REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
SIDI BEL ABBES

Réduction des endomorphismes

Cours et exercices

Présentée par
Fatiha Sahraoui

Table des matières

Chapitre 1

Endomorphisme ou matrice diagonalisable

1.1 Introduction

Prérequis indispensables :

- L'algèbre linéaire générale y compris la notion de somme directe de plus de 2 sous-espaces (les résultats utiles sont rappelés), la notion de matrices semblables et les formules de changement de bases, les déterminants et leurs applications.

Prérequis utiles :

- On va utiliser dans cette ressource le langage des polynômes. Cependant, la connaissance de la construction et de la théorie complète des polynômes n'est pas nécessaire. Seules sont utilisées dans cette ressource les notions de racines et d'ordre de multiplicité d'une racine, qui se comprennent intuitivement à partir de la connaissance des fonctions polynômes acquise dans l'enseignement secondaire. Le choix de l'utilisation de ce vocabulaire est fait car d'une part, il simplifie ici l'exposition et d'autre part il permet des approfondissements, traités dans d'autres ressources.

Objectifs :

- Apprendre toutes les définitions relatives à la diagonalisation des endomorphismes d'espaces de type fini (on dit aussi espaces de dimension finie) ou de matrices carrées.
- Apprendre une condition nécessaire et suffisante de diagonalisation.
- Savoir calculer les valeurs propres d'un endomorphisme (respectivement d'une matrice), déterminer ses sous-espaces propres et dire s'il (respectivement elle) est diagonalisable ou non.

Cette ressource est auto-suffisante. En particulier le vocabulaire concernant les polynômes est rappelé quand cela est nécessaire. Cette ressource suffit aux étudiants dont le but est de s'approprier l'outil. Le résumé, en fin de ressource, comprenant les énoncés fondamentaux et une synthèse méthodologique peut à cet égard être un outil très utile.

1.2 Position du problème

De nombreux problèmes, dans des domaines variés et pas seulement mathématiques, nécessitent pour leur résolution de savoir calculer des puissances de matrices. Or, on s'est rendu compte que les calculs sur les matrices, en particulier le produit, étaient plus simples lorsque la matrice comporte beaucoup de zéros : par exemple, le produit de deux matrices diagonales (respectivement triangulaires de même sens) est encore une matrice diagonale (respectivement triangulaire de même sens). La théorie de la réduction des endomorphismes (respectivement des matrices) est basée sur cette remarque. Il est plus naturel, pour introduire ces notions, de se placer dans le cadre de l'algèbre linéaire et des endomorphismes d'un espace vectoriel de type fini (on dit aussi espace vectoriel de dimension finie). L'application aux matrices en découle très facilement. La problématique générale est la suivante : Si E est un espace vectoriel de type fini, de dimension supérieure ou égale à 1 et f un endomorphisme de E , il s'agit de déterminer s'il existe une base de E telle que la matrice de E par rapport à cette base soit "simple", plus précisément diagonale, ou, à défaut triangulaire. Dans ce chapitre, nous ne traitons que le cas "diagonale".

1.3 Endomorphisme diagonalisable

1.3.1 Introduction

Le but de cette section est d'étudier le problème : étant donné un espace vectoriel E de type fini sur un corps $\mathbb{K}$, égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$, et F un endomorphisme de E , trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une base de E telle que la matrice de f par rapport à cette base soit diagonale, et lorsqu'elle existe, déterminer explicitement une telle base et la matrice diagonale associée à f par rapport à cette base. Tant que cela est possible, nous traitons simultanément le cas d'un espace vectoriel réel et celui d'un espace vectoriel complexe. Cependant la nature du corps de base joue un rôle important dans cette théorie. Pour commencer, un peu de vocabulaire.

1.3.2 Définitions : endomorphisme diagonalisable, valeur propre, vecteur propre

Définition 1.1 (Endomorphisme diagonalisable) *Soit E un espace vectoriel de type fini sur un corps $\mathbb{K}$, égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$, et f un endomorphisme de E . On dit que f est diagonalisable s'il existe une base de E telle que la matrice de f par rapport à cette base soit diagonale.*

Plus précisément, si n est la dimension de E , un endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n\}$ de E et des éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de $\mathbb{K}$ tels que la matrice associée à f dans la base $\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n\}$ soit la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Remarque 1.1 *Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ne sont pas nécessairement distincts.*

Compte tenu de la définition de la matrice d'un endomorphisme par rapport à une base cela signifie que :

$$\forall i \ , 1 \leq i \leq n \ , f(\nu_i) = \lambda_i \nu_i.$$

Les scalaires λ et les vecteurs ν , liés par une relation de la forme $f(\nu) = \lambda\nu$, jouent donc manifestement un rôle important dans cette théorie. Cela nous conduit à la définition des notions de valeur propre et de vecteur propre.

