les fonctions régressives et rd-continues $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, est noté par :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T}) = \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

La fonction p est dite positivement régressive si $1 + \mu(t)p(t) > 0 \quad$ pour tout $t \in \mathbb{T}^k$. L'ensemble des fonctions positivement régressives et rd-continues $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, est noté par :

$$\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^+(\mathbb{T}) = \mathcal{R}^+(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Proposition 7

L'ensemble $\mathcal{R}$ muni de l'addition $\oplus$ définie par

$$(p \oplus q)(t) = p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t), \ \textit{pour tous } t \in \mathbb{T}^k, p, q \in \mathcal{R}$$

est un groupe abélien. On l'appelle ***le groupe régressif.***

Démonstration : Soient $p, q, r \in \mathcal{R}$, et $t \in \mathbb{T}$. Alors on a :

1) $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ et $1 + \mu(t)q(t) \neq 0$. Donc,

$$\begin{aligned}\frac{1+\mu(t)(p \oplus q)(t)}{1+\mu(t)p(t)} &= \frac{1+\mu(t)[p(t)+q(t)+\mu(t)p(t)q(t)]}{1+\mu(t)p(t)} \\ &= \frac{1+\mu(t)p(t)+\mu(t)q(t)[1+\mu(t)p(t)]}{1+\mu(t)p(t)} \\ &= 1+\mu(t)q(t) \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

Donc $p \oplus q \in \mathcal{R}$, d'où $\oplus$ est une loi interne sur $\mathcal{R}$.

2)

$$\begin{aligned}[(p \oplus q) \oplus r](t) =&(p \oplus q)(t) + r(t) + \mu(t)(p \oplus q)(t)r(t) \\ =&p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t) + r(t) \\ &+ \mu(t)[p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t)]r(t) \\ =&p(t) + [q(t) + r(t) + \mu(t)q(t)r(t)] \\ &+ \mu(t)p(t)[q(t) + r(t) + \mu(t)q(t)r(t)] \\ =&p(t) + [q \oplus r](t) + \mu(t)p(t)[q \oplus r](t) \\ =&[p \oplus (q \oplus r)](t).\end{aligned}$$

Donc, $\oplus$ est une loi associative.

3) $(p \oplus q)(t) = p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t) = q(t) + p(t) + \mu(t)q(t)p(t) = (q \oplus p)(t)$. Donc $\oplus$ est commutative.

4) Il est facile de vérifier que la fonction nulle est régressive et est l'élément neutre pour la loi $\oplus$.

5) $(p \oplus q)(t) = 0 \Leftrightarrow p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t) = 0 \Leftrightarrow q(t) = \frac{-p(t)}{1\mu(t)p(t)}$. Donc le symétrique de $p \in \mathcal{R}$ noté $\ominus p$ est la fonction définie par

$$(\ominus p)(t) = -\frac{p(t)}{1+\mu(t)p(t)}.$$

Conclusion : $(\mathcal{R}, \oplus)$ est un groupe abélien. ■

Définition 31

pour $f \in \mathcal{R}$, nous définissons

$$(\ominus f)(t) = -\frac{f(t)}{1+\mu(t)f(t)} \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^{\kappa}$$

Exercice 40

Soit $f \in \mathcal{R}$. Démontrer que $(\ominus f)(t) \in \mathcal{R}$, pour tout $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$.

Définition 32

On définit ***la soustraction "cercle moins"*** $\ominus$ *sur* $\mathcal{R}$*, comme suit*

$$(f \ominus g)(t) = (f \oplus (\ominus g))(t) \quad \text{for all} \quad t \in \mathbb{T}^{\kappa}$$

Remarque 7

Soient $f, g \in \mathcal{R}$*. Nous avons*

$$\begin{aligned} f \ominus g &= f \oplus (\ominus g) \\ &= f \oplus \left(-\frac{g}{1+\mu g}\right) \\ &= f - \frac{g}{1+\mu g} - \frac{\mu f g}{1+\mu g} \\ &= \frac{f-g}{1+\mu g} \end{aligned}$$

Proposition 8

Si $f, g \in \mathcal{R}$*, alors*

(1) $f \ominus f = 0$.

(2) $\Theta(\ominus f) = f$.

(3) $f \ominus g \in \mathcal{R}$.

(4) $\ominus(f \ominus g) = g \ominus f$.

(5) $\ominus(f \oplus g) = (\ominus f) \oplus (\ominus g)$.

(6) $f \oplus \frac{g}{1+\mu f} = f + g$.

Démonstration : 1.

$$\begin{aligned} f \ominus f &= f \oplus (\ominus f) \\ &= f \oplus \left(-\frac{f}{1+\mu f}\right) \\ &= f - \frac{f}{1+\mu f} - \frac{f^2\mu}{1+\mu f} \\ &= \frac{f + \mu f^2 - f - \mu f^2}{1+\mu f} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\theta(\ominus f) &= \ominus\left(-\frac{f}{1+\mu f}\right)\\ &= \frac{\frac{f}{1+\mu f}}{1-\frac{\mu f}{1+\mu f}}\\ &= f\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}1+\mu(f\ominus g) &= 1+\frac{\mu f-\mu g}{1+\mu g}\\ &= \frac{1+\mu f}{1+\mu g}\neq 0.\end{aligned}$$

Notons que $\frac{f-g}{1+\mu g}$ est rd-continue. Donc $f\ominus g\in\mathcal{R}$. 4.

$$\begin{aligned}\ominus(f\ominus g) &= \ominus\left(\frac{f-g}{1+\mu g}\right)\\ &= -\frac{\frac{f-g}{+\mu g}}{1+\mu\frac{f-2}{1+\mu g}}\\ &= -\frac{f-g}{1+\mu f}\\ &= \frac{g-f}{1+\mu f}\\ &= g\ominus f.\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\ominus(f\oplus g) &= \ominus(f+g+\mu fg)\\ &= -\frac{f+g+\mu fg}{1+\mu f+\mu g+\mu^2 fg}\\ &= -\frac{f+g+\mu fg}{(1+\mu f)(1+\mu g)}\\ \ominus f &= -\frac{f}{1+\mu f}\\ &= -\frac{f+g+\mu fg}{(1+\mu f)(1+\mu g)}\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}f\oplus\frac{g}{1+\mu f} &= f+\frac{g}{1+\mu f}+\frac{\mu fg}{1+\mu f}\\ &= f+g\end{aligned}$$

■

Définition 33 (*La Fonction Exponentielle Généralisée*)

Soit $p \in \mathcal{R}$. On définit la fonction exponentielle généralisée $e_p(.,.)$ par :

$$e_p(t,s) := e^{\int_s^t \xi_{\mu(\mathbb{T})}(p(\tau))\Delta\tau} = exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right)$$

pour $s,t \in \mathbb{T}$ où $\xi_h(z)$ est la transformation cylindrique donnée par

$$\xi_h(z) := \begin{cases} \dfrac{log(1+hz)}{h} & si\ h \neq 0 \\ z & si\ h = 0 \end{cases}$$

Remarque 8

En utilisant la définition de la transformation cylindrique, nous avons

$$e_p(t,s) = e^{\displaystyle\int_s^t \frac{1}{\mu(\tau)} \log(1+\mu(\tau)p(\tau))\Delta\tau} \quad pour\ s,t \in \mathbb{T}$$

Proposition 9 (*Propriété de semi-groupe*)

Soit $p \in \mathcal{R}$. Alors la propriété de semi-groupe : pour tous $r,s,t \in \mathbb{T}$,

$$e_p(t,r)e_p(r,s) = e_p(t,s).$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} e_p(t,r)e_p(r,s) &= \exp\left(\int_r^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) \exp\left(\int_s^r \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) \\ &= \exp\left(\int_r^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau + \int_s^r \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) \\ &= \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) \\ &= e_p(t,s). \end{aligned}$$

■

Lemme 4

Soient $p,q \in \mathcal{R}^+(\mathbb{T},\mathbb{R})$. Alors

(i) $e_p(t,s) > 0$, pour tous $t,s \in \mathbb{T}$.

(i) $\Theta(\ominus f) = f$.

(ii) Si pour $p(t) \leq q(t)$, pour tous $t,s \in \mathbb{T}$ tels que $t \geq s$, alors $e_p(t,s) \leq e_q(t,s)$.

Démonstration : (i) Comme pour tout $t \in \mathbb{T}^k, 1+\mu(t)p(t) > 0$, nous avons $\log(1 + \mu(t)p(t)) \in \mathbb{R}$ et par conséquent $\xi_{\mu(t)}(p(t)) \in \mathbb{R}$. D'où, d'après définition de la fonction exponentielle généralisée, $e_p(t,s) > 0$ pour tous $t, s \in \mathbb{T}$.
(ii) Soient $t, s \in \mathbb{T}$, avec $t \geq s$. Comme $p(t) \leq q(t)$, nous avons

$$0 < 1 + \mu(t)p(t) \leq 1 + \mu(t)q(t).$$

On déduit que

$$\log(1 + \mu(t)p(t)) \leq \log(1 + \mu(t)q(t))$$

Ce qui permet de conclure que $e_p(t,s) \leq e_q(t,s)$. ∎

Définition 34

Si $p \in \mathcal{R}$, alors l'equation dynamique linéaire de premier ordre

$$y^{\Delta} = p(t)y$$

est dite régressive.

Proposition 10

On suppose que l'équation $y^{\Delta} = p(t)y$ est régressive et on fixe $t_0 \in \mathbb{T}$. Alors $e_p(\cdot, t_0)$ est l'unique solution du problème avec donnée initiale

$$y^{\Delta} = p(t)y, \quad y(t_0) = 1$$

sur $\mathbb{T}$.

Exercice 41

Soit $f \in \mathcal{R}$. Démontrer que

$$e_0(t,s) = 1 \quad \text{et} \quad e_f(t,t) = 1$$

Proposition 11

Soient $p \in \mathcal{R}$ et $t_0 \in \mathbb{T}$ un élément fixé. Alors

$$e_p^{\Delta}(t, t_0) = p(t)e_p(t, t_0)$$

Démonstration : 1. Supposons que $\sigma(t) > t$. Alors

$$
\begin{aligned}
e_p^{\Delta}(t, t_0) &= \frac{e_p(\sigma(t), t_0) - e_p(t, t_0)}{\mu(t)} \\
&= \frac{e^{\int_{t_0}^{o(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau} - e^{\int_{t_0}^{t} \xi\mu(\tau)(p(\tau))\Delta\tau}}{\mu(t)} \\
&= \frac{e^{\int_{t_0}^{t} \xi\mu(\tau)(p(\tau))\Delta\tau} + e^{\int_{t}^{\sigma(t)} \xi\mu(t)(p(\tau))\Delta\tau} - e^{\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau}}{\mu(t)} \\
&= \frac{e^{\int_{t_0}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)(p(\tau))\Delta\tau}} - 1}{\mu(t)} e^{\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau} \\
&= \frac{e^{\mu(t)\xi_{\mu(t)}(p(t))} - 1}{\mu(t)} e_p(t, t_0) \\
&= p(t) e_p(t, t_0).
\end{aligned}
$$

2. Si $\sigma(t) = t$, Alors on peut écrire

$$
\begin{aligned}
&|e_p(t, t_0) - e_p(s, t_0) - p(t)e_p(t, t_0)(t - s)| \\
&= |e_p(t, t_0) - e_p(t, t_0)\, e_p(s, t) - p(t)e_p(t, t_0)(t - s)| \\
&= |e_p(t, t_0)|\,|1 - e_p(s, t) - p(t)(t - s)| \\
&= |e_p(t, t_0)| \left|1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - e_p(s, t) + \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - p(t)(t - s)\right| \\
&\leq |e_p(t, t_0)| \left(\left|1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - e_p(s, t)\right|\right. \\
&+ \left.\left|\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - p(t)(t - s)\right|\right) \\
&\leq |e_p(t, t_0)| \left(\left|1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - e_p(s, t)\right|\right. \\
&+ \left.\left|\int_s^t \left(\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))\right)\Delta\tau\right|\right).
\end{aligned}
$$

Et comme $\sigma(t) = t$ et $p \in C_{rd}$, alors on déduit que

$$\lim_{r \to t} \xi_{\mu(r)}(p(r)) = \xi_0(p(t))$$

Alors il existe un voisinage U_1 de p tel que

$$\left|\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))\right| < \frac{\varepsilon}{3\,|e_p(t, t_0)|} \quad \text{for all} \quad \tau \in U_1$$

Soit $s \in U_1$. Alors on a

$$|e_p(t, t_0)| \left|\int_s^t \left(\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))\right)\Delta\tau\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}|t - s|$$

Et comme

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-z-e^{-z}}{z}=0,$$

donc, il existe un voisinage U_2 of t tel que si $s\in U_2$, on a

$$\left|\frac{1-\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau-e_p(s,t)}{\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau}\right|<\varepsilon^*$$

où

$$\varepsilon^*=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{1+3\,|p(t)||e_p\,(t,t_0)|}\right\}.$$

Soit $s\in U=U_1\cap U_2$. Alors

$$\begin{aligned}
&|e_p\,(t,t_0)|\left|1-\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau-e_p(s,t)\right|\\
&=|e_p\,(t,t_0)|\,\frac{\left|1-\displaystyle\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau-e_p(s,t)\right|}{\left|\displaystyle\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right|}\left|\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right|\\
&\le |e_p\,(t,t_0)|\,\varepsilon^*\left|\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right|\\
&\le |e_p\,(t,t_0)|\,\varepsilon^*\left\{\left|\int_s^t \left(\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))-\xi_0(p(t))\right)\Delta\tau\right|+|p(t)||t-s|\right\}\\
&\le |e_p\,(t,t_0)|\left|\int_s^t \left(\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))-\xi_0(p(t))\right)\Delta\tau\right|+|e_p\,(t,t_0)|\,\varepsilon^*|p(t)||t-s|\\
&\le \frac{\varepsilon}{3}|t-s|+\frac{\varepsilon}{3}|t-s|\\
&=\frac{2\varepsilon}{3}|t-s|
\end{aligned}$$

On peut enfin, en déduire que

$$\begin{aligned}
|e_p\,(t,t_0)-e_p\,(s,t_0)-p(t)e_f\,(t,t_0)\,(t-s)|&<\frac{\varepsilon}{3}|t-s|+\frac{\varepsilon}{3}|t-s|+\frac{\varepsilon}{3}|t-s|\\
&=\varepsilon|t-s|.
\end{aligned}$$

■

Théorème 17

Soient $p, q : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ deux fonctions régressives, alors

(i) $e_0(t,s) \equiv 1$ *et* $e_p(t,t) \equiv 1$;

(ii) $e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t,s)$;

(iii) $\dfrac{1}{e_p(t,s)} = e_{\ominus p}(t,s)$;

(iv) $e_p(t,s) = \dfrac{1}{e_p(s,t)} = e_{\ominus p}(s,t)$;

(v) $e_p(t,s)e_p(s,r) = e_p(t,r)$;

(vi) $e_p(t,s)e_q(t,s) = e_p(t,s) = e_{p\oplus q}(t,s)$;

(vii) $\dfrac{e_p(t,s)}{e_q(t,s)} = e_{p\ominus q}(t,s)$;

(viii) $\left(\dfrac{1}{e_p(.,s)}\right)^{\Delta} = -\dfrac{p(t)}{e_p^{\sigma}(.,s)}$

3.4 Fonctions Hyperboliques et Trigonométriques

Définition 35 (*Fonctions hyperboliques* cosh *et* sinh)

Si $f \in C_{rd}$ et $-\mu f^2 \in \mathcal{R}$, alors nous définissons les fonctions hyperboliques cosh *et* sinh *par*

$$\cosh_f = \frac{e_f + e_{-f}}{2} \quad et \quad \sinh_f = \frac{e_f - e_{-f}}{2}.$$

Théorème 18

Soit $f \in \mathcal{R}$ et $-\mu f^2 \in \mathcal{R}$, alors nous avons :

1. $\cosh_f^{\Delta} = f \sinh_f$
2. $\sinh_f^{\Delta} = f \cosh_f$
3. $\cosh_f^2 - \sinh_f^2 = e_{-\mu f^2}$

Démonstration : 1. Nous avons

$$\begin{aligned}\cosh_f^{\Delta} &= \left(\frac{e_f + e_{-f}}{2}\right)^{\Delta} \\ &= \frac{fe_f - fe_{-f}}{2} \\ &= f \sinh_f .\end{aligned}$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned}
\sinh_f^\Delta &= \left(\frac{e_f - e_{-f}}{2}\right)^\Delta \\
&= \frac{fe_f + fe_{-f}}{2} \\
&= f\cosh_f .
\end{aligned}$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned}
\cosh_f^2 - \sinh_f^2 &= \left(\frac{e_f + e_{-f}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e_f - e_{-f}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e_f^2 + 2e_f e_{-f} + e_{-f}^2}{4} - \frac{e_f^2 - 2e_{fe} - f + e_{-f}^2}{4} \\
&= e_f e_{-f} \\
&= e_{f\oplus(-f)} \\
&= e_{-\mu f^2}.
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Chapitre 4

Dérivée Fractionnaire de Riemann-Liouville sur des Echelles de Temps

Introduction

Nous exposons dans ce chapitre le concept de dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville sur des échelles de temps. Nous présentons également, avec démonstration, quelques propriétés fondamentales de ce nouveau concept de dérivée. Et comme exemple d'application, nous étudions un problème de Cauchy sur une échelle de temps. La plupart des définitions et propriétés de ce chapitre sont tirées de l'article [21].