Définition 1.2 (Définition d'un vecteur propre) *Soit E un espace vectoriel de type fini sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et f un endomorphisme de E . Un vecteur ν de E est appelé vecteur propre de f s'il vérifie les deux conditions :*

1. *ν est non nul,*
2. *il existe un élément λ du corps des scalaires $\mathbb{K}$ tel que $f(\nu) = \lambda\nu$.*

Définition 1.3 (Définition d'une valeur propre) *Soit E un espace vectoriel de type fini sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et f un endomorphisme de E . Un élément λ du corps des scalaires $\mathbb{K}$ est appelé valeur propre de f s'il existe un vecteur ν de E , non nul, tel que $f(\nu) = \lambda\nu$.*

Attention
un vecteur propre est non nul.

Remarque 1.2 *Une valeur propre est un élément du corps de base de l'espace vectoriel.*

Vocabulaire
Soit ν un vecteur non nul et λ un élément de $\mathbb{K}$ tels que $f(\nu) = \lambda\nu$. On dit alors que ν est un vecteur propre associé à la valeur propre λ ou que λ est une valeur propre associée au vecteur propre ν . Les deux notions de valeur propre et de vecteur propre sont donc étroitement liées.

Exemple 1.1 *Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2 et $\{e_1, e_2\}$ une base de E .*

1. *On considère l'endomorphisme f de E défini par $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_2$. Il est immédiat que 1 est une valeur propre puisqu'il existe un vecteur non nul, à savoir e_2 , tel que $f(e_2) = 1e_2$. Le vecteur e_2 est un vecteur propre associée à la valeur propre 1.*
2. *On considère l'endomorphisme f de E défini par $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = 0$. Là aussi, il y a une valeur propre visible, c'est 0 et le vecteur e_2 est un vecteur propre associée à la valeur propre 0.*

Remarque 1.3 *Dans ces deux exemples il y a une valeur propre visible mais l'existence d'autres valeurs propres n'a pas été étudiée.*

Exemple 1.2 *On peut retrouver la situation précédente dans un exemple plus général. Soit f un endomorphisme non injectif d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E . Cela signifie que son noyau n'est pas réduit au vecteur nul, autrement dit qu'il existe un vecteur ν non nul tel que $f(\nu) = 0_E = 0_{\mathbb{K}}\nu$. Ceci équivaut à dire que le scalaire $0_{\mathbb{K}}$ est une valeur propre de f. Cet exemple, très important dans la pratique, est à retenir. De plus, il conduit à une caractérisation des valeurs propres d'un endomorphisme avec pour conséquence un moyen effectif pour calculer ses valeurs propres. En effet il y a une difficulté apparente : pour déterminer λ et ν non nul tels que $f(\nu) = \lambda\nu$ on a une relation et deux inconnues. Donc pour calculer les valeurs propres, il est nécessaire de caractériser ces deux notions indépendamment l'une de l'autre.*

1.3.3 Caractérisation des valeurs propres

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie égale à n ($n \geq 1$) . λ est une valeur propre de f si et seulement si :

$$\lambda \in \mathbb{K} \ \text{ et } \ \exists \nu \in E \setminus \{0_E\} \ \text{ tel que } \ f(\nu) = \lambda\nu.$$

Or la propriété "$\exists \nu \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(\nu) = \lambda\nu$" équivaut à la propriété "$\exists \nu \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(\nu) - \lambda\nu = 0_E$". Donc λ est une valeur propre de E si et seulement si :

$$\lambda \in \mathbb{K} \text{ et } \exists \nu \in E \setminus \{0_E\} \text{ tel que } (f - \lambda \mathrm{Id}_E)(\nu) = 0_E.$$

Ce qui équivaut à :

$$\lambda \in \mathbb{K} \text{ et } Ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\} \; .$$

L'intérêt de ce résultat est que ν n'apparaît plus dans la formule et que l'on a réussi à disjoindre λ et ν . Ce résultat peut encore être amélioré en utilisant la caractérisation d'un endomorphisme non injectif dans un espace de type fini, de dimension n . En effet on a les équivalences suivantes :

$$Ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\} \iff rang(f - \lambda \mathrm{Id}_E) < n \iff \det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0.$$

D'où la propriété suivante :

Propriété 1.1 (Caractérisation d'une valeur propre) *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie égale à n $(n \geq 1)$. Un élément λ du corps $\mathbb{K}$ est une valeur propre de f si et seulement si* $\det(f - \lambda Id_E) = 0$.

Cette propriété donne donc un procédé pratique pour déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme.

Exemple 1.3 *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(e_1) = 2e_1 + e_2$, $f(e_1) = e_1 + 2e_2$, où $\{e_1 \; , \; e_2\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les valeurs propres de f.*

Solution : Pour déterminer les valeurs propres de f il faut, d'après la caractérisation précédente, chercher les éléments λ de $\mathbb{R}$, tels que $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$. Pour cela il est naturel d'écrire la matrice A associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et de calculer $\det(A - \lambda I_2)$ qui est égal à $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = 0$.
On a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

. Donc $\det(A - \lambda I_2) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$. Les réels 1 et 3 sont donc les valeurs propres de f .

Exemple 1.4 *Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $g(e_1) = e_1 + e_2$, $g(e_1) = -e_1 + e_2$, où $\{e_1 \ , \ e_2\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les valeurs propres de g .*

<u>**Solution :**</u> De même que précédemment, on écrit la matrice B associée à g dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et on calcule $\det(B - \lambda I_2)$. On a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$\det(B - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

Or il n'y a pas de réels λ tels que $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ soit nul (le discriminant du trinôme est strictement négatif). Donc l'endomorphisme g n'admet pas de valeurs propres.

Exemple 1.5 *Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $h(e_1) = e_1$, $g(e_2) = e_3$, $g(e_3) = -e_2$, où $\{e_1 \ , \ e_2 \ , e_3\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les valeurs propres de h .*

<u>**Solution :**</u> De même que précédemment, on écrit la matrice C associée à h dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on calcule $\det(C - \lambda I_3)$. On a

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$\det(C - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1).$$

La seule valeur réelle de λ annulant $\det(C - \lambda I_3)$ est $\lambda = 1$. Donc h a une seule valeur propre qui est 1 .

1.3.4 Polynôme caractéristique

On a donc vu apparaître naturellement l'expression $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$, où f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie égale n. Elle va être étudiée plus précisément en introduisant le vocabulaire des polynômes.

Soit λ un élément du corps de base $\mathbb{K}$. Pour calculer le déterminant de l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ de E , il est nécessaire (c'est illustré par les exemples précédents) d'introduire la matrice associée à f par rapport à une base de E . Soit donc $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice associée à f par rapport à cette base. Alors la matrice associée à $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ est $A - \lambda I_n$) et par conséquent $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = \det(A - \lambda I_n)$. Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, on a :

$$\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

L'expression explicite de ce déterminant prouve que c'est une expression polynômiale en λ , de degré n , dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à $(-1)^n$.
Si A' est la matrice associée à f par rapport à une autre base $\mathcal{B}'$ de E , les matrices A et A' sont semblables, donc aussi les matrices $A - I_n$ et $A' - I_n$; elles ont donc même déterminant. Donc l'expression $\det(A - I_n)$ ne dépend que de f et non pas du choix de la base de E et de la matrice qui lui est associée dans cette base.
Comme le corps $\mathbb{K}$ considéré est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il est infini et l'on sait qu'il y a un unique polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, associé à la fonction polynôme $\lambda \in \mathbb{K} \mapsto \det(A - \lambda I_n)$. On le note $\det(A - XI_n)$. Plus précisément, si

$\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_0$, on a

$\det(A - XI_n) = (-1)^n X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \alpha_0$.

Remarque 1.4 *Les étudiants qui ne connaissent pas la théorie des polynômes peuvent l'admettre aisément ; tout fonctionne ici, pour les polynômes, comme pour les fonctions polynômes qui sont bien connues. De plus la notation* $\det(A - XI_n)$ *est en fait tout à fait justifiable : en effet la théorie des déterminants des matrices à coefficients dans un corps se généralise aux matrices à coefficients dans un anneau commutatif (de caractéristique différente de 2) par exemple l'anneau des polynômes à coefficients dans un corps* $\mathbb{K}$ *(* $\mathbb{R}$

ou $\mathbb{C}$ ici). Il n'y a donc aucun inconvénient à écrire

$$\det(f - XI_n) = \det(A - XI_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} - X \end{vmatrix}.$$

Dans cette première ressource sur la diagonalisation des endomorphismes, il n'y a aucune difficulté théorique de ce point de vue et l'utilisation de ces propriétés et notations ne pose aucun problème. On peut donc donner la définition suivante :

Définition 1.4 (Polynôme caractéristique) *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n , entier supérieur ou égal à 1 , $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et A la matrice associée à f par rapport à une base de E . Le polynôme $\det(f - XId_E)$ est appelé polynôme caractéristique de f et est noté $P_{car,f}(X)$, i.e.*

$$P_{car,f}(X) = \det(f - XId_E) = \det(A - XI_n).$$

C'est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré n , dont le coefficient dominant est $(-1)^n$.

Exemple 1.6 *Si l'on reprend les exemples précédents, il vient :*
$P_{car,f}(X) = (1-X)(3-X)$, $P_{car,g}(X) = X^2 - 2X + 2$, $P_{car,h}(X) = (1-X)(X^2+1)$.

1.3.5 Caractérisation des valeurs propres d'un endomorphisme à l'aide du polynôme caractéristique

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de ce qui a été vu précédemment.