Définition 36 (*La Fonction Gamma*)

On définit la fonction Gamma Γ d'Euler par l'intégrale impropre convergente suivante :

$$\Gamma(t) := \int_0^{\infty} x^{t-1}e^{-x}dx \quad t > 0.$$

Définition 37 (*La Fonction Bêta*)

La fonction Bêta, appelée aussi intégrale d'Euler de premier type, est la fonction spéciale définie par :

$$\mathrm{B}(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Remarque 9

- *La fonction Gamma d'Euler satisfait l'équation fonctionnelle :*

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t).$$

- *La fonction Bêta vérifie :*

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Définition 38 (*Intégrale fractionnaire sur les échelles de temps*)

Soient $\mathbb{T}$ une échelle de temps, $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{T}$, h une fonction intégrable sur $[a,b]$, et $0 < \alpha < 1$. Alors l'intégrale fractionnaire (à gauche) d'ordre α de h est définie par

$${}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{\alpha} h(t) := \int_{a}^{t} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s)\Delta s,$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler.

Définition 39 (*Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville sur les E. T.*)

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, $t \in \mathbb{T}$, $0 < \alpha < 1$ et $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. La dérivée fractionnaire (à gauche) de Riemann–Liouville d'ordre α de h est définie par

$${}_{a}^{\mathbb{T}}D_{t}^{\alpha} h(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_{a}^{t} (t-s)^{-\alpha} h(s)\Delta s \right)^{\Delta}. \tag{4.1}$$

Remarque 10

La définition de la dérivée fractionnaire peut être généralisée à tout réel α positif. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+} \setminus \mathbb{N}$. Il existe $\beta \in]0,1[$ tel que $\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + \beta$, où $\lfloor \alpha \rfloor$ est la partie entière de α, et nous pouvons définir

$${}_{a}^{\mathbb{T}}D_{t}^{\alpha} h := {}_{a}^{\mathbb{T}}D_{t}^{\beta} h^{\Delta^{\lfloor \alpha \rfloor}}.$$

Nous allons définir les opérateurs fractionnaires d'ordre négatif ($\alpha < 0$.)

Définition 40

*Si $-1 < \alpha < 0$, alors la dérivée fractionnaire de Riemann–Liouville (**R.L.**) d'ordre α est l'intégrale fractionnaire d'ordre $-\alpha$, c'est à dire,*

$$ {}_{a}^{\mathbb{T}}D_{t}^{\alpha} := {}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{-\alpha}. $$

Définition 41

Si $-1 < \alpha < 0$, alors l'intégrale fractionnaire d'ordre α est la dérivée fractionnaire d'ordre $-\alpha$, c'est à dire

$$ {}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{\alpha} := {}_{a}^{\mathbb{T}}D_{t}^{-\alpha}. $$

4.1 Propriétés Fondamentales :

Dans cette section, nous présentons avec démonstrations quelques propriétés fondamentales sur les opérateurs fractionnaires.

Proposition 12

Soient $\mathbb{T}$ une échelle de temps avec la Δ-dérivée, et $0 < \alpha < 1$. Alors on a

$$ {}_{a}^{\mathbb{T}}D_{t}^{\alpha} = \Delta \circ {}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{1-\alpha}. $$

Démonstration : Soit $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. De (4.1) on déduit

$$ \begin{aligned} {}_{a}^{\mathbb{T}}D_{t}^{\alpha}h(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_{a}^{t} (t-s)^{-\alpha} h(s) \Delta s \right)^{\Delta} \\ &= \left({}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{1-\alpha} h(t) \right)^{\Delta} \\ &= \left(\Delta \circ {}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{1-\alpha} \right) h(t). \end{aligned} $$

■

Proposition 13

Pour toute fonction h intégrable sur $[a, b]$, la Δ-intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville vérifie la propriété de semi-groupe :

$$ {}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{\alpha} \circ {}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{\beta} = {}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{\alpha+\beta}, \ \textit{pour} \ \ \alpha > 0 \ \ \textit{et} \ \ \beta > 0. $$

Démonstration : Nous avons

$$\begin{aligned}
\left({}_a^TI_t^\alpha \circ {}_a^TI_t^\beta\right)(h(t)) &= {}_a^TI_t^\alpha\left({}_a^TI_t^\beta(h(t))\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\left({}_a^TI_t^\beta(h(s))\right)\Delta s\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\left((t-s)^{\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^s (s-u)^{\beta-1}h(u)\Delta u\right)\Delta s\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^s (t-s)^{\alpha-1}(s-u)^{\beta-1}h(u)\Delta u\Delta s\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\Big[\int_a^s (t-s)^{\alpha-1}(s-u)^{\beta-1}h(u)\Delta u\\
&+\int_s^t (t-s)^{\alpha-1}(s-u)^{\beta-1}h(u)\Delta\Big]\Delta s\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\left[\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-u)^{\beta-1}h(u)\Delta u\right]\Delta s. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

En utilisant le Théorème de Fubini, obtenons

$$\begin{aligned}
\left({}_a^TI_t^\alpha \circ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^\beta\right)(h(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\left[\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-u)^{\beta-1}h(u)\Delta s\right]\Delta u\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\left[\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-u)^{\beta-1}\Delta s\right]h(u)\Delta u\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\left[\int_u^t (t-s)^{\alpha-1}(s-u)^{\beta-1}\Delta s\right]h(u)\Delta u.
\end{aligned}$$

Si l'on pose $s = u + r(t-u)$, $r \in \mathbb{R}$, alors nous aurons

$$\begin{aligned}
\left({}_a^TI_t^\alpha \circ {}_a^TI_t^\beta\right)(h(t)) \quad &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\left[\int_0^1 (1-r)^{\alpha-1}(t-u)^{\alpha-1}r^{\beta-1}(t-u)^{\beta-1}(t-u)dr\right]h(u)\Delta u\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-r)^{\alpha-1}r^{\beta-1}dr\int_a^t (t-u)^{\alpha+\beta-1}h(u)\Delta u\\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-u)^{\alpha+\beta-1}h(u)\Delta u\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-u)^{\alpha+\beta-1}h(u)\Delta u\\
&= I_t^{\alpha+\beta}h(t).
\end{aligned}$$

Proposition 14

Pour toute fonction h intégrable sur $[a,b]$ on a

$${}_a^{\mathbb{T}}D_t^\alpha \circ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^\alpha h = h.$$

Démonstration : D'après les Propositions (12) et (13), On a

$$ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} h(t) = \left[{}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} \left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}(h(t)) \right) \right]^{\Delta} = \left[{}_a^{\mathbb{T}}I_t h(t) \right]^{\Delta} = h(t). \qquad \blacksquare $$

Proposition 15

Pour $0 < \alpha < 1$, on a

$$ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{-\alpha} = Id, $$

et

$$ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{-\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} = Id, $$

où Id est l'opérateur d'identité.

Démonstration : De la définition (4) et la Proposition (14), on a

$$ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{-\alpha} = {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} = Id. $$

De la Definition (40) et la Proposition (14), on a

$$ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{-\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} = {}_a^{\mathbf{T}}D_t^{\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} = Id. \qquad \blacksquare $$

Définition 42

Soient $\alpha > 0$ et ${}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}([a,b])$ l'espace des fonctions Δ-intégrables au sens de Riemann-Liouville (d'ordre fractionnaire α) de certaines fonction $\mathcal{C}([a,b])$.

Théorème 19

Soientt $f \in \mathcal{C}([a,b])$ et $\alpha > 0$. Pour que $f \in {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}([a,b])$, il faut et il suffit que

$$ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} f \in C^1([a,b]) \tag{4.2} $$

et

$$ \left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} f(t) \right)\Big|_{t=a} = 0. \tag{4.3} $$

Démonstration : Supposons que $f \in {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}([a,b])$, $f(t) = {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} g(t)$ pour certaine $g \in \mathcal{C}([a,b])$, et

$$ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}(f(t)) = {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} \left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} g(t) \right). $$

De la proposition (13), on a

$$ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}(f(t)) = {}_a^{\mathbb{T}}I_t g(t) = \int_a^t g(s)\Delta s. $$

Donc, ${}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} f \in \mathcal{C}([a,b])$ et

$$ \left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} f(t) \right)\Big|_{t=a} = \int_a^t g(s)\Delta s = 0. $$

Réciproquement, supposons que $f \in \mathcal{C}([a,b])$ satisfait (4.2) et (4.3). Alors, par la formule de Taylor appliquée á la fonction ${}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}f$, on a

$$ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}f(t) = \int_a^t \frac{\Delta}{\Delta s}{}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}f(s)\Delta s, \quad \forall t \in [a,b]. $$

Soit $\varphi(t) := \dfrac{\Delta}{\Delta s}{}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}f(t)$. On a $\varphi \in \mathcal{C}([a,b])$ par (4.2).
Maintenant, de la proposition (13), on obtient

$$ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}(f(t)) = {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1}\varphi(t) = {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}\left[{}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}(\varphi(t))\right] $$

Et ainsi

$$ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}(f(t)) - {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}\left[{}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}(\varphi(t))\right] \equiv 0. $$

Alors :

$$ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}\left[f - {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}(\varphi(t))\right] \equiv 0. $$

De l'unicité de la solution à l'équation intégrale d'Abel , on déduit que $f - {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}\varphi \equiv 0$.
Ainsi,

$$ f = {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}\varphi $$

et

$$ f \in {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}[a,b]. $$

■

Théorème 20

Soient $\alpha > 0$ et la fonction $f \in \mathcal{C}([a,b])$ satisfaisant les conditions du théorème (19). Alors :

$$ \left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha}\right)(f) = f. $$

Démonstration : Du théorème (19) et la proposition (14), on a :

$$ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} f(t) = {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha}\left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}\varphi(t)\right) = {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}\varphi(t) = f(t). $$

■

4.2 Etude d'un Problème de Cauchy sur les E.T. : Existence de Solutions

Considérons le problème à valeur initiale (P.V.I.) :

$$ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a,b] := \mathcal{J} \subseteq \mathbb{T}, \; a < b, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{4.4} $$

$$ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} y(a) = 0, \tag{4.5}$$

où ${}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α définie sur l'échelle de temps $\mathbb{T}$, ${}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}$ est l'intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre $1-\alpha$ définie sur $\mathbb{T}$, et $f : \mathcal{J} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et dense-droite.

Dans cette section, nous prouvons l'existence des solutions du problème de Cauchy (4.4)-(4.5) d'ordre fractionnaire défini sur une échelle de temps. Pour cela, soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps et $\mathcal{J} = [a, b] \subset \mathbb{T}$. Alors la fonction $y \in \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ est une solution du problème (4.4)-(4.5) si

$$ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} y(t) = f(t, y) \text{ on } \mathcal{J}, $$
$$ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} y(a) = 0. $$

Pour établir cette solution, nous devons prouver le lemme et le théorème suivants.

Lemme 5

Soient $0 < \alpha < 1$, $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{T}$, et $f : \mathcal{J} \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}$. Une fonction y est solution de problème (4.4)-(4.5) si et seulement si elle est solution de l'équation intégrale suivante :

$$ y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s $$

Démonstration : Du théorème (20), ${}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} \circ \left({}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha}(y(t))\right) = y(t)$. De (4.1) on a

$$ y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s. $$

■

Notre première approche est basée sur le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 21

Supposons que $\mathcal{J} = [a, b] \subseteq \mathbb{T}$.
(H_1) $f : \mathcal{J} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est rd-continue.
(H_2) Il existe $M > 0$ avec $|f(t, y)| \leq M$ pour tous $t \in \mathcal{J}, y \in \mathbb{R}$.
(H_3) Il existe $\ell > 0$ tel que pour tout $t \in \mathcal{J}$ et tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$ \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \ell \|x - y\|. $$

Si

$$ \frac{\ell (b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} < 1 \tag{4.6}$$

alors le problème (4.4)-(4.5) admet une solution unique sur $\mathcal{J}$.

Démonstration : Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions rd-continues sur $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{T}$. Pour $y \in \mathcal{S}$, on définit

$$|y| = \sup_{t \in \mathcal{J}} |y(t)|.$$

L'espace $\mathcal{S}$ est un espace de Banach muni de cette norme. On définit le sous-ensemble $\mathcal{S}(\rho)$ et l'opérateur T par

$$\mathcal{S}(\rho) = \{X \in \mathcal{S} : \|X_s\| \leq \rho\}$$

et

$$\mathrm{T}(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s.$$

Alors

$$|\mathrm{T}(y(t))| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} M \Delta s \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \Delta s.$$

Comme $(t-s)^{\alpha-1}$ est une fonction monotone croissante, on peut écrire, en utilisant la proposition (14),

$$\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \Delta s \leq \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds.$$

Par conséquent,

$$|\mathrm{T}(y(t))| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha} = \frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = \rho.$$

En posant $\rho = \dfrac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$, nous pouvons conclure que T est un opérateur de $\mathcal{S}(\rho)$ dans $\mathcal{S}(\rho)$. De plus, pour $x, y \in \mathcal{S}(\rho)$ on a

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{T}(x) - \mathrm{T}(y)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| \Delta s \\
&\leq \frac{\ell \| \|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \Delta s \\
&\leq \frac{\ell \| \|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{\ell \|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha} \\
&= \frac{\ell (b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|x-y\|_\infty
\end{aligned}$$

Alors, d'après (4.6) l'opérateur T est une contraction. On conclut par le théorème de Banach que le problème admet une solution unique. ■

Notre deuxième approche est basée sur le théorème du point fixe de Schauder pour prouver que l'opérateur T défini par (4.1) admet un point fixe.