Théorème 1.1 (Valeurs propres et polynôme caractéristique) *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$- espace vectoriel E de dimension finie n. Un élément λ de $\mathbb{K}$ est valeur propre de f si et seulement si il est racine du polynôme caractéristique de f .*

Définition 1.5 (Racine d'un polynôme) *Soit P un polynôme à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$. On dit qu'un élément a de $\mathbb{K}$ est une racine de P si $P(a) = 0$.*

Attention
L'existence et le nombre de valeurs propres d'un endomorphisme dépendent essentiellement du corps de base de l'espace vectoriel. Si l'on considère par exemple le troisième exemple, le polynôme $P_{car,h}(X) = (1-X)(X^2+1)$ a une seule racine réelle, qui est donc la seule valeur propre de h . Mais si on le considère comme un polynôme à coefficients complexes, il a trois racines qui sont 1 , i et $-i$.
Conséquence importante
il découle immédiatement de cette remarque qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe (c'est-à-dire dont le corps de base est $\mathbb{C}$) admet toujours des valeurs propres (puisque un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ a toujours des racines d'après le théorème de D'Alembert-Gauss) alors qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel réel peut ne pas avoir de valeurs propres, par exemple l'endomorphisme g des exemples précédents n'a pas de valeur propre.

Remarque 1.5 (Remarque sur la définition du polynôme caractéristique) *On trouve aussi dans la littérature mathématique* $\det(XI_n - A)$ *comme définition du polynôme caractéristique. L'avantage de cette autre définition est d'avoir un polynôme unitaire, l'inconvénient en est une source supplémentaire d'erreurs de calculs.*
Or, d'une part d'après les propriétés de déterminants, on a :

$$\det(A - XI_n) = \det(XI_n - A).$$

D'autre part, seules nous intéressent les racines du polynôme caractéristique ainsi que leur ordre de multiplicité (cela sera vu plus loin). Ces propriétés sont évidemment les mêmes que l'on prenne $\det(XI_n - A)$ *ou* $\det(A - XI_n)$ *, ces deux polynômes ne différant que par une constante multiplicative non nulle.*

1.3.6 Sous-espace propre associé à une valeur propre

Une fois déterminées les valeurs propres d'un endomorphisme, s'il y en a, on peut rechercher les vecteurs propres associés. Cela revient à résoudre l'équation linéaire $f(\nu) = \lambda\nu$, c'est-à-dire à déterminer $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

Définition 1.6 (Sous-espace propre associé à une valeur propre) *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de type fini et λ une valeur propre de f . On appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ le noyau de l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$, soit $Ker(f - \lambda Id_E)$.*

Les notations usuelles pour le sous-espace propre associé à une valeur propre λ sont E_λ ou $E(\lambda)$ ou $V(\lambda)$. Il résulte donc de la définition que le sous-espace propre associé à une valeur propre λ est un sous-espace vectoriel dont les éléments sont le vecteur nul et les vecteurs propres associés à λ . Compte tenu de cette définition on a les équivalences :

$$\lambda \text{ valeur propre } \iff E_\lambda \neq \{0_E\} \iff dim E_\lambda \geq 1.$$

1.4 Version matricielle

On peut introduire les mêmes notions pour une matrice carrée. De plus l'interprétation d'une matrice carrée comme la matrice associée à un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ par rapport à la base canonique permet de montrer qu'il y a entière cohérence entre les deux points de vue. C'est l'objet de ce paragraphe.

1.4.1 Notion de matrice diagonalisable, de valeur propre d'une matrice, de vecteur propre d'une matrice

On a les définitions suivantes :

Définition 1.7 (Définitions et propriétés immédiates) *Soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

1. *On dit que M est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale c'est-à-dire s'il existe deux matrices D et P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que D soit diagonale, P inversible et $M = PDP^{-1}$.*
2. *Une matrice colonne V appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un vecteur propre de M si $V \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$; $MV = \lambda V$.*
3. *Un élément λ de $\mathbb{K}$ est une valeur propre de M s'il existe une matrice colonne V , non nul, appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $MV = \lambda V$.*
4. *Un élément λ de $\mathbb{K}$ est une valeur propre de M si et seulement si* $\det(M-\lambda I_n) = 0$.
5. *On appelle polynôme caractéristique de M le polynôme* $\det(M - XI_n)$ *. On le note $P_{car,M}(X)$.*
6. *Un élément λ de $\mathbb{K}$ est une valeur propre de M si et seulement c'est une racine du polynôme caractéristique de M .*
7. *Le sous-espace propre associé à la valeur propre est égal à l'ensemble des V appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $(M - \lambda I_n)V = 0$ autrement dit l'ensemble des matrices*

colonnes $V = (x_1, \ldots, x_n)^T$ *telles que*

$$(M - \lambda I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.7 (Polynôme caractéristique d'une matrice carrée d'ordre 2) *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels ou complexes. Alors,*

$$P_{car,A}(X) = \begin{vmatrix} a-X & b \\ c & d-X \end{vmatrix} = (a-X)(d-X) - bc = X^2 - (a+d)X + ad - bc.$$