Démonstration : La preuve est donnée en plusieurs étapes :

Étape 1 : T est continu.

Soit y_n une suite telle que $y_n \to y$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{J},\mathbb{R})$. Alors, pour chaque $t \in \mathcal{J}$,

$$\begin{aligned}
&|T(y_n)(t) - T(y)(t)| \\
&\quad \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \left| f(s, y_n(s)) - f(s, y(s)) \right| \Delta s \\
&\quad \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \sup_{s\in\mathcal{J}} \left| f(s, y_n(s)) - f(s, y(s)) \right| \Delta s \\
&\quad \leq \frac{\|f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \Delta s \\
&\quad \leq \frac{\|f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} ds \\
&\quad \leq \frac{\|f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \frac{a^\alpha}{\alpha} \\
&\quad \leq \frac{a^\alpha \|f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot))\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Puisque f est une fonction continue, nous avons

$$|T(y_n)(t) - T(y)(t)|_\infty \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot))\|_\infty \to 0 \ \text{ quand } n \to \infty.$$

Étape 2 : l'opérateur T transforme tout ensemble borné en un ensemble borné dans $\mathcal{C}(\mathcal{J},\mathbb{R})$. En effet, il suffit de montrer que pour tout ρ il existe une constante positive l telle que, pour chaque

$$y \in B_\rho = \{y \in \mathcal{C}(\mathcal{J},\mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq \rho\},$$

nous avons $\|\mathrm{T}(y)\|_\infty \leq l$. Par hypothèse, pour chaque $t \in \mathcal{J}$ nous avons

$$\begin{aligned}
|\mathrm{T}(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \Delta s \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \Delta s \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{M(b-a)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = l.
\end{aligned}$$

Étape 3 : l'opérateur T transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinu de $\mathcal{C}(\mathcal{J},\mathbb{R})$.

Soient $t_1, t_2 \in \mathcal{J}, t_1 < t_2$, B_ρ un ensemble borné de $\mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ comme dans l'étape 2, et $y\ dansB_\rho$. Alors

$$\begin{aligned}
&|T(y)(t_2) - T(y)(t_1)| \\
&\qquad \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s - \int_{t_0}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s \right| \\
&\qquad \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big| \int_{t_0}^{t_1} ((t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1} + (t_2 - s)^{\alpha-1}) f(s, y(s)) \Delta s \\
&\qquad \qquad \qquad \qquad - \int_{t_0}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s \Big| \\
&\qquad \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_{t_0}^{t_1} ((t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}) \Delta s + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} \Delta s \right| \\
&\qquad \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_{t_0}^{t_1} ((t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds \right| \\
&\qquad \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} [(t_2 - t_1)^\alpha + (t_1 - t_0)^\alpha - (t_2 - t_0)^\alpha] + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha \\
&\qquad = \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} [(t_1 - t_0)^\alpha - (t_2 - t_0)^\alpha].
\end{aligned}$$

Comme $t_1 \to t_2$, alors $|T(y)(t_2) - T(y)(t_1)| \to 0$.
En conséquence des étapes (1)-(3), avec le théorème d'Arzela-Ascoli, nous concluons que $T : \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ est complètement continu.
En conséquence du thèorème du point fixe de Schauder, nous concluons que T a un point fixe qui est solution du problème. ■

Chapitre 5

Dérivée Fractionnaire de Hilfer sur des Échelles de Temps.

Introduction

Dans ce chapitre, nous définissons la dérivée fractionnaire au sens de Hilfer et nous étudions l'existence et la stabilité d'une classe d'équations différentielles fractionnaire de type Hilfer sur des échelles de temps.
Nous allons considérer le problème dynamique sur les échelles de temps suivant (DFH) :

$$^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\alpha,\beta} x(t) = f(t, x(t)), \quad t = [0, b] \ := J \subseteq \mathbb{T}, \tag{5.1}$$

$$^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{1-\gamma} x(t_0) = x_0, \ \gamma \ = \alpha + \beta - \alpha\beta, \tag{5.2}$$

où $^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\alpha,\beta}$ est la dérivée fractionnaire de Hilfer définie sur l'échelle de temps $\mathbb{T}$ avec $0 < \alpha < 1$et $0 \leq \beta \leq 1$, et $f : J \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et dense à droite.

Les définitions et les résultats de ce chapitre sont en majorité tirées des références suivantes $[4, 5, 21, 36, 46, 47, 48, 50]$.

5.1 Préliminaires

Proposition 16

Soient a,b $\in \mathbb{T}$ avec $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]_{\mathbb{T}}$. Alors on a :

$$\int_a^b f(t)\ \Delta t = (\sigma(a) - a)f(a) + \int_{\sigma(a)}^b f(t)\Delta t.$$

Définition 43

La dérivée fractionnaire à gauche au sens de Hilfer d'ordre $0 < \alpha < 1$ et de paramètre $\leq \beta \leq 1$ de la fonction f est définie par :

$$^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\alpha,\beta} f(t) = \left(^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\beta(1-\alpha)} {}^{\mathbb{T}}\Delta(^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f \right)(t).$$

où $^{\mathbb{T}}\Delta := \dfrac{d}{dt}$.

Remarque 11

(1) L'opérateur $^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\alpha,\beta}$ *peut s'écrire de la façon suivante :*

$$\begin{aligned} ^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\alpha,\beta} &= {}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\beta(1-\alpha)} {}^{\mathbb{T}}\Delta {}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} \\ &= {}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\beta(1-\alpha)} {}^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\gamma} \end{aligned}$$

où $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$.
(2) Si $\beta = 0$, *on obtient la dérivée à gauche de Riemann-Liouville :*

$$^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\alpha,0} = {}^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\alpha}.$$

(3) Si $\beta = 0$, *la dérivéée à gauche de Caputo peut s'écrire :*

$$^{\mathbb{T}}_{C}\Delta_{0^+}^{\alpha} := {}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{1-\alpha} {}^{\mathbb{T}}\Delta.$$

Soient $C(J, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur J muni de la norme

$$||x||_C = sup\{|x(t)| : t \in J\},$$

et $L^1(J)$ l'espace de Lebesgue des fonctions intégrables $x : J \longrightarrow \mathbb{R}$, muni de la norme :

$$||x||_1 = \int_1^b |x(s)|ds.$$

Définition 44

Pour $0 \leq \gamma < 1$, nous définissons l'espace pondéré $C_\gamma(J, \mathbb{R})$ des fonctions continues f sur l'intervalle fini J par :

$$C_\gamma(J, \mathbb{R}) := \{f(t) : J \longrightarrow \mathbb{R} \quad : \quad t^\gamma f(t) \in C_\gamma(J, \mathbb{R})\}$$

Notons que $C^0_\gamma(J, \mathbb{R}) := C_\gamma(J, \mathbb{R})$.
Nous introduisons également les espaces suivants

$$C^{\alpha,\beta}_{1-\gamma}(J, \mathbb{R}) := \{f \in C_{1-\gamma}(J, \mathbb{R}), \Delta^{\alpha,\beta}_{0^+} f \in C_{1-\gamma}(J, \mathbb{R})\}$$

et

$$C^{\gamma}_{1-\gamma}(J, \mathbb{R}) := \{f \in C_{1-\gamma}(J, \mathbb{R}), \Delta^{\gamma}_{0^+} f \in C_{1-\gamma}(J, \mathbb{R})\}.$$

tel que

$$C^{\gamma}_{1-\gamma}(J, \mathbb{R}) \subset C^{\alpha,\beta}_{1-\gamma}(J, \mathbb{R}).$$

Remarque 12

$C_\gamma(J, \mathbb{R})$ est un espace de Banach, avec la norme :

$$||f||_{C_\gamma} = ||t^\gamma f(t)||_C.$$

$C^n_\gamma(J, \mathbb{R})$ est un espace de Banach, avec la norme :

$$||f||_{C^n_\gamma} = \sum_{i=0}^{n-1} ||f^{(k)}||_C + ||f^{(n)}||_C, n \in \mathbb{N}.$$

Définition 45

L'expression

$${}^{\mathbb{T}}\Delta^{\alpha}_{0^+} = {}^{\mathbb{T}}\Delta {}^{\mathbb{T}}I^{\alpha-1}_{0^+} f(t), t > 0, \quad \textit{avec} \quad 0 < \alpha < 1$$

est appelée la dérivée fractionnaire de type Riemann-Liouville (R-L) d'ordre α.

Lemme 6

Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors

$$\left({}^{\mathbb{T}}I^{\alpha}_{0^+} s^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\beta+\alpha}\, t^{\beta+\alpha-1}$$

et

$$\left({}^{\mathbb{T}}\Delta^{\alpha}_{0^+} s^{\beta-1}\right)(t) = 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Lemme 7

Soient $\alpha > 0$ *et* $0 \leq \gamma < 1$. *Alors* ${}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\alpha}$ *est borné de* $C_\gamma(J, \mathbb{R})$ *dans* $C_\gamma(J, \mathbb{R})$.

Lemme 8

Soient $\alpha > 0$ *et* $0 \leq \gamma < 1$. *Si* $\gamma \leq \alpha$ *alors* ${}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\alpha}$ *est borné de* $C_\gamma(J, \mathbb{R})$ *dans* $C(J, \mathbb{R})$.

Lemme 9

Si $f \in L^1\ (J)$, *et* ${}^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\alpha} f \in L^1(J)$ *existe, alors*

$$ {}^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\alpha,\beta}\, {}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\alpha} f = {}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\beta(1-\alpha)}\, {}^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\beta(1-\alpha)} f. $$

Lemme 10

Pour $0 \leq \gamma < 1$ *et* $f \in C_\gamma(J, \mathbb{R})$, *on a*

$$ {}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\alpha} f(0) := \lim_{t \to 0^+} {}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\alpha} f(t), \quad 0 \leq \gamma < \alpha. $$

Lemme 11

Soient $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ *et* $f \in L^1(J)$. *Alors*

$$ {}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\alpha}\, {}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\beta} f(t) = {}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\alpha+\beta} f(t), \quad t \in J. $$

Lemme 12

Soient $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \gamma < 1$. *Si* $f \in C_\gamma(J, \mathbb{R})$ *et* ${}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{1-\alpha} f \ \in\ C_\gamma^1\ (J, \mathbb{R})$, *alors*

$$ {}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\alpha}\, {}^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\alpha} f(t) = f(t) - \frac{({}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{1-\alpha} f)(0)}{\Gamma\ (\alpha)} t^{\alpha-1}, \text{ pour tout } t \in J. $$

Définition 46

L'opérateur dérivé fractionnaire à droite d'ordre $0 < \alpha < 1$ *et* $0 \leq \beta < 1$ *est défini par*

$$ {}^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\beta,\alpha} = {}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\beta(1-\alpha)}\, \Delta\, {}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}. $$

Lemme 13

Soient $0 < \alpha < 1, 0 \leq \gamma \leq 1$ *et* $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$.
Si $f \in C_{\gamma}^{1-\gamma}(J, \mathbb{R})$ *alors*

$$^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\gamma}\, ^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\gamma} f = {}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\alpha}\, ^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\alpha,\beta} f$$

et

$$^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\gamma}\, ^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\alpha} f = {}^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\beta(1-\alpha)} f.$$

Lemme 14

Soient $0 < \alpha < 1, \quad 0 \leq \gamma \leq 1$ *et* $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$.
Si $f \in C_{1-\gamma}(J, \mathbb{R})$ *et* $^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{1-\beta(1-\alpha)} f$ *sur* $C_{1-\gamma}^{1}(J, \mathbb{R})$, *alors* $^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\alpha}\, ^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\alpha,\beta} f$ *existe sur* J *et*

$$^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\alpha}\ ^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\alpha,\beta} f(t) = f(t).$$

Démonstration : D'après le Lemme (13), on a

$$^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\alpha}\ ^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\alpha,\beta}\ f(t) = {}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\gamma}\ ^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\gamma}\ f(t)$$

Nous appliquons les Lemmes (7) et (12) et nous obtenons

$$^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\alpha}\, ^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\alpha,\beta} f(t) = f(t) - \frac{(^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{1-\gamma} f)(0)}{\Gamma(\gamma)}\ t^{\gamma-1}, \ \textit{pour tout}\ t \in J.$$

En conclusion, on a

$$^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\alpha}\, ^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\alpha,\beta} f(t) = f(t).$$

■

Lemme 15 (*Gronwall*)

[18] Soient $v : [0, b[\longrightarrow [0, +\infty[$ *une fonction réelle et* $w(\cdot)$ *une fonction localement intégrable et positive sur* $[0, b]$, *et qu'il existe des constantes* $a > 0$ *et* $0 \leq \alpha < 1$, *tels que*

$$v(t) \leq w(t) + a \int_0^t \frac{v(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds.$$

Alors, il existe une constante $K = K(\alpha)$, *tel que*

$$v(t) \leq w(t) + Ka \int_0^t \frac{w(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds,$$

pour tout $t \in [0, b]$.