En remarquant que $a + d$ *est la trace de la matrice* A *et* $ad - bc$ *son déterminant, cette formule peut être écrite :*

$$P_{car,A}(X) = X^2 - tr(M)X + \det(M).$$

En fait ce résultat se généralise au cas d'une matrice carrée d'ordre n . On a la propriété suivante :

Propriété 1.2 (Quelques coefficients particuliers du polynôme caractéristique) *Soit* $A = (a_{ij})$ *un élément de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *, alors*

$$P_{car,A}(X) = (-1)^n \left(X^n - tr(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M) \right).$$

<u>Preuve :</u>
Le terme constant de $P_{car,A}(X)$ est $P_{car,A}(0)$, soit $\det(A)$.
On a

$$\det(A - XI_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} - X \end{vmatrix}.$$

Seul le terme $\prod_{i=1}^{i=n} (a_{ii} - X)$ du développement fournit des termes en X^{n-1} . En développant ce produit, on obtient un terme en X^{n-1} en "gardant X " dans $n-1$ facteurs et la constante dans le n-ième, le coefficient de X^{n-1} est donc

$$(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = (-1)^{n-1}tr(A).$$

$\square$

La proposition suivante résulte immédiatement de la définition du polynôme caractéristique d'une matrice et des propriétés des déterminants.

Proposition 1.1 (Polynôme caractéristique et matrices semblables) *Soient M et N deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $P_{car,M}(X) = P_{car,N}(X)$.*

Preuve :

Soient M et N deux matrices semblables, il existe donc une matrice inversible Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M = QNQ^{-1}$. Alors $M - XI_n = Q(N - XI_n)Q^{-1}$. Les matrices $M - XI_n$ et $N - XI_n$ sont donc semblables et par conséquent ont le même déterminant.

$\square$

La propriété suivante, utile dans la pratique, résulte immédiatement des calculs de déterminants des matrices triangulaires.

Proposition 1.2 (Valeurs propres d'une matrice triangulaire) *Soit M une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, ses valeurs propres sont les éléments de la diagonale principale.*

Exemple 1.8 *Soit* $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *. Les valeurs propres de M sont 3 et 0 .*

1.4.2 Relation entre endomorphisme diagonalisable et matrice diagonalisable

En partant d'un endomorphisme...

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E . Soit $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice associée à f dans $\mathcal{B}$. Dire que f est diagonalisable équivaut à dire qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D . On sait que deux matrices sont associées à un même endomorphisme par rapport à des bases différentes si et seulement si elles sont semblables.

Donc f est diagonalisable si et seulement si A est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire si et seulement si A est diagonalisable.

En partant d'une matrice carrée...

Soit A une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut considérer l'unique endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ qui lui est associé dans la base canonique. Alors d'après les définitions et les propriétés rappelées ci-dessus, A est diagonalisable si et seulement si f est diagonalisable.

Il est immédiat que les définitions sont telles que si A est la matrice associée à un endomorphisme f par rapport à une base $\mathcal{B}$, alors :

- les valeurs propres de l'un sont les valeurs propres de l'autre (puisque $\det(A - XI_n) = \det(f - X\mathrm{Id}_E)$) ,
- la matrice colonne V associée à un vecteur propre ν de f dans la base $\mathcal{B}$ est un vecteur propre de A et réciproquement le vecteur ν de E qui admet comme composantes dans la base $\mathcal{B}$ les coefficients d'une matrice colonne V vecteur propre de A est un vecteur propre de f (puisque pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $f(\nu) = \lambda\nu \iff AV = \lambda V$).

Par conséquent, les sous-espaces propres associés à λ valeur propre respectivement de f et A sont isomorphes, par l'isomorphisme qui associe à un vecteur la matrice colonne de ses composantes dans la base $\mathcal{B}$.

Il y a donc coïncidence parfaite entre ces notions relatives à une matrice ou à un endomorphisme. Cela justifie la similitude de vocabulaire.

Tous les théorèmes qui suivent, dont la finalité est de trouver des conditions pour qu'un endomorphisme ou une matrice soit diagonalisable, sont donc communs. Les démonstrations théoriques sont faites la plupart du temps dans le cadre vectoriel, c'est-à-dire pour les endomorphismes car elles s'y expriment plus simplement. Par contre, il est clair que pour faire les calculs explicites, et cela a été parfaitement illustré par les exemples traités dans les paragraphes précédents, on utilise le calcul matriciel.

C'est toute la richesse du double langage qui existe dans ce domaine, vectoriel ou matriciel.

Attention :

une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ peut aussi être considérée comme une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$. Il faut bien préciser, pour les matrices, le corps dans lequel on se place. Nous verrons des exemples de matrice à coefficients réels, non diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ce type de problème ne se pose pas pour un endomorphisme car le corps de base de l'espace vectoriel est fixé au départ.