5.2 Resultat d'existence

Enoncons le Lemme auxilliaire suivant :

Lemme 16

[30] Soient $J=[0,b]\subseteq\mathbb{T}$ et $\gamma=\alpha+\beta-\alpha\beta$, où $0<\alpha<1, 0\leq\gamma\leq 1$. Supposons que $f : J\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction telle que $f(.,(.))\in C_{1-\gamma}(J,\mathbb{R})$ pour tout $x\in C_{1-\gamma}(J,\mathbb{R})$.
Si $x\in C_{1-\gamma}^{\gamma}(J,\mathbb{R})$, alors x satisfait $(5.1)-(5.2)$ si et seulement si x satisfait l'equation intégrale suivante :

$$x(t)=\frac{x_0}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))\Delta s,\ t>0. \tag{5.3}$$

Démonstration : **Étape 1 :**($\Longrightarrow$) Supposons que $x\in C_{1-\gamma}^{\gamma}[J,\mathbb{R}]$ est solution de $(5.1)-(5.2)$ et montrons qu'elle est solution de (5.3). D'après la Définition de $C_{1-\gamma}^{\gamma}(J,\mathbb{R})$, le Lemme (8) et la Dèfinition, on a ${}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{1-\gamma}\ x\in\ C_{1-\gamma}\ (J,\mathbb{R})$

$${}^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\gamma}x={}^{\mathbb{T}}\Delta\left({}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{1-\gamma}x\right)\in\ C_{1-\gamma}(J,\mathbb{R}).$$

D'après la Définition (44) on a

$${}^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\gamma}x\in C_{1-\gamma}1(J,\mathbb{R}).$$

Nous appliquons le Lemme (12), et nous obtenons

$${}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\gamma}\,{}^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\gamma}x(t)=x(t)-\frac{x_0}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1},t\in J. \tag{5.4}$$

De l'hypothèse ${}^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\gamma}x\in C_{1-\gamma}(J,\mathbb{R})$ et le Lemme 13, on a

$$\begin{aligned}{}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\gamma}\ {}^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\gamma}x&={}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\alpha}\ {}^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\alpha,\beta}x\\&={}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\alpha}f,\end{aligned} \tag{5.5}$$

sur J.
D'après (5.4) et (5.5), on a

$$x(t)=\frac{x_0}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}+\left[{}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\gamma}\,{}^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\gamma}x(t)\right],t\in J \tag{5.6}$$

qui est l'équation (5.3).
Étape 2 :($\Longleftarrow$) Supposons que $x\in C_{1-\gamma}^{\gamma}(J,\mathbb{R})$ satisfait l'équation (5.3), et qui peut être écrite comme dans (5.5). Nous appliquons l'opérateur ${}^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\gamma}$ des deux côtés de (5.5). Il résulte des Lemmes (6) et (13) et de la Définition (46) que

$${}^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\gamma}x={}^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\beta(1-\alpha)}f. \tag{5.7}$$

D'autre part, d'après (5.7) et l'hypothèse ${}^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\gamma}\ x\ \in\ C_{1-\gamma}\ (J,\mathbb{R})$ on obtient

$${}^{\mathbb{T}}\Delta{}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{1-\beta(1-\alpha)}f={}^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\beta(1-\alpha)}f\in C_{1-\gamma}(J,\mathbb{R}). \tag{5.8}$$

Donc, pour $f \in C^{\gamma}_{1-\gamma}(J,\mathbb{R})$ et d'après le Lemme (7) on a

$$^{\mathbb{T}}I^{1-\beta(1-\alpha)}_{0^+} f \in C_{1-\gamma}(J,\mathbb{R}).$$

Il découle de (5.7) et (5.8) et d'après la Définition (45), nous obtenons

$$^{\mathbb{T}}I^{1-\beta(1-\alpha)}_{0^+} f \in C^{1}_{1-\gamma}(J,\mathbb{R}).$$

Ainsi, nous pouvons écrire :

$$^{\mathbb{T}}\Delta^{\alpha,\beta}_{0^+} x(t) = f(t,x(t)) - \frac{\left[{}^{\mathbb{T}}I^{1-\beta(1-\alpha)}_{0^+} f(s,x(s))\right](0)}{\Gamma(\beta(1-\alpha))} t^{\beta(/-\alpha)-1}. \tag{5.9}$$

Puisque $1-\gamma < 1-\beta(1-\alpha)$, le Lemme (10) implique que :

$$\left[{}^{\mathbb{T}}I^{1-\beta(1-\alpha)}_{0^+} f(s,x(s))\right](0) = 0.$$

Par conséquent l'équation (5.9) se réduit à :

$$^{\mathbb{T}}\Delta^{\alpha,\beta}_{0^+}\, x(t) = f(t,x(t)), t \in J. \tag{5.10}$$

Maintenent nous montrons que la condition initiale $^{\mathbb{T}}\Delta^{\gamma}_{0^+}x(0) = x_0$ est également satisfaite. En appliquant $^{\mathbb{T}}\Delta^{1-\gamma}_{0^+}$ aux deux côtés de (5.5), et par les Lemmes (6) et (11) on obtient

$$^{\mathbb{T}}\Delta^{\gamma}_{0^+}x(0) = x_0 + \left[{}^{\mathbb{T}}I^{1-\beta(1-\alpha)}_{0^+} f(s,x(s))\right](t)x_0. \tag{5.11}$$

Lorsque $t \longrightarrow 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} ^{\mathbb{T}}\Delta^{\gamma}_{0^+}x(0) &= x_0 + \left[{}^{\mathbb{T}}I^{1-\beta(1-\alpha)}_{0^+} f(s,x(s))\right](0) \\ &= x_0. \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve. ■

Pour approfondir, nous donnons les hypothèses suivantes :

Hypothèses :

(H_1) la fonction $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est rd-continue.

(H_2) la fonction f est complètement continue et il existe une fonction $\mu \in L^1(J)$ tel que :

$$|f(t,x)| \leq \mu(t), \quad t \in J, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(H_3) Soit f est une fonction rd-continue bornée tel que $f(\cdot,x(s)) \in C^{\beta(1-\alpha)}_{1-\gamma}(J,\mathbb{R})$ pour tout $x \in C_{1-\gamma}\,(J,\mathbb{R})$ et il existe une constante positive $L > 0$ tel que :

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L\,|x-y|\,.$$

Théorème 22

Si les hypothèses (H_1) et (H_2) sont satisfaites alors le problème $(5.1)-(5.2)$ a au moins une solution.

Démonstration : Nous allons utiliser le théorème de point fixe de **Schauder**. La preuve sera donnée en plusieurs étapes. Nous considérons l'opérateur

$$N : C_{1-\gamma}(J,\mathbb{R}) \to C_{1-\gamma}(J,\mathbb{R})$$

L'équation intégrale équivalente est définie par

$$x(t) = (Nx)(t) \tag{5.12}$$

où

$$(Nx)(t) = x_0(t) + \left[{}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{1-\beta(1-\alpha)} f(s,x(s))\right](t) \tag{5.13}$$

et

$$x_0(t) = \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1}. \tag{5.14}$$

Nous allons montrer que l'opérateur N est continu et complètement continu.

Étape 1 : Montrons que N est continu.

Soit (x_n) une suite tel que $x_n \to x$ sur $C_{1-\gamma}(J,\mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in J$

$$\begin{aligned}
&\left|t^{1-\gamma}\left((Nx_n)(t) - (Nx)(t)\right)\right| \\
&\leq \frac{t^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\right| \Delta s \\
&\leq \frac{t^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sup_{s\in J} \left|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\right| \Delta s \\
&\leq \frac{t^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\right| ds \\
&\leq \frac{b^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\gamma,\alpha) \left\|f(\cdot,x_n(\cdot)) - f(\cdot,x(\cdot))\right\|_{C_{1-\gamma}}.
\end{aligned}$$

Puisque f est continue, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue donne

$$\|Nx_n - Nx\|_{C_{1-\gamma}} \to 0 \quad lorsque \quad n \to 0.$$

Étape 2 : Montrons que N applique les ensembles bornés dans des ensembles bornés sur $C_{1-\gamma}(J,\mathbb{R})$.

Nous montrons que pour tout $q > 0$, il existe une constante positive l tel que

$$x \in B_q = \{x \in C_{1-\gamma}[J,\mathbb{R}] : \|x\|_{C_{1-\gamma}} \leq q\},$$

on a

$$||N(x)||_{C_{1-\gamma}} \leq l.$$

On a

$$\begin{aligned}
\left|t^{1-\gamma}(Nx)(t)\right| &\leq \frac{|x_0|}{\Gamma(\gamma)} + \frac{t^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left|f(s,x(s))\right| \Delta s \\
&\leq \frac{|x_0|}{\Gamma(\gamma)} + \frac{t^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left|\mu(s)\right| \Delta s \\
&\leq \frac{|x_0|}{\Gamma(\gamma)} + \frac{b^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\gamma,\alpha) \|\mu\|_{C_{\gamma-1}} \\
&= l.
\end{aligned}$$

Étape 3 : Montrons que N est equicontinu.
Soient $t_1, t_2 \in J$ avec $t_1 < t_2$, B_q un ensemble borné de $C_{\gamma-1}(J, \mathbb{R})$ et $x \in B_q$. Alors

$$
\begin{aligned}
&\left|(Nx_n)(t_2)t_2^{1-\gamma} - (Nx)(t_1)\ t_1^{1-\gamma}\right| \\
&\leq \Big|\frac{t_2^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))\Delta s \\
&- \frac{t_1^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))\Delta s\Big| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left|t_2^{1-\gamma}\ (t_2-s)^{\alpha-1} - t_1^{1-\gamma}(t_1-s)^{\alpha-1}\right| |\mu(s)|\Delta s \\
&+ \frac{t_2^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\,|\mu(s)|\,\Delta s \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left|t_2^{1-\gamma}(t_2-s)^{\alpha-1} - t_1^{1-\gamma}(t_1-s)^{\alpha-1}\right| |\mu(s)|\Delta s \\
&+ \frac{t_2^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}(t_2-t_1)^{\alpha+\gamma-1}\,\|\mu(s)\|_{C_{1-\gamma}}.
\end{aligned}
$$

Le coté droit de l'inégalité précédente tend vers zéro indépendemment de B_q lorsque $t_1 \to t_2$.
D'après le Théorème d'**Arzela-Ascoli** et les étapes $(1)-(3)$ nous concluons que

$$N : C_{1-\gamma}[J, \mathbb{R}] \to C_{1-\gamma}[J, \mathbb{R}]$$

est continu et complètement continu.
Étapes 4 : Les estimations à priori.
Montrons que l'ensemble

$$w = \{x \in C_{1-\gamma}[J, \mathbb{R}] : x = \delta(Nx), 0 < \delta < 1\}$$

est borné.
Soit $x \in w, x = \delta(Nx)$, *pour certains* $0 < \delta < 1$. Ainsi pour tout $t \in J$, on a

$$x(t) = \delta\left[\frac{x_0}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))\Delta s\right]$$

De l'hypothèse (H_2), pour tout $t \in J$, on a

$$
\begin{aligned}
|x| &= |\delta(Nx)| \\
&\leq \frac{|x_0|}{\Gamma(\gamma)} + \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\ B(\gamma,\alpha)\ \|\mu\|_{C_{\gamma-1}}.
\end{aligned}
$$

Alors l'ensemble w est borné. Et, d'après le théorème de **Schauder** l'opérateur N a un point fixe qui est solution du problème $(5.1)-(5.2)$. ■

5.3 Stabilité au sens d'Ulam

Nous énoncons les définitions de stabilité de type **Ulam-Hyers** (UH) et stabilité de type **Ulam-Hyers-Rassias** (UHR) pour les équations dynamiques de type **Hilfer** sur les échelles de temps [45].

Définition 47

Le problème $(5.1)-(5.2)$ *est* ***Ulam-Hyers*** *stable s'il existe un nombre réel* $c_f > 0$ *tel que, pour tout* $\epsilon > 0$ *et pour toute solution* $z \in C^{\gamma}_{1-\gamma}(J, \mathbb{R})$ *de l'inégalité*

$$\left| {}^{\mathbb{T}}\Delta^{\alpha,\beta}_{0^+} z(t) - f(t, z(t)) \right| \leq \epsilon, t \in J, \tag{5.15}$$

il existe une solution $x \in C^{\gamma}_{1-\gamma}[J, \mathbb{R}]$ *de problème* $(5.1)-(5.2)$ *avec*

$$|z(t) - x(t)| \leq c_f \epsilon, \ \ t \in J.$$

Définition 48

Le problème $(5.1)-(5.2)$ *vérifie la stabilité généralisée au sens d'****Ulam-Hyers*** *s'il existe* $\psi \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, *vérifiant* $\psi(0) = 0$ *tel que pour toute solution* $z \in C^{\gamma}_{1-\gamma}(J, \mathbb{R})$ *de* (5.15), *il existe une solution* $x \in C^{\gamma}_{1-\gamma}(J, \mathbb{R})$ *du problème* $(5.1)-(5.2)$ *avec*

$$|z(t) - x(t)| \leq \psi_f \epsilon, \quad t \in J.$$

Définition 49

Le problème $(5.1)-(5.2)$ *est* ***Ulam-Hyers-Rassias*** *(U.H.R) stable par rapport à* $\phi \in C^{\gamma}_{1-\gamma}(J, \mathbb{R})$ *s'il existe un nombre réel* $c_f > 0$ *tel que pour tout* $z \in C_{1-\gamma}(J, \mathbb{R})$ *de l'inégalité*

$$\left| {}^{\mathbb{T}}\Delta^{\alpha,\beta}_{0^+} z(t) \ - \ f(t, z(t)) \right| \ \leq \ \epsilon \ \phi(t), \quad t \in J, \tag{5.16}$$

il existe une solution $x \in C^{\gamma}_{1-\gamma}(J, \mathbb{R})$ *du problème* $(5.1)-(5.2)$ *avec*

$$|z(t) - x(t)| \leq c_f \epsilon \phi(t), t \in J.$$

Définition 50

Le problème $(5.1)-(5.2)$ *vérifie la stabilité généralisée au sens d'***Ulam-Hyers-Rassias** *(U.H.R.) par rapport à* $\phi \in C^{\gamma}_{1-\gamma}(J,\mathbb{R})$ *s'il existe un nombre réel* $c_{f,\phi} > 0$ *tel que pour tout* $z \in C_{1-\gamma}(J,\mathbb{R})$ *de l'inégalité*

$$\left| {}^{\mathbb{T}}\Delta^{\alpha,\beta}_{0^+} z(t) - f(t,z(t)) \right| \leq \phi(t), t \in J, \tag{5.17}$$

il existe une solution $x \in C^{\gamma}_{1-\gamma}(J,\mathbb{R})$ *du problème* $(5.1)-(5.2)$ *avec*

$$|z(t)-x(t)| \leq c_{f,\phi}\phi(t), t \in J.$$

Remarque 13

La fonction $z \in C_{1-\gamma}(J,\mathbb{R})$ *est une solution de l'inégalité*

$$\left| {}^{\mathbb{T}}\Delta^{\alpha,\beta}_{0^+} z(t) - f(t,z(t)) \right| \leq \epsilon, \quad t \in J$$

si et seulement s'il existe $g \in C_{1-\gamma}(J,\mathbb{R})$ *tel que :*
(1) $|g(t)| \leq \epsilon, t \in J.$
(2) ${}^{\mathbb{T}}\Delta^{\alpha,\beta}_{0^+} z(t) = f(t,z(t)) + g(t), t \in J.$

Lemme 17

Si la fonction $z \in C_{1-\gamma}(J,\mathbb{R})$ *est une solution de l'inéquation différentielle* (5.16), *alors*

$$\left| z(t) + z_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,z(s))\Delta s \right| \leq \frac{\epsilon b^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

avec $z_0(t) = \dfrac{z_0}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1}.$

Nous sommes à présent en mesure de démontrer un résultat d'existence pour le problème $(5.1)-(5.2)$. Nous utilisons **le principe de contraction de Banach**.

Théorème 23

Nous supposons que les hypothèses (H_1) *et* (H_3) *sont vérifiées. Si l'on a*

$$\left(\frac{Lb^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\gamma,\alpha) \right) < 1, \tag{5.18}$$

alors le problème $(5.1)-(5.2)$ *possède une solution unique.*

Démonstration : Nous considérons l'opérateur

$$N : C_{1-\gamma}(J,\mathbb{R}) \to C_{1-\gamma}(J,\mathbb{R})$$

tel que

$$(Nx)(t) = x_0(t) + \left({}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\alpha} f(s, x(s))\right) \tag{5.19}$$

avec : $x_0(t) = \dfrac{x_0}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1}$.

D'après le Lemme (16) le point fixe de l'opérateur N est une solution du problème $(5.1)-(5.2)$. Soient $x_1, x_2 \in C_{1-\gamma}(J, \mathbb{R})$ *et* $t \in J$, alors on a :

$$\begin{aligned}
&\left|t^{1-\gamma}\left((Nx_1)(t) - (Nx_2)(t)\right)\right| \\
&\leq \frac{t^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\right| \Delta s \\
&\leq \frac{t^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sup_{s \in J} \left|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\right| \Delta s \\
&\leq \frac{t^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\right| ds \\
&\leq \frac{Lt^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left|x_1 - x_2\right|_{C_{1-\gamma}} \\
&\leq \frac{Lb^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\gamma, \alpha) \left\|x_1 - x_2\right\|_{C_{1-\gamma}}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\left\|((Nx_1) - (Nx_2))\right\|_{c_{1-\gamma}} \leq \frac{Lb^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\gamma, \alpha) \left\|x_1 - x_2\right\|_{C_{1-\gamma}}.$$

D'après (5.18), l'opérateur N a un unique point fixe qui est solution du problème $(5.1)-(5.2)$. ■

Résultats de stabilité

Théorème 24

Si les hypothèses $(H_1), (H_3)$ *et* (5.18) *sont vérifiées, alors le problème* $(5.1)-(5.2)$ *est Ulam-Hiers stable.*

Démonstration : Soient $\epsilon > 0$, et $z \in C_{1-\gamma}^{\gamma}(J, \mathbb{R})$ une solution de l'inégalité (5.15) et $x \in C_{1-\gamma}^{\gamma}(J, \mathbb{R})$ l'unique solution du problème dynamique suivant :

$$^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\alpha,\beta} x(t) = f(t, y(t)), \quad t = [0, b] := J \tag{5.20}$$

$$^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{1-\gamma} x(0) = {}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{1-\gamma} z(0) = x_0, \gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta. \tag{5.21}$$

D'après le Lemme 16, on a

$$x(t) = x_0(t) + \left[{}^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\alpha} f(s, x(s))\right](t).$$

avec $x_0(t) = \dfrac{x_0}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1}$. En intégrant (5.15) on a, avec le Lemme (17)

$$\left|z(t) - z_0(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, z(s)) \Delta s\right| \leq \frac{\epsilon b^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{5.22}$$

Pour tout $t \in J$.

$$\begin{aligned} |z(t)-x(t)| &\leq \left| z(t)-z_0(t)-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,z(s))\Delta s \right. \\ &\quad \left. +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left[f(s,z(s))-f(s,x(s))\right]\Delta s \right| \\ &\leq \left| z(t)-z_0(t)-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,z(s))\Delta s \right| \\ &\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|z(s)-x(s)\right| ds \end{aligned} \tag{5.23}$$

Nous utilisons (5.22)

$$|z(t)-x(t)| \leq \frac{\epsilon b^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|z(s)-x(s)\right| ds$$

Et d'après Lemme (15), Nous obtenons :

$$\begin{aligned} |z(t)-x(t)| &\leq \frac{b^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[1+\frac{vL}{\Gamma(\alpha+1)}b^{\alpha}\right]\epsilon \\ &= c_f\epsilon. \end{aligned}$$

où $v=v(z)$ est une constante, Ce qui achève la démonstration du théorème.
Si, de plus, on pose

$$\psi(\epsilon)=c_f\epsilon, \psi(0)=0,$$

alors le problème $(5.1)-(5.2)$ est *U.H.* stablement généralisé. ■

Dans la suite, nous avons besoin de l'hypothèse suivante :
(H_4) Il existe une fonction croissante $\phi \in C_{1-\gamma}[J,\mathbb{R}]$ et il existe $\lambda_\phi > 0$, tel que pour tout $t \in J$, on ait

$$^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{\alpha}\phi(t) \leq \lambda_\phi \phi(t).$$

Théorème 25

Nous supposons que les hypothèses $(H_1), (H_3), (H_4)$ et (5.18) sont satisfaitent. Alors le problème $(5.1)-(5.2)$ est U.H.R. stable.

Démonstration : Soient $z \in C_{1-\gamma}^{\gamma}[J,\mathbb{R}]$ une solution de l'inégalité (5.16) et $x \in C_{1-\gamma}^{\gamma}[J,\mathbb{R}]$ l'unique solution du problème $(5.1)-(5.2)$, alors d'après le Lemme (16) on a

$$x(t)=x_0(t)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,x(s))\Delta s.$$

En intégrant (5.16) et en appliquant le Lemme (17), nous obtenons

$$\left| z(t)-z_0(t)-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,z(s))\Delta s \right| \leq \epsilon\lambda_\phi\phi(t). \tag{5.24}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
|z(t)-x(t)| &\leq \left| z(t)-z_0(t)-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,z(s))\Delta s \right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left[f(s,z(s))-f(s,x(s))\right]\Delta s \right|\\
&\leq \left| z(t)-z_0(t)-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,z(s))\Delta s \right| \qquad (5.25)\\
&\quad + \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|z(s)-x(s)\right| ds\\
&\leq \epsilon\lambda_\phi\phi(t) + \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|z(s)-x(s)\right| ds.
\end{aligned}$$

Et en appliquant le Lemme (15), nous obtenons

$$|z(t)-x(t)| \leq \lambda_\phi\left(1+v_1 L\lambda_\phi\right)\epsilon\phi(t)$$

où $v_1 = v_1(\alpha)$ est une constante. Alors, pour tout $t \in J$, on a :

$$|z(t)-x(t)| \leq c_f\epsilon\phi(t).$$

Ce qui complète la preuve du théorème. ■

5.4 Application

Nous considérons le problème suivant :

$$^{\mathbb{T}}\Delta_{0^+}^{\alpha,\beta} x(t) = \frac{\exp^{-t}}{(9+\exp^t)}\left(\frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}\right) \quad t=[0,b] \ := J \subseteq \mathbb{T} \qquad (5.26)$$

$$^{\mathbb{T}}I_{0^+}^{1-\gamma} x(t_0) = 0. \qquad (5.27)$$

Posons

$$f(t,x) = \frac{\exp^{-t} x}{(9+\exp^t)(1+x)}, (t,x) \in \mathbb{T}\times[0,+\infty[.$$

Soient $x, y \in [0,+\infty[$ *et* $t \in J$, alors on a :

$$\begin{aligned}
|f(t,x)-f(t,y)| &\leq \frac{\exp^{-t}}{(9+\exp^t)}|x-y|\\
&\leq \frac{1}{10}|x-y|.
\end{aligned} \qquad (5.28)$$

Pour $\alpha = \dfrac{2}{3}$, et $\beta = \dfrac{1}{2}$, nous aurons $\gamma = \dfrac{5}{6}$ et $b = 1$.
Et d'après (5.18) on a

$$\frac{Lb^\alpha}{\Gamma(\alpha)} B(\gamma,\alpha) \simeq 0.1274 < 1.$$

Alors toutes les hypothèses et (5.18) du Théorème (25) sont satisfaites, et le problème (5.26) $-$ (5.27) a une unique solution et il vérifie la stabilité au sens d'Ulam-Hiers.

Chapitre 6

Inégalités classiques sur les Échelles de Temps

Introduction

Nous rappelons, dans cette section, quelques inégalités classiques de type Gronwall.

6.1 Quelques inégalités intégrales célèbres de type Gronwall dans le cas continu

C'est en 1919, que Gronwall a pu démontrer sa celèbre inégalité qui ne cesse de soulever la curiosité des chercheurs dont l'énoncé est le suivant :

Théorème 26

Soient $u(t)$ une fonction continue et positive sur $I = [\alpha, \alpha+h]$ et a, b deux constantes positives. Si l'inégalité

$$u(t) \leq \int_{\alpha}^{t} (bu(s) + a)\, ds, \quad \textit{pour tout } t \in I,$$

est vérifiée, alors

$$u(t) \leq ah \exp(bh), \quad \textit{pour tout } t \in I.$$

Bellman a généralisé,en 1943, le résultat de Gronwall dans le cas où b est une fonction dépendant de la variable t, dans l'énoncé suivant :

Théorème 27

Soient u, f deux fonctions continues et positives sur $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ et $c \geq 0$. Si l'inégalité

$$u(t) \leq c + \int_{\alpha}^{t} f(s)u(s)\,ds, \quad \text{pour tout } t \in I,$$

est satisfaite, alors

$$u(t) \leq c \exp\left(\int_{\alpha}^{t} f(s)\,ds\right), \quad \text{pour tout } t \in I.$$

En 1956, Bihari a prouvé une inégalité encore plus générale que celles de Gronwall et de Bellman, dont l'énoncé est le suivant :

Théorème 28

Soient u, f deux fonctions continues et positives sur $[0, +\infty[$, w une fonction continue croissante sur $[0, +\infty[$, vérifiant $w(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et c une constante strictement positive. Si l'inégalité

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} f(s)w(u(s))\,ds, \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

est satisfaite, alors

$$u(t) \leq G^{-1}\left(G(c) + \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds\right), \quad \text{pour tout } t \in [0, T],$$

où G est la solution de l'équation intégrale suivante :

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{w(s)}\,ds, \quad 0 < t_0 < t,$$

G^{-1}est la fonction inverse, T est une fonction choisi de telle sorte que :

$$\left(G(c) + \int_{t_0}^{t} f(s)w(u(s))\,ds\right) \in Dom(G^{-1}), \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

En 1958, Bellman a généralisé son propre théorème comme suit :

Théorème 29

Soient u, g deux fonctions continues et positives sur $I = [\alpha, \beta]$ et $n(t)$ une fonction continue, strictement positive et croissante sur I. Si l'inégalité

$$u(t) \leq n(t) + \int_{\alpha}^{t} g(s)u(s)\, ds, \quad \text{pour tout } t \in I,$$

est satisfaite, alors

$$u(t) \leq n(t) \exp\left(\int_{\alpha}^{t} g(s)\, ds\right), \quad \text{pour tout } t \in I.$$

En 1969, Gollwitzer a prouvé une inégalité encore plus générale que celle de Bellman donnée par le Théorème suivant :

Théorème 30

Soient u, f, g et h des fonctions continues et positives sur $I = [\alpha, \beta]$. Si l'inégalité

$$u(t) \leq f(t) + g(t)\int_{\alpha}^{t} h(s)u(s)\, ds, \quad \text{pour tout } t \in I,$$

est satisfaite, alors

$$u(t) \leq f(t) + g(t)\int_{\alpha}^{t} h(s)f(s) \exp\left(\int_{s}^{t} h(\sigma)u(\sigma)\, d\sigma\right) ds, \quad \text{pour tout } t \in I.$$

6.2 Inégalités intégrales de type Gronwall sur les E. T. (cas linéaire)

Soient $\mathbb{T}$ une échelle de temps et $t_0 \in \mathbb{T}$.

Théorème 31

Soient $y,\ f \in \mathrm{C}_{rd}$ et $p \in \mathcal{R}^+$. Alors :

$$y^{\Delta}(t) = p(t)y(t) + f(t), \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T},$$

implique

$$y(t) \leq y(t_0)e_p(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} e_p(t,\sigma(\tau))f(\tau)\,\Delta\tau, \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Démonstration : Soient $y,\ f \in \mathrm{C}_{rd}$ et $p \in \mathcal{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned}
\big(y(t)e_{\ominus p}(t,t_0)\big)^{\Delta} &= \left(\frac{y(t)}{e_p(t,t_0)}\right)^{\Delta} \\
&= \frac{y^{\Delta}(t)e_p(t,t_0) - y(t)e_p^{\Delta}(t,t_0)}{e_p(t,t_0)e_p(\sigma(t),t_0)} \\
&= \frac{y^{\Delta}(t)e_p(t,t_0) - y(t)p(t)e_p(t,t_0)}{e_p(t,t_0)e_p(\sigma(t),t_0)} \\
&= \big(y^{\Delta}(t) - p(t)y(t)\big)e_{\ominus p}(\sigma(t),t_0).
\end{aligned}$$

On a $p \in \mathrm{R}^+$, alors $\ominus p \in \mathrm{R}^+$, ceci implique que : $e_{\ominus p}(t,t_0) > 0$. Alors

$$\begin{aligned}
y(t)e_{\ominus p}(t,t_0) - y(t_0) &= \int_{t_0}^{t} (y^{\Delta}(\tau) - p(\tau)y(\tau))e_{\ominus p}(\sigma(\tau),t_0)\,\Delta\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} f(\tau)e_p(t_0,\sigma(\tau))\,\Delta\tau.
\end{aligned}$$

Par suite, on obtient

$$\left(\frac{y(t) - y(t_0)e_p(t,t_0)}{e_p(t,t_0)}\right) \leq \int_{t_0}^{t} e_p(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)\,\Delta\tau,$$

d'où

$$y(t) \leq y(t_0)e_p(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} e_p(t,\sigma(\tau))f(\tau)\,\Delta\tau, \quad \text{pour tout t} \in \mathbb{T}.$$

■

Théorème 32 (*Inégalité de Gronwall*)

Soient $y,\ f \in \mathrm{C}_{rd}$ *et* $p \in \mathcal{R}^+$, $p \geq 0$. *Alors :*

$$y(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} y(\tau)p(\tau)\,\Delta\tau, \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T},$$

implique

$$y(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} e_p(t,\sigma(t))f(\tau)p(\tau)\,\Delta\tau, \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Démonstration : On pose

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} y(\tau)p(\tau)\,\Delta\tau,$$

alors

$$z(t_0) = 0 \textit{ et } z^{\Delta}(t) = p(t)y(t) \leq (f(t)+z(t))p(t).$$

D'après le Théorème (2.6), on obtient

$$z(t) \leq \int_{t_0}^{t} e_p(t,\sigma(\tau))f(\tau)p(\tau)\,\Delta\tau.$$

On a : $y(t) \leq f(t) + z(t)$, donc

$$y(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} e_p(t,\sigma(t))f(\tau)p(\tau)\,\Delta\tau, \quad \text{pour tout t} \in \mathbb{T}.$$

■

Corollaire 1

Soient $y \in \mathrm{C}_{rd}$, $p \in \mathcal{R}^+$ *avec* $p \geq 0$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Alors :*

$$y(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} y(\tau)p(\tau)\,\Delta\tau, \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T},$$

implique

$$y(t) \leq \alpha e_p(t,t_0), \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Démonstration : Soient $y \in \mathrm{C}_{rd}$, $p \in \mathcal{R}^+$, $p \geq 0$, et $\alpha \in \mathcal{R}$. On utilise le Théorème (2.7) avec $f(t) = \alpha$, on obtient

$$\begin{aligned} y(t) &\leq \alpha + \int_{t_0}^{t} e_p(t, \sigma(\tau))\alpha p(\tau)\, \Delta\tau \\ &\leq \alpha\Big(1 + \int_{t_0}^{t} e_p(t, \sigma(\tau)p(\tau)\, \Delta\tau\Big) \\ &\leq \alpha\big(1 + e_p(t, t_0) - e_p(t, t)\big) \\ &\leq \alpha e_p(t, t_0). \end{aligned}$$