1.5 Propriétés des sous espaces propres

1.5.1 Somme directe de sous-espaces propres

Définition 1.8 (Somme directe de plus de deux sous-espaces vectoriels) *Soit E un espace vectoriel sur un corps K et $E_1, E_2, \ldots, E_p$ p sous-espaces vectoriels de E . La somme $E_1+E_2+\cdots+E_p$ est directe si et seulement si tout élément x de $E_1+E_2+\cdots+E_p$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $x_1+x_2+\cdots+x_p$ avec x_i élément de E_i pour tout $i=1,2,\ldots,p$. On la note alors $E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$.*

Rappel : Quelques résultats sur les sommes directes de plus de deux sous-espaces vectoriels

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E_1, E_2, \ldots, E_p$, des sous-espaces vectoriels de E . La partie de E , notée $E_1+E_2+\cdots+E_p$, définie par

$$E_1+E_2+\cdots+E_p = \{x_1+x_2+\cdots+x_p \ / x_i \in E_i \ , \ \forall i \in \{1,2,\ldots,p\}\}$$

  est un sous-espace vectoriel de E , appelé somme des sous-espaces E_i .
- Une condition nécessaire et suffisante pour que la somme de p sous-espaces vectoriels $E_1, E_2, \ldots, E_p$ soit directe est que 0_E s'écrive de manière unique sous la forme de somme d'éléments des E_i , autrement dit que l'on ait la propriété :

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,p\}, \forall x_i \in E_i \ , \quad x_1+x_2+\cdots+x_p = 0_E \Longrightarrow x_i = 0_E.$$

- Si E est un espace vectoriel de dimension fini et si les sous-espaces $E_1, E_2, \ldots, E_p$ sont en somme directe, on a la relation :

$$dim\left(E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p\right) = \sum_{i=1}^{p} dim\left(E_i\right).$$

On a le théorème suivant :

Théorème 1.2 (Somme directe de sous-espaces propres) *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension fini, qui admet au moins deux valeurs propres distinctes. Soit k un entier supérieur ou égal à 2 , $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes de f et $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_k}$ les sous-espaces propres associés. Alors la somme $E_{\lambda_1}+E_{\lambda_2}+\cdots+E_{\lambda_k}$ est directe, ce qui est noté $E_{\lambda_1}+E_{\lambda_2}+\ldots+E_{\lambda_k} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k}$.*

Preuve : Pour k un entier superieur ou égal à 2, notons $\mathcal{P}(k)$ la propriété suivante :

$$E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \ldots + E_{\lambda_k} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k}.$$

Cette propriété joue un rôle essentiel dans cette théorie. Sa preuve est basée sur une démonstration par récurrence sur k.

- Si $k = 2$, soient λ_1, λ_2 deux valeurs propres distinctes de f . On va montrer que $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$. Pour cela il suffit de prouver que si ν_1 et ν_2 sont deux vecteurs respectivement de E_{λ_1} et E_{λ_2} tel que $\nu_1 + \nu_2 = 0_E$, alors $\nu_1 = \nu_2 = 0_E$. En utilisant la linéarité de f et le fait que $\nu_1 \in E_{\lambda_1}$ et $\nu_2 \in E_{\lambda_2}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \nu_1 + \nu_2 = 0_E \ &\Longrightarrow f(\nu_1 + \nu_2) = f\,(0_E) = 0_E \\ &\Longleftrightarrow \ f(\nu_1) + f(\nu_2) = 0_E \\ &\Longleftrightarrow \ \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 = 0_E \end{aligned}$$

.

Donc les vecteurs ν_1 et ν_2 vérifient les deux égalités

$$\begin{cases} \nu_1 + \nu_2 = 0_E \\ \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 = 0_E. \end{cases}$$

Ces égalités impliquent l'égalité $(\lambda_2 - \lambda_1)\nu_2 = 0_E$ (c'est la relation obtenue en prenant la deuxième ligne moins λ_1 fois la première). Comme d'après l'hypothèse, λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes, il en résulte immédiatement $\nu_2 = 0_E$. D'où, d'après la première relation, $\nu_1 = 0_E$. Et par conséquent la propriété $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

- Supposons la propriété $\mathcal{P}(k)$ vraie jusqu'à $k = p - 1$ et démontrons la pour $k = p$. Le type de calcul est le même que pour $k = 2$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ p valeurs propres distinctes de f et $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ des éléments de $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_p}$ respectivement tels que $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p = 0_E$. Alors on a

$$\begin{aligned} \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p = 0_E \ &\Longrightarrow f(\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p) = f\,(0_E) = 0_E \\ &\Longleftrightarrow \ f(\nu_1) + f(\nu_2) + \cdots + f(\nu_p) = 0_E \\ &\Longleftrightarrow \ \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \cdots + \lambda_p\nu_p = 0_E. \end{aligned}$$