■

Corollaire 2

Soient $y \in \mathrm{C}_{rd}$ et α, β, $\gamma \in \mathcal{R}$ avec $\gamma > 0$. Alors :

$$y(t) \leq \alpha + \beta(t - t_0) + \gamma \int_{t_0}^{t} y(\tau)\, \Delta\tau, \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T},$$

implique

$$y(t) \leq \Big(\alpha + \frac{\beta}{\gamma} e_\gamma(t, t_0)\Big) - \frac{\beta}{\gamma}, \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Démonstration : Soient $y \in \mathrm{C}_{rd}$ et α, β, $\gamma \in \mathcal{R}$ avec $\gamma > 0$. On utilise le Théorème (2.7) avec
$f(t) = \alpha + \beta(t - t_0)$ et $p(t) = \gamma$.
On pose $w(\tau) = e_\gamma(t, \tau)$, on a :

$$\begin{aligned} \gamma e_\gamma(t, \sigma(\tau)) &= \gamma e_{\ominus\gamma}(\sigma(\tau), t) \\ &= \gamma\big(1 + \mu(t)(\ominus\gamma)\big)e_{\ominus\gamma}(\tau, t) \\ &= \gamma\Big(1 - \frac{\mu(t)\gamma}{1 + \mu(t)\gamma}\Big)e_{\ominus\gamma}(\tau, t) \\ &= \Big(\frac{\gamma}{1 + \mu(t)\gamma}\Big)e_{\ominus\gamma}(\tau, t) \\ &= -e^{\Delta}_{\ominus\gamma}(\tau, t) \\ &= -\big(e_\gamma(t, \tau)\big)^{\Delta}. \end{aligned}$$

D'après le Théorème (2.7), on obtient

$$y(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} e_\gamma(t, \sigma(\tau))\gamma f(\tau)\, \Delta\tau$$

$$
\begin{aligned}
&= f(t)w(t) - \int_{t_0}^{t} w^{\Delta}(\tau) f(\tau)\,\Delta\tau \\
&= f(t)w(t) - \int_{t_0}^{t} \big(e_\gamma(t,\tau)\big)^{\Delta} f(\tau)\,\Delta\tau \\
&= f(t)w(t) + \int_{t_0}^{t} \gamma e_\gamma(t,\sigma(\tau)) f(\tau)\,\Delta\tau \\
&= f(t)w(t) + \int_{t_0}^{t} w(\sigma(\tau)) f^{\Delta}(\tau)\,\Delta\tau \\
&= f(t_0)w(t_0) + \int_{t_0}^{t} w(\sigma(\tau)) f^{\Delta}(\tau)\,\Delta\tau \\
&= \alpha e_\gamma(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} e_\gamma(t,\sigma(\tau))\beta\,\Delta\tau \\
&= \alpha e_\gamma(t,t_0) + \frac{\beta}{\gamma}\int_{t_0}^{t} \gamma e_\gamma(t,\sigma(\tau))\beta\,\Delta\tau \\
&= \alpha e_\gamma(t,t_0) + \frac{\beta}{\gamma}\big(e_\gamma(t,t_0) - 1\big).
\end{aligned}
$$

Donc

$$
y(t) \leq \Big(\alpha + \frac{\beta}{\gamma} e_\gamma(t,t_0)\Big) - \frac{\beta}{\gamma}, \quad \text{pour tout t} \in \mathbb{T}. \qquad \blacksquare
$$

6.3 Inégalités intégrales de type Gronwall sur les E. T. (cas non linéaire)

Pour conclure cette section, on présente des versions non linéaires de l'inégalité de Gronwall parfois appelée inégalité de type Bihari.

Théorème 33

Soit $g : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction avec $g(t, x_1) \leq g(t, x_2)$, pour tout $t \in \mathbb{T}$ quand $x_1 \leq x_2$.
Soient $v, w : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ deux fonctions $\Delta-$différentiables avec :
$v^\Delta(t) \leq g(t, v(t))$, $w^\Delta(t) \geq g(t, w(t))$, pour tout $t \in \mathbb{T}^{\mathrm{K}} - \{t_0\}$ avec $t_0 \in \mathbb{T}$. Alors

$$v(t_0) < w(t_0),$$

implique

$$v(t) < w(t), \quad \textit{pour tout } t \geq t_0.$$

Démonstration : On applique le principe d'induction pour montrer que

$$s(t) : v(t) < w(t), \quad \text{pour tout t} \in [t_0, +\infty[.$$

1. Il est clair que $s(t_0) : v(t_0) < w(t_0)$ est vrai.
2. Soit $t \geq t_0$ est dispersé à droite et supposons que $s(t)$ est vrai, alors

$$v^\Delta(t) \leq g(t, v(t)) \leq g(t, w(t) \leq w^\Delta(t).$$

   Puisque $v(t) < w(t)$, alors $g(t, v(t)) \leq g(t, w(t))$, d'où

$$\begin{aligned} v(\sigma(t)) &= v(t) + \mu(t) v^\Delta(t) \\ &< w(t) + \mu(t) w^\Delta(t) \\ &= w(\sigma(t)). \end{aligned}$$

3. Soit $t \geq t_0$ est dense Ã droite et supposons que $s(t)$ est vrai, puisque $v(t) < w(t)$ alors d'après la continuité il existe un voisinage U de t tel que : $v(r) < w(r)$ pour tout $r \in U$, donc $s(r)$ est valable pour tout $r \in U \cap\,]t, +\infty[$.
4. Soit $t \geq t_0$ est dense et supposons que $s(r)$ est vrai pour tout $r \in [t, t_0[$. Alors

$$v(r) < w(r), \text{pour tout r} \in [t_0, t[,$$

   d'après la continuité $v(t) < w(t)$. Mais comme ci-dessus :

$$(w - v)^\Delta(t) \geq 0, \quad \text{sur } [t_0, t],$$

   il s'ensuit que $(w - v)$ est décroissante sur $[t_0, t]$. D'où

$$(w - v)(t) \geq (w - v)(t_0) > 0.$$

D'après le théorème d'induction $s(t)$ est vrai pour tout $t \in [t_0, +\infty[$. ∎

Théorème 34 (*Inégalité de Bihari.*)

Supposons que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction décroissante et $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ telle que $g \circ y$ est rd-continue. Soient $p \geq 0$ est rd-continue et $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est $\Delta-$différentiable. Alors

$$y(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} p(\tau) g(y(\tau))\, \Delta\tau, \quad \textit{pour tout } t \geq t_0,$$

implique

$$y(t) < w(t), \quad \textit{pour tout } t \geq t_0,$$

où w est la solution du problème à valeur initiale suivant :

$$w^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + p(t) g(w), \quad w(t_0) = w_0 > f(t_0).$$

Démonstration : Soit

$$v(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} p(\tau) g(y(\tau))\, \Delta\tau, \quad \text{pour tout t} \geq t_0,$$

alors

$$v^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + p(t) g(y(t)), \quad \textit{et} \quad y(t) \leq v(t).$$

D'où

$$v^{\Delta}(t) \leq f^{\Delta}(t) + p(t) g(v(t)),$$

puisque $v(t_0) = f(t_0) < w_0 = w(t_0)$, d'après Théorème (2.7) on obtient :

$$v(t) < w(t), \quad \text{pour tout t} \geq t_0,$$

alors

$$y(t) < w(t), \quad \text{pour tout t} \geq t_0.$$

■

Théorème 35 (***Inégalité intégrale de type Wendroff-Bihari***)

Supposons que $u(t,s)$, $a(t,s)$, $b(t,s)$ et $f(t,s)$ sont des fonctions positives et continues en tout point dense Ã droite pour tout $(t,s) \in \Omega = \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$, soit $w(x)$ une fonction continue, positive et croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec $w(x) > 0$ pour chaque $x > 0$. Supposons que $a(t,s)$ et $b(t,s)$ sont croissantes sur Ω. Si l'négalité

$$u(t,s) \leq a(t,s) + b(t,s) \int_{t_0}^{t} \int_{s_0}^{s} f(\tau, \eta, w(u(\tau,\eta)))\, \Delta\eta\, \Delta\tau, \quad pour (t,s) \in \Omega,$$

est satisfaite, alors

$$u(t,s) \leq G^{-1}\left(G(a(t,s)) + b(t,s) \int_{t_0}^{t} \int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)\, \Delta\eta\, \Delta\tau \right),$$

où G est la solution de l'équation intégrale suivante :

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{u(\tau, s}{w(u(\tau,s))}\, d\tau, \quad (\tau,\eta) \in \Omega,$$

G^{-1}est la fonction inverse de telle sorte que :

$$\left(G(a(t,s)) + b(t,s) \int_{t_0}^{t} \int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)\, \Delta\eta\, \Delta\tau \right) \in Dom\left(G^{-1}\right).$$

6.4 Applications

Dans cette section nous allons illustrer quelques résultats précédents par des application

Exercice 42

Considérons l'équation aux dérivées partielles suivante sur $\Omega = \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ où $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ sont deux échelles de temps

$$\frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t \partial s} = F(s,t,u(s,t)), \quad (t,s) \in \Omega, \tag{6.1}$$

satisfaisant les conditions intiales suivantes

$$u(t,s_0) = \alpha(t),\ u(t_0,s) = \beta(t),\ u(t_0,s_0) = c, \tag{6.2}$$

oú $F : \mathbb{T}_1 \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\alpha : \mathbb{T}_1 \to \mathbb{R}$ et $\beta : \mathbb{T}_2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues en tout point dense à droite sur $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ respectivement, c est une constante réelle.
Supposons que

$$|F(t,s,u)| \leq f(t,s)w(|u|), \tag{6.3}$$

$$|\alpha(t) + \beta(s) - c| \leq a(t,s), \tag{6.4}$$

oú $a(t,s)$ est une fonction positive et croissante sur ω, w est fonction positive, croissante et continue sur $\mathbb{R}^+$. Alors

$$|u(t,s)| \leq G^{-1}\left(G(a(t,s)) + b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)\,\Delta\eta\,\Delta\tau\right).$$

Démonstration : La solution de l'équation (6.1) est donnée par

$$u(t,s) = \alpha(t) + \beta(s) - c + \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} F(\tau,\eta,u(\tau,\eta))\,\Delta\eta\,\Delta\tau, \tag{6.5}$$

remplaçons (6.3) et (6.4) dans (6.5), on obtient

$$|u(t,s)| \leq a(t,s) + \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)w(|(\tau,\eta)|)\,\Delta\eta\,\Delta\tau.$$

En appliquant le Théorème (2.10), on obtient

$$|u(t,s)| \leq G^{-1}\left(G(a(t,s)) + b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)\,\Delta\eta\,\Delta\tau\right). \qquad \blacksquare$$

6.5 Inégalité intégrale de type Young dans le cas continu

En 1912, William Henry Young a démontré une remarquable inégalité dont l'énoncé est le suivant :

Théorème 36

Pour toute fonction continue $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ satisfaisant $f(0) = 0$ avec f strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Alors :

$$ab \leq \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt,$$

pour tout $a, b \in [0,+\infty[$, si et seulement si $b = f(a)$.

Démonstration : On pose

$$g(a) = ab - \int_0^a f(t)\,dt, \tag{6.6}$$

alors

$$g'(a) = b - f(a).$$

Puisque f est une fonction strictement croissante, on obtient

$$\begin{cases} g'(a) > a, & \text{pour } \ 0 < a < f^{-1}(b), \\ g'(a) = 0, & \text{pour } \ a = f^{-1}(b), \\ g'(a) < a, & \text{pour } \ a > f^{-1}(b). \end{cases}$$

Alors $g(a)$ est la valeur maximale de la fonction g. D'où

$$g(a) \leq \max g(t) = g(f^{-1}(b)). \tag{6.7}$$

Par intégration, on obtient

$$\begin{aligned} g(f^{-1}(b)) &= bf^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} f(t)\,dt \\ &= \int_0^{f^{-1}(b)} tf^{'}(t)\,dt. \end{aligned}$$

Si on prend $y = f(t)$, alors

$$g(f^{-1}(b)) = \int_0^b f^{-1}(t)\,dt. \tag{6.8}$$

D'après (6.6), (6.7) et (6.8), on obtient

$$ab \leq \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b (f^{-1})(t)\,dt.$$

■

6.6 Inégalités intégrales de type Young

Lemme 18

Soient $V \in \mathrm{C}^1_{rd}$ une fonction strictement croissante et $f \in \mathrm{C}_{rd}$. Alors pour tout $a, b \in \mathrm{C}_{rd}$:

$$\int_a^b f(x)V^{\Delta}(x)\,\Delta x = \int_{V(a)}^{V(b)} f(V^{-1})(y)\,\Delta y.$$

Théorème 37

Soit $g \in \mathrm{C}_{rd}([0,c]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ une fonction strictement croissante avec $c > 0$. Si $g(0) = 0$, $a \in [0,c]_{\mathbb{T}}$ et $b \in [0, g(c)]_{\mathbb{T}}$. Alors :

$$ab \leq \int_0^a g^{\sigma}(x)\,\Delta x + \int_0^b (g^{-1})^{\sigma}(y)\,\Delta y.$$

Démonstration : Puisque la fonction $g^{-1}(x)$ est strictement croissante et $\sigma(s) \geq s$, alors

$$\int_0^b g^{-1}(\sigma(x))\,\Delta x \geq \int_0^b g^{-1}(x)\,\Delta x. \tag{6.9}$$

On pose $V(x) = g(x)$ et $f(x) = x$, alors d'après le lemme (3.1)

$$\int_0^{g^{-1}(b)} g^{\Delta}(x)x\,\Delta x = \int_{g(0)}^{g(g^{-1}(b))} g^{-1}(y)\,\Delta y = \int_0^b g^{-1}(y)\,\Delta y. \tag{6.10}$$

D'autre part on a :

$$\int_0^{g^{-1}(b)} g^{\Delta}(x)x\,\Delta x = g(x)x|_0^{g^{-1}(b)} - \int_0^{g^{-1}(b)} g^{\sigma}(x)\,\Delta x$$

$$= bg^{-1}(b) - \int_0^{g^{-1}(b)} g^\sigma(x)\,\Delta x.$$

D'après (6.9) et (6.10), on obtient :

$$\int_0^a g^\sigma(x)\,\Delta x + \int_0^b (g^{-1})^\sigma(y)\,\Delta y \geq bg^{-1}(b) + \int_{g^{-1}(b)}^0 g^\sigma(x)\,\Delta x. \tag{6.11}$$

Il y a deux cas :

• **Cas a :** *si* $a > g^{-1}(b)$.

D'après la propriété d'une fonction strictement croissante, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\int_{g^{-1}(b)}^a g^\sigma(x)\,\Delta x &\geq \int_{g^{-1}(b)}^a g(g^{-1}(b))\,\Delta x\\ &= ab - bg^{-1}(b),\end{aligned}$$

ceci implique

$$\int_0^a g^\sigma(x)\,\Delta x + \int_0^b (g^{-1})^\sigma(y)\,\Delta y \geq ab.$$

• **Cas b :** *si* $a < g^{-1}(b)$.

Soit $h(x) = g^{-1}(x)$. Alors $a < h(b)$ et d'après le **cas a**

$$ab \leq \int_0^b h^\sigma(x)\,\Delta x + \int_0^b (h^{-1})^\sigma(y)\,\Delta y = \int_0^b (g^{-1})^\sigma(x)\,\Delta x + \int_0^b g^\sigma(y)\,\Delta y.$$

Combinant le **cas a** et le **cas b**, on obtient l'inégalité souhaitée. ∎

Corollaire 3

Soient $p > 1$ *et* $q > 1$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Si* $a, b \geq 0$, *alors :*

$$ab \leq \int_0^a (\sigma(x))^{p-1}\,\Delta x + \int_0^a (\sigma(y))^{q-1}\,\Delta y.$$

Exercice 43

Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. *On a* $\sigma(x) = x$, *alors d'après le corollaire* (3.1)

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

qui est l'inégalité classique de Young.

Théorème 38

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps avec $0 \in \mathbb{T}$. On suppose que $f : [0, +\infty[_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle satisfaisant
(1) $f(0) = 0$;
(2) *f est continue sur $[0, +\infty[_{\mathbb{T}}$, densément continue à droite en 0 ;*
(3) *f est une fonction strictement croissante sur $[0, +\infty[_{\mathbb{T}}$ telle que $\widetilde{\mathbb{T}} = f(\mathbb{T})$ est aussi une échelle de temps.*
Alors pour tout $a \in [0, +\infty[_{\mathbb{T}}$ et $b \in [0, +\infty[_{\widetilde{\mathbb{T}}}$, on a :

$$\int_0^a f(t)\,\Delta t + \int_0^a f(t)\,\nabla t + \int_0^b f^{-1}(y)\,\Delta y + \int_0^b f^{-1}(y)\,\nabla y \geq 2ab,$$

si et seulement si $b = f(a)$.

Démonstration : D'après l'hypothèse **(2)** on a la continuité de la fonction f, on voit que f est à la fois Delta et Nabla intégrable. On définit :

$$F(a,b) = \int_0^a f(t)\,\Delta t + \int_0^a f(t)\,\nabla t + \int_0^b f^{-1}(y)\,\Delta y + \int_0^b f^{-1}(y)\,\nabla y - 2ab.$$

Il suffit de montrer que $F(a,b) \geq 0$.
(A) Premièrement on montre que

$$F(a,b) \geq F(a, f(a)), \quad a \in [0, +\infty[_{\mathbb{T}} \ \ \textit{et} \ \ b \in [0, +\infty[_{\widetilde{\mathbb{T}}}, \ \text{ si et seulement si } \ b = f(a).$$

On a :

$$\begin{aligned} F(a,b) - F(a, f(a)) &= \int_{f(a)}^b (f^{-1}(y) - a)\,\Delta y + \int_{f(a)}^b (f^{-1}(y) - a)\,\nabla y \\ &= \int_b^{f(a)} (a - f^{-1}(y))\,\Delta y + \int_b^{f(a)} (a - f^{-1}(y))\,\nabla y. \end{aligned}$$

Il y a deux cas :
Cas a : si $b > f(a)$. Pour tout $y \in [f(a), b]_{\widetilde{\mathbb{T}}}$, on a

$$f^{-1}(b) \geq f^{-1}(y) \geq f^{-1}(f(a)) = a,$$

par conséquent

$$F(a,b) - F(a, f(a)) = \int_b^{f(a)} (a - f^{-1}(y))\,\Delta y + \int_b^{f(a)} (a - f^{-1}(y))\,\nabla y \geq 0.$$

Puisque $(f^{-1}(y)-a)$ est continue et strictement croissante pour $y \in [f(a),b]_{\widetilde{\mathbb{T}}}$, l'égalité est valable si et seulement si $b = f(a)$.
Cas b : si $b < f(a)$. Pour tout $y \in [f(a),b] \cap f(\mathbb{T})$, on a

$$f^{-1}(b) \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(f(a)) = a,$$

par conséquent

$$F(a,b) - F(a,f(a)) = \int_b^{f(a)} (a - f^{-1}(y))\, \Delta y + \int_b^{f(a)} (a - f^{-1}(y))\, \nabla y \geq 0.$$

Puisque $(a-f^{-1}(y))$ est continue et strictement croissante pour $y \in [f(a),b]_{\widetilde{\mathbb{T}}}$, l'égalité est valable si et seulement si $b = f(a)$.
(B) Ensuite on montre que

$$F(a, f(a)) = 0.$$

On pose $\delta(a) = F(a, f(a))$, alors

$$\delta(a) = \int_0^a f(t)\, \Delta t + \int_0^a f(t)\, \nabla t + \int_0^{f(a)} (a - f^{-1}(y))\, \Delta y + \int_0^{f(a)} (a - f^{-1}(y))\, \nabla y - 2af(a).$$

• D'abord, on suppose que a est un point dispersé à droite. Alors

$$\begin{aligned}\delta^\sigma(a) - \delta(a) &= (\sigma(a)-a)f(a) + (\sigma(a)-a)f^\sigma(a) + (f^\sigma(a) - f(a))f^{-1}(f(a)) \\ &\quad + (f^\sigma(a) - f(a))f^{-1}(f^\sigma(a)) - 2(\sigma(a)f^\sigma(a) - af(a)) \\ &= (\sigma(a)-a)(f(a)+f^\sigma(a)) + (f^\sigma(a)-f(a))(\sigma(a)-a) - 2(\sigma(a)f^\sigma(a) - af(a)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Si a est un point dense à droite, alors $\delta^\Delta(a) = 0$.
• Ensuite, on suppose que a est dense Ã droite. Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,+\infty[_{\mathbb{T}}$ une suite qui converge vers a. Alors

$$\begin{aligned}\delta(a_n) - \delta(a) &= \int_a^{a_n} f(t)\, \Delta t + \int_a^{a_n} f(t)\, \nabla t + \int_{f(a)}^{f(a_n)} (a - f^{-1}(y))\, \Delta y + \int_{f(a)}^{f(a_n)} (a - f^{-1}(y))\, \nabla y \\ &\quad - 2a_n f(a_n) + 2af(a) \\ &= \int_a^{a_n} (f(t) - f(a_n))\, \Delta t + \int_a^{a_n} (f(t) - f(a_n))\, \nabla t + \int_{f(a)}^{f(a_n)} (f^{-1}(y) - a)\, \Delta y \\ &\quad + \int_{f(a)}^{f(a_n)} (f^{-1}(y) - a)\, \nabla y.\end{aligned}$$

Puisque f et f^{-1} sont des fonctions strictement croissantes, alors

$$\begin{aligned}\delta(a_n)-\delta(a) &\geq \int_a^{a_n}(f(t)-f(a_n))\,\Delta t+\int_a^{a_n}(f(t)-f(a_n))\,\nabla t\\ &+\int_{f(a)}^{f(a_n)}(f^{-1}(y)-a)\,\Delta y+\int_{f(a)}^{f(a_n)}(f^{-1}(y)-a)\,\nabla y\\ &=2(a_n-a)(f(a)-f(a_n)).\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\delta(a_n)-\delta(a) &\geq \int_a^{a_n}(f(t)-f(a_n))\,\Delta t+\int_a^{a_n}(f(t)-f(a_n))\,\nabla t\\ &+\int_{f(a)}^{f(a_n)}(f^{-1}(y)-a)\,\Delta y+\int_{f(a)}^{f(a_n)}(f^{-1}(y)-a)\,\nabla y\\ &=2(a_n-a)(f(a_n)-f(a)).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{n\to+\infty}2(f(a_n-f(a))\\ &\leq \lim_{n\to+\infty}\frac{\sigma(a_n)-\sigma(a)}{a_n-a}\\ &\leq \lim_{n\to+\infty}2(f(a_n-f(a))\\ &=0.\end{aligned}$$

Donc $\delta^{\Delta}(a)$ existe, puisque $\delta(a)=0$ pour tout $a\in[0,+\infty[_{\mathbb{T}}$, cela implique que

$$F(a,b)\geq F(a,f(a)),\quad \text{si et seulement si}\quad b=f(a).$$

■

Corollaire 4

Soient $\mathbb{T}$ une échelle de temps avec $0\in\mathbb{T}$ et $p,\,q>0$ deux nombres réels avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Alors pour tout $a\in[0,+\infty[_{\mathbb{T}}$ et $b\in[0,+\infty[_{\mathbb{T}^*}$ avec $\mathbb{T}^*=\{t^{p-1}:t\in\mathbb{T}\}$, on a

$$\int_0^a t^{p-1}\,\Delta t+\int_0^a t^{p-1}\,\nabla t+\int_0^b y^{q-1}\,\Delta y+\int_0^b y^{q-1}\,\nabla t\geq 2ab,$$

si et seulement si $b=a^{p-1}$.

Théorème 39

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps avec $0 \in \mathbb{T}$. On suppose que $f : [0, +\infty[_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle satisfaisant
(1) $f(0) = 0$;
(2) *f est continue sur $[0, +\infty[_{\mathbb{T}}$, densément continue à droite en 0 ;*
(3) *f est une fonction strictement croissante sur $[0, +\infty[_{\mathbb{T}}$ telle que $\widetilde{\mathbb{T}} = f(\mathbb{T})$ est aussi une échelle de temps.*
Alors pour tout $a \in [0, +\infty[_{\mathbb{T}}$ et $b \in [0, +\infty[_{\widetilde{\mathbb{T}}}$, on a :

$$\int_0^a (f(t) + f^\sigma(t))\,\Delta t + \int_0^b (f^{-1}(y) + f^{-1}(\sigma)(y))\,\Delta y \geq 2ab,$$

si et seulement si $b = f(a)$.

Démonstration : Soient g une fonction continue et $a \in [0, +\infty[_{\mathbb{T}}$. On définit la fonction

$$G(a) = \int_0^a g(t)\,\Delta t + \int_0^a g(t)\,\nabla t - \int_0^a (g(t) + g^\sigma(t))\,\Delta t.$$

On a

$$G(0) = 0, \quad G^\Delta(a) = g(a) + g^\sigma(a) - (g(a) + g^\sigma(a)) = 0.$$

Donc $G \equiv 0$, d'après le Théorème (3.3) la preuve est complète. ■

Théorème 40

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps avec $\alpha_1 \in \mathbb{T}$. On suppose que $f : [\alpha_1, +\infty[_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle satisfaisant
(1) $f(\alpha_1) = \beta_1$;
(2) *f est continue sur $[\alpha_1, +\infty[_{\mathbb{T}}$, densément continue Ã droite en α_1;*
(3) *f est une fonction strictement croissante sur $[\alpha_1, +\infty[_{\mathbb{T}}$ telle que $\widetilde{\mathbb{T}} = f(\mathbb{T})$ est aussi une Ã©chelle de temps.*
Alors pour tout $a \in [\alpha_1, +\infty[_{\mathbb{T}}$ et $b \in [\beta_1, +\infty[_{\widetilde{\mathbb{T}}}$, on a :

$$ab \leq \int_{\alpha_1}^a f(t)\,\Delta t + \int_{\beta_1}^b f(t)\,\nabla t + \alpha_1\beta_1,$$

si et seulement si $b \in \{f^\rho(a), f(a)\}$.

Démonstration : D'après l'hypothèse **(2)** on a la continuité de la fonction f, on voit que f et f^{-1} sont à la fois Delta et Nabla intégrables. On définie :

$$F(a,b)=\int_{\alpha 1}^{a} f(t)\,\Delta t+\int_{\beta 1}^{b} f^{-1}(y)\,\nabla y+\alpha_1\beta_1-ab.$$

Il faut montrer que $F(a,b)\geq 0$.
(A) Premièrement on montre que

$$F(a,b)\geq F(a,f(a)),\ \text{ pour } a\in[\alpha_1,+\infty[_{\mathbb{T}}\ \ et\ \ b\in[\beta_1,+\infty[_{\widetilde{\mathbb{T}}} \text{ si et seulement si } b\in\{f^{\rho}(a),f(a)\}.$$

On a :

$$F(a,b)-F(a,f(a))=\int_{f(a)}^{b}(f^{-1}(y)-a)\,\nabla y. \tag{6.12}$$

Il est clair que si $b=f(a)$, l'intégrale tend vers 0 et si $b=f^{\rho}(a)$, on obtient

$$\begin{aligned}F(a,f^{\rho})-F(a,f(a))&=\int_{f^{\rho}(b)}^{f(a)}(a-f^{-1}(y))\,\nabla y\\&=(f(a)-f^{\rho}(b))(a-f^{-1}(f(a)))\\&=0.\end{aligned}$$

Puisque la fonction $f^{-1}(y)$ est strictement croissante pour tout $y\in\widetilde{\mathbb{T}}$. Alors l'intégrale dans l'équation (6.12) est strictement positive pour $b<f^{\rho}(a)$ et $b>f(a)$.
(B) Deuxièmement on montre que

$$F(a,f(a))=F(a,f^{\rho}(a))=0.$$

On pose $\delta(a)=F(a,f(a))$, alors

$$\delta(a)=\int_{\alpha_1}^{a} f(t)\,\Delta t+\int_{\beta_1}^{f(a)} f(t)\,\nabla t-af(a)+\alpha_1\beta_1.$$

• D'abord, on suppose que a est un point dispersé à droite. Alors

$$\begin{aligned}\delta^{\sigma}(a)-\delta(a)&=\int_{\alpha_1}^{\sigma(a)} f(t)\,\Delta t+\int_{f(a)}^{f^{\sigma}(a)} f^{-1}(y)\,\Delta y-\sigma(a)f^{\sigma}(a)+af(a)\\&=(\sigma(a)-a)f(a)+(f^{\sigma}(a)-f(a))f^{-1}(f(\sigma(a))-\sigma(a)f^{\sigma}(a)+af(a)\\&=0.\end{aligned}$$

Si a est un point dispersé à droite, alors $\sigma^{\Delta}(a)=0$.
• Ensuite, on suppose que a est dense Ã droite. Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset[0,+\infty[_{\mathbb{T}}$ une suite

qui converge vers a, alors

$$\begin{aligned}\delta(a_n)-\delta(a) &= \int_a^{a_n} f(t)\,\Delta t + \int_{f(a)}^{f(a_n)} f^{-}(ty)\,\nabla y - a_n f(a_n) + af(a)\\ &\geq (a_n-a)f(a) + (f(a)-f(a_n))a - a_n f(a_n) + af(a)\\ &= (a_n-a)(f(a)-f(a_n)).\end{aligned}$$

Puisque f et f^{-1} sont des fonctions strictement croissantes, alors

$$\sigma(a_n)-\sigma(a) \leq (a_n-a)(f(a_n)-f(a)).$$

Donc

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{n\to+\infty} 2(f(a_n - f(a))\\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma(a_n)-\sigma(a)}{a_n-a}\\ &\leq \lim_{n\to+\infty} 2(f(a_n - f(a))\\ &= 0.\end{aligned}$$

D'où $\delta^{\Delta}(a)$ existe, puisque $\delta(a)=0$ pour tout $a\in[\alpha_1,+\infty[_{\mathbb{T}}$, cela implique que

$$F(a,b) \geq F(a,f(a)) = 0, \quad \text{si et seulement si} \quad b=f(a) \quad ou \quad b=f^{\rho}(a).$$

■

Lemme 19

Soit f une fonction satisfaisant les hypothèses de Théorème (3.5), avec

$$F(a,b) = \int_{\alpha 1}^{a} f(t)\,\Delta t + \int_{\beta 1}^{b} f^{-1}(y)\,\nabla y - ab.$$

Alors pour tout α, $a\in\mathbb{T}$ et β, $b\in\widetilde{\mathbb{T}}$, on a

$$F(a,b)+F(\alpha,\beta) \geq -(\alpha-a)(\beta-b),$$

si et seulement si $\alpha\in\{f^{-1}(b),\sigma(f^{-1}(b))\}$ et $\beta\in\{f^{\rho}(a),f(a)\}$.