Les vecteurs $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ vérifient donc les deux relations

$$\begin{cases} \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p = 0_E \\ \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \cdots + \lambda_p\nu_p = 0_E. \end{cases}$$

Ces deux relations impliquent $(\lambda_2 - \lambda_1)\nu_2 + \cdots + (\lambda_p - \lambda_1)\nu_p = 0_E$. Or, pour tout entier i compris entre 2 et p , $(\lambda_i - \lambda_1)\nu_i$ est un élément de E_{λ_i} (puisque E_{λ_i} est un sous-espace vectoriel). Alors on est ramené à une somme de $p-1$ éléments des $p-1$ sous-espaces propres E_{λ_i} avec $i \neq 1$ et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Il vient alors, pour tout entier i compris entre 2 et p on a $(\lambda_i - \lambda_1)\nu_i = 0_E$. Comme tous les λ_i sont distincts pour tout $i = 2, \ldots, p$, alors $\nu_i = 0_E$ pour tout $i = 2, \ldots, p$. La relation initiale $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p = 0_E$ donne $\nu_1 = 0_E$, ce qui achève la démonstration.

□

Cette propriété peut aussi être démontrée par l'absurde. La technique de calcul utilisée est la même.

Démonstration : Démonstration par l'absurde de la propriété

Les hypothèses et les notations sont celles de l'énoncé. Supposons que la somme $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_k}$ ne soit pas directe. Il existe donc des vecteurs non tous nuls de $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_k}$ dont la somme est nulle. Le nombre de vecteurs d'une telle somme est un entier compris entre 2 et k . Comme toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément, on peut choisir une telle famille ayant le plus petit nombre d'éléments. Il existe donc un entier r , plus petit entier compris entre 2 et k tel que les propriétés suivantes soient satisfaites :

- il existe des entiers $i_1, i_2, \ldots, i_r$ vérifiant $2 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_r \leq k$,
- il existe des vecteurs $\nu_{i_1}, \nu_{i_2}, \ldots, \nu_{i_r}$ appartenant à $E_{\lambda_{i_1}} \setminus \{0_E\}, E_{\lambda_{i_2}} \setminus \{0_E\}, \ldots, E_{\lambda_{i_r}} \setminus \{0_E\}$ respectivement, tels que $\nu_{i_1} + \nu_{i_2} + \cdots + \nu_{i_r} = 0_E$.

Alors, on a

$$\begin{aligned} \nu_{i_1} + \nu_{i_2} + \cdots + \nu_{i_r} = 0_E \quad & \Longrightarrow f(\nu_{i_1} + \nu_{i_2} + \cdots + \nu_{i_r}) = f\,(0_E) = 0_E \\ & \Longleftrightarrow \ f(\nu_{i_1}) + f(\nu_{i_2}) + \cdots + f(\nu_{i_r}) = 0_E \\ & \Longleftrightarrow \ \lambda_{i_1}\nu_{i_1} + \lambda_{i_2}\nu_{i_2} + \cdots + \lambda_{i_r}\nu_{i_r} = 0_E. \end{aligned}$$

Les vecteurs $\nu_{i_1}, \nu_{i_2}, \ldots, \nu_{i_r}$ vérifient donc les deux relations

$$\begin{cases} \nu_{i_1} + \nu_{i_2} + \cdots + \nu_{i_r} = 0_E \\ \lambda_{i_1}\nu_{i_1} + \lambda_{i_2}\nu_{i_2} + \cdots + \lambda_{i_r}\nu_{i_r} = 0_E. \end{cases}$$

Ces deux relations impliquent $(\lambda_{i_2} - \lambda_1)\nu_2 + \cdots + (\lambda_{i_r} - \lambda_1)\nu_{i_r} = 0_E$. Cette somme de vecteurs de $E_{\lambda_{i_1}}, E_{\lambda_{i_2}}, \ldots, E_{\lambda_{i_r}}$ comporte $r-1$ termes et est nulle. Compte tenu de la définition de r , les vecteurs qui interviennent sont tous nuls et par conséquent

$$(\lambda_{i_2} - \lambda_{i_1})\nu_2 = \cdots = (\lambda_{i_r} - \lambda_{i_1})\nu_{i_r} = 0_E.$$

On a donc une contradiction puisque les vecteurs $\nu_{i_1}, \nu_{i_2}, \ldots, \nu_{i_r}$ sont non nuls et les valeurs propres considérées distinctes deux à deux.