Démonstration : Soient $a\in\mathbb{T}$ et $b\in\widetilde{\mathbb{T}}$. D'après le Théorème (3.5), on obtient

$$a\beta \leq \int_{\alpha_1}^{a} f(t)\,\Delta t + \int_{\beta_1}^{b} f(t)\,\nabla t + \alpha_1\beta_1,$$

et

$$\alpha b \leq \int_{\alpha_1}^{a} f(t)\,\Delta t + \int_{\beta_1}^{b} f(t)\,\nabla t + \alpha_1\beta_1,$$

si et seulement si $\alpha \in \{f^{-1}(b), \sigma(f^{-1}(b))\}$ et $\beta \in \{f^\rho(a), f(a)\}$, alors

$$\begin{aligned}
F(a,b) + F(\alpha,\beta) &= \int_{\alpha_1}^{a} f(t)\,\Delta t + \int_{\beta_1}^{b} f^{-1}(y)\,\nabla y + \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_1 - ab \\
&\quad + \int_{\alpha_1}^{\alpha} f(t)\,\Delta t + \int_{\beta_1}^{\beta} f^{-1}(y)\,\nabla y + \alpha_1\beta_1 - \alpha b \\
&= \int_{\alpha_1}^{a} f(t)\,\Delta t + \int_{\beta_1}^{\beta} f^{-1}(y)\,\nabla y + \alpha_1\beta_1 - \alpha b \\
&\quad + \int_{\alpha_1}^{\alpha} f(t)\,\Delta t + \int_{\beta_1}^{b} f^{-1}(y)\,\nabla y + \alpha_1\beta_1 - ab \\
&\geq a\beta + \alpha b - ab - \alpha\beta = -(\alpha - a)(\beta - b).
\end{aligned}$$

■

Théorème 41

Soient $\mathbb{T}$ une échelle de temps et $f : [\alpha_1, \alpha_2]_{\mathbb{T}} \to [\beta_1, \beta_2]_{\tilde{\mathbb{T}}}$ une fonction continue et strictement croissante avec $\tilde{\mathbb{T}} = f(\mathbb{T})$ est aussi une échelle de temps. Alors pour tout A, $a \in [\alpha_1, \alpha_2]_{\mathbb{T}}$ et B, $b \in [\beta_1, \beta_2]_{\tilde{\mathbb{T}}}$, on a

$$\begin{aligned}
(f^{-1}(B) - A)(f^\rho(A) - B)ab &\leq \int_{A}^{a} f(t)\,\Delta t + \int_{B}^{b} f^{-1}(y)\,\nabla y - ab + AB \\
&\leq -(f^{-1}(b) - a)(f^\rho(a) - b),
\end{aligned}$$

si et seulement si $B \in \{f^\rho(a), A\}$ et $b \in \{f^\rho(a), f(a)\}$.

Démonstration : Soit

$$F(a,b) = \int_{\alpha 1}^{a} f(t)\,\Delta t + \int_{\beta 1}^{b} f^{-1}(y)\,\nabla y + \alpha_1\beta_1 - ab,$$

avec $\alpha = f^{-1}(b)$ et $\beta = f(a)$. On a

$$F(a,b) + F(f^{-1}(b), f^\rho(a)) = -(f^{-1}(b) - a)(f^\rho(a) - b).$$

Puisque $f^{-1} \in [\alpha_1, \alpha_2]_{\mathbb{T}}$ et $f^{\rho} \in [\beta_1, \beta_2]_{\tilde{\mathbb{T}}}$, alors d'après le Théorème (3.5), on obtient

$$F(f^{-1}(b), f^{\rho}(a)) \geq 0.$$

Par conséquent, on a

$$0 \leq F(a,b) \leq -(f^{-1}(b) - a)(f^{\rho}(a) - b), \tag{6.13}$$

si et seulement si $b \in \{f^{\rho}(a), f(a)\}$.
Donc pour tout $A \in [\alpha_1, \alpha_2]_{\mathbb{T}}$ et $B \in [\beta_1, \beta_2]_{\tilde{\mathbb{T}}}$, on a

$$0 \leq -(f^{-1}(B) - A)(f^{\rho}(A) - B) - F(A,B), \tag{6.14}$$

si et seulement si $B \in \{f^{\rho}(A), f(A)\}$.
Combinant (6.13) et (6.14), on obtient

$$\begin{aligned} 0 &\leq F(a,b) - (f^{-1}(B) - A)(f^{\rho}(A) - B) - F(A,B) \\ &\leq -(f^{-1}(b) - a)(f^{\rho}(a) - b) - (f^{-1}(B) - A)(f^{\rho}(A) - B) - F(A,B). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} (f^{-1}(B) - A)(f^{\rho}(A) - B)ab &\leq \int_A^a f(t)\,\Delta t + \int_B^b f^{-1}(y)\,\nabla y - ab + AB \\ &\leq -(f^{-1}(b) - a)(f^{\rho}(a) - b). \end{aligned}$$

■

Théorème 42

Soient $\mathbb{T}$ une échelle de temps et $f : [\alpha_1, \alpha_2]_{\mathbb{T}} \to [\beta_1, \beta_2]_{\widetilde{\mathbb{T}}}$ une fonction continue et strictement croissante avec $\widetilde{\mathbb{T}} = f(\mathbb{T})$ est aussi une échelle de temps. Alors pour tout Λ, A, α, $a \in [\alpha_1, \alpha_2]$, on a

$$\begin{aligned} (\Lambda - A)(f^{\rho}(A) - f(\Lambda)) &\leq \int_A^a f(t)\,\Delta t - \int_{\Lambda}^{\alpha} f(t)\,\Delta t + (\alpha - a)f(\alpha) + (\Lambda - A)f(\Lambda) \\ &\leq -(\alpha - a)(f^{\rho}(a) - f(\alpha)), \end{aligned}$$

si et seulement si $\Lambda \in \{\rho(A), A\}$ et $\alpha \in \{\rho(a), a\}$.

Théorème 43

Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante. Alors pour tout α, a, Λ, $A \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} (\Lambda - A)(f(A-1) - f(\Lambda)) &\leq \sum_{n=A}^{a-1} f(n) - \sum_{m=\Lambda}^{\alpha-1} f(m) - (\alpha - a)f(\alpha) + (\Lambda - A) \\ &\leq -(\alpha - a)(f(a-1) - f(\alpha)), \end{aligned}$$

si et seulement si $\Lambda \in \{(A-1), A\}$ et $b \in \{(a-1), a\}$.

Bibliographie

[1] S. Abbas, M. Benchohra and G. M. N'Guerekata, *Topics in fractional differential equations, Developments in Mathematics, 27, Springer, New York, 2012.*

[2] T. Abdeljawad and D. Baleanu, *Caputo q-fractional initial value problems and a q-analogue Mittag-Leffler function, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 16 (2011), no. 12, 4682-4688.*

[3] C. D. Ahlbrandt, M. Bohner and J. Ridenhour, *Hamiltonian systems on time scales, J. Math. Anal. Appl. 250 (2000), no. 2, 561-578.*

[4] R.P. Agarwal, M. Bohner, *Basic calculus on time scales and some of its applications. Results Math. 35 (1999), 3-22.*

[5] A. Ahmadkhanlu and M. Jahanshahi, *On the existence and uniqueness of solution of initial value problem for fractional order differential equations on time scales, Bull. Iranian Math. Soc. 38 (2012), no. 1, 241-252.*

[6] M. R. Ammi and D. F. M. Torres . *Numerical analysis of a nonlocal parabolic problem resulting from thermistor problem. Math Comput. Simulation, 77(2-3) :29-300, 2008.arXiv :0709.0129.*

[7] M. R. Ammi and D. F. M. Torres . *Optimal control of nonlocal thermistor equations. Internat. J. Control. 85(11) :1789-1801,2012a. arXiv : 1206.2873.*

[8] M. R. Ammi and D. F. M. Torres . Existence and uniqueness of a positive solution to generalized nonlocal thermistor problems with fractional-order derivatives. Differ. Equ. Appl., 4(2) :267-276, 2012b.

[9] M. R. Ammi, E. H. El Kinani, and D.F.M. Torres. *Existance and uniquenness of solutions to functional integro-differential fractional equations. J. Differential Equations, pages No. 103, 9, 2012.*

[10] B. Aulbach and S. Hilger, *A unifed approach to continuous and discrete dynamics, in Qual- itative theory of diferential equations (Szeged, 1988), Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 53 North-Holland, Amsterdam, 1990, 37-56.*

[11] B. Aulbach and S. Hilger, *Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale, in Nonlinear dynamics and quantum dynamical systems (Gaus- sig, 1990), 9-20, Math. Res., 59, Akademie-Verlag, Berlin, 1990.*

[12] E. G. Bajlekova, *Fractional evolution equations in Banach spaces, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, 2001.*

[13] N. R. O. Bastos, *Fractional calculus on time scales, PhD thesis (under supervision of D. F. M. Torres), University of Aveiro, 2012.*

[14] N. R. O. Bastos, R. A. C. Ferreira and D. F. M. Torres, *Necessary optimality conditions for fractional difference problems of the calculus of variations, Discrete Contin. Dyn. Syst. 29 (2011), no. 2, 417-437.*

[15] N. R. O. Bastos, R. A. C. Ferreira and D. F. M. Torres, *Discrete-time fractional variational problems, Signal Process. 91 (2011), no. 3, 513-524. arXiv :1005.0252.*

[16] N. R. O. Bastos, D. Mozyrska and D. F. M. Torres, *Fractional derivatives and integrals on time scales via the inverse generalized Laplace transform,* Int. J. Math. Comput. 11 (2011).

[17] M.Benchohra, S Hamani and Sotiris. K . Ntouyas, *Boundary value problems for differential equations with fractional order.*

[18] M. Benchohra, J. Henderson, S.K. Ntouyas, A. Ouahab, *Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay. J. Math. Anal. Appl. 338 (2008), 1340-1350.*

[19] N. Benkhattou, A. M. C. Brito da Cruz, and D. F. M. Torres. *A fractional calculus on arbitrary time scales : fractional differentiation and fractional integration. Signal Process., 107 :230-237, 2015. arXiv : 1405.2813.*

[20] N. Benkhattou, A. M. C. Brito da Cruz, and D. F. M. Torres. *Nonsymmetric and symmetric fractional calculi on arbitrary nonempty closed sets. Math Methods Appl. Sci.,39'2) :261-279, 2016a. arXiv :1502.07277.*

[21] N. Benkhattou, A. Hammoudi, and D.F.M Torres. Existance and uniqueness of solution for a fractional Riemann-Liouville initial value problem on time scales. *J. King Saud Univ. Sci., 28(1) :87-92, 2016b. arXiv :1508.00754.*

[22] N. Benkhettou, S. Hassani and D. F. M. Torres, *A conformable fractional calculus on arbitrary time scales, J. King Saud Univ. Sci. 28 (2016), no. 1, 93-98. arXiv :1505.03134.*

[23] M. Bohner. A. Peterson , *Dynamic equations on time scales, Birkhauser Boston, Boston,MA, (2001a).*

[24] M. Bohner. A. Peterson , *Dynamic equations on time scales, Birkhauser Boston, Boston,MA, (2001b).*

[25] M. Bohner and A. Peterson, *Advances in dynamic equations on time scales, Birkhaauser Boston, Boston, MA, 2003.*

[26] M. Bohner, *The logarithm on time scales, J. Difference Equ. Appl. 11 (2005), no. 15, 1305-1306.*

[27] Cabada, A. Vivero, D. R. *Expression of the lebesgue δ-integral on time scales as a usual lebesgue integral ; application to the calculus of δ-antiderivatives. Mathematical and Computer Modelling, 43(1), 194-207, (2006).*

[28] A. Dorgan. *Existence of three positive solutions for an m-point boundary-value problem on time scales. Electron. J. Differential Equations, No. 149, 10 pages, 2013a.*

[29] A. Dorgan. *Existence of multiple positive solutions for an ρ-laplacian multipoint boundary-value problem on time scales. J. Difference Equ., pages 2013 ;238,23, 2013b.*

[30] K.M. Furati, M.D. Kassim, N.e-. Tatar, *Existence and uniqueness for a problem involving Hilfer fractional derivative. Comput. Math. Appl. 64 (2012), 1616-1626.*

[31] S.-L. Gao, *Fractional time scale in calcium ion channels model, Int. J. Biomath. 6 (2013), no. 4, 1350023, 11 pp.*

[32] Z.-J. Gao, X.-Y. Fu and Q.-L. Li, *Existence of solution for impulsive fractional dynamic equations with delay on time scales, J. Appl. Math. Inform. 33 (2015), no. 3-4, 275-292.*

[33] E. Girejko and D. F. M. Torres. *The existence of solutions for dynamic inclusions on time scales via duality. Appl. Math. Lett., 25(11) :1632-1637, 2012.*

[34] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed point theory, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2003.*

[35] G. Guseinov, *Integration on time scales. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 285(1) :107-127. (2003).*

[36] R. Hilfer, editor. *Applications of fractional calculus in physics. World Scientific Publishing Co., Iuc., River Edge, NJ, 2000.*

[37] S.Hilger, Ein Mabkettenkalkul mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten. *Thèse de Doctorat, Universitat Wurzburg.(1988). 377*

[38] E. Hern´andez, D. O ?Regan and K. Balachandran, *On recent developments in the theory of abstract differential equations with fractional derivatives, Nonlinear Anal. 73 (2010), no. 10, 3462-3471.*

[39] J. Jagan Mohan, *Variation of parameters for nabla fractional difference equations, Novi Sad J. Math. 44 (2014), no. 2, 149-159.*

[40] Katugampola, U. N. (2014). *A new approach to generalized fractional derivatives. Bull. Math. Anal. Appl, 6(4), 1-15.*

[41] W. G. Kelly and A. C. Peterson, *Difference Equation : an Introduction with Applications, Academic Press, San Diego, second edition, 2001.*

[42] Y. Li and L. Yang, *Almost periodic solutions for neutral-type BAM neural networks with delays on time scales, Journal of Applied Mathmatics, vol 2013, Article ID 942309, 13 pages, 2013.*

[43] E. R. Nwaeze and D. F. M. Torres . *Chains rules and inequalities for the BHT fractional calculus on arbitrery time scales. Arab J. Math. (Springer), 6(1) :13-2017. arXiv :1611.09049.*

[44] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives, translated from the 1987 Russian original, Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993.*

[45] I.A. Rus, *Ulam stabilities of ordinary differential equations in a Banach space. Carpathian J. Math. 26 (2010), 103-107.*

[46] D. Vivek, K. Kanagarajan, Seenith Sivasundaram, *Dynamics and stability of pantograph equations via Hilfer fractional derivative. Nonlinear Stud. 4 (2016), 685-698.*

[47] D. Vivek, K. Kanagarajan, S. Harikrishnan, *Analytic study on nonlocal initial value problems for pantograph equations with Hilfer-Hadamard fractional derivative. Int. J. Math. And Appl. 6, No 2-A (2018), 21-32.*

[48] D. Vivek, K. Kanagarajan, E.M. Elsayed, *Some existence and stability results for Hilfer-fractional implicit differential equations with nonlocal conditions. Mediterr. J. Math. 15 (2018), 1-15.*

[49] Vivek, D., Kanagarajan, K., and Harikrishnan, S. (2007). *Existence and uniqueness results for pantograph equations with generalized fractional derivative. Journal of Nonlinear Analysis and Applications (ISPACS).*

[50] J. Wang, Y. Zhang, *Nonlocal initial value problems for differential equations with Hilfer fractional derivative. Appl. Math. Comput. 266 (2015), 850-859.*