□

1.5.2 Ordre de multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous-espace propre associé

Quelques propriétés des polynômes utiles ici :

Propriété :

Soit P un polynôme à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, et λ un scalaire de $\mathbb{K}$. On rappelle que λ est racine de P si $P(\lambda) = 0$. Alors on a la propriété suivante : l'élément λ de $\mathbb{K}$ est racine de P si et seulement si il existe un polynôme Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ tels que $P(X) = (X - \lambda)Q(X)$. Cela permet de définir la notion d'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme. Soit λ , élément de $\mathbb{K}$, une racine de P . Alors, il existe un entier strictement positif n_λ et un polynôme S à coefficients dans $\mathbb{K}$ tels que : $P(X) = (X - \lambda)^{n_\lambda} S(X)$ et $S(X) \neq 0$. L'entier n_λ est appelé l'ordre de multiplicité de la racine λ . C'est la plus grande puissance de $(X - \lambda)$ que l'on peut mettre en facteur dans $P(X)$. Si n_λ est égal à 1 , on dit que λ est une racine simple de P .

Le théorème suivant établit un lien entre l'ordre de multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.

Théorème 1.3 *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de type fini. On suppose que f a des valeurs propres et soit λ une valeur propre de f d'ordre de multiplicité n_λ en tant que racine du polynôme caractéristique. Alors, si E_λ est le sous-espace propre associé à λ , on a l'inégalité :* $1 \leq dim(E_\lambda) \leq n_\lambda$

Preuve :

La preuve est basée sur le théorème de la base incomplète qui permet d'obtenir une base dans laquelle la matrice associée à a une expression rendant facile le calcul de son polynôme caractéristique.

Soit n la dimension de E . Puisque λ est une valeur propre de f , E_λ n'est pas réduit à 0_E ; soit m_λ sa dimension. On a $1 \leq m_\lambda \leq n$.

- Si $m_\lambda = n$, $E_\lambda = E$, et f est égale à l'application linéaire $\lambda \mathrm{Id}_E$ dont le polynôme caractéristique est égal à $(X - \lambda)^n$. Alors $m_\lambda = n$ et l'inégalité (large) souhaitée est vraie.

- Si $m_\lambda < n$, soit $\{e_1, e_2, \ldots, e_{m_\lambda}\}$ une base de E_λ . D'après le théorème de la base incomplète, il existe $n - m_\lambda$ vecteurs $e_{m_\lambda+1}, e_{m_\lambda}, \ldots, e_n$ de E tels que

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_{m_\lambda}, e_{m_\lambda+1}, e_{m_\lambda}, \ldots, e_n\}$$

soit une base de E . Alors la matrice associée à f dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda I_{m_\lambda} & A \\ 0_{n-m_\lambda} & B \end{pmatrix}.$$

D'après les formules de développement des déterminants, il vient immédiatement $P_{car,f}(X) = (\lambda - X)^{m_\lambda} Q(X)$, ce qui prouve que λ est une racine de $P_{car,f}$ d'ordre au moins égal à m_λ , d'où l'inégalité souhaitée : $m_\lambda \leq n_\lambda$.

$\square$

Une conséquence intéressante de cette propriété est donnée par le corollaire suivant :

Corollaire 1.1 (Dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre simple) *Si λ est une valeur propre simple d'un endomorphisme (respectivement d'une matrice). La dimension du sous-espace propre associée est égale à 1 .*

En effet, d'une part, on sait que E_λ est non réduit à 0_E , donc sa dimension est supérieure ou égale à 1 . D'autre part, d'après la propriété précédente, la dimension de E_λ est inférieure ou égale à l'ordre de multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique, donc $dim(E_\lambda) \leq 1$. D'où le résultat.

$\square$

1.6 Caractérisation des endomorphismes(respectivement matrices) diagonalisables

1.6.1 Traduction de la définition d'un endomorphisme ou matrice diagonalisable

Compte tenu du vocabulaire introduit et des résultats préliminaires qui viennent d'être démontrés, la définition d'endomorphisme diagonalisable peut être traduite de la façon suivante :

Théorème 1.4 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de type fini. On suppose que f possède des valeurs propres, soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'endomorphisme f est diagonalisable.*
2. *Il existe une base de E formée de vecteurs propres de f .*
3. *L'espace vectoriel E est somme directe des sous-espaces propres, c'est-à-dire*

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r} \ .$$

Remarque 1.6 *la troisième condition équivaut à : $dim(E) = \sum_{i=i}^{r} dim(E_{\lambda_i})$ et elle conduit immédiatement à une propriété utile dans la pratique.*

1.6.2 Cas où le polynôme caractéristique admet n (n est la dimension de E) racines distinctes

C'est en fait un corollaire du théorème précédent.

Corollaire 1.2 (Condition suffisante de diagonalisation) *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n (ou A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$). Si le polynôme caractéristique de f (respectivement de A) admet n racines distinctes, alors f (respectivement A) est diagonalisable.*

Preuve :
D'après l'hypothèse, f a exactement n valeurs propres distinctes que l'on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Comme la dimension d'une somme directe de sous-espaces est égale à la somme des dimensions, on a

$$dim(E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}) = \sum_{i=i}^{n} dim(E_{\lambda_i}).$$

On a vu que, pour toute valeur propre λ_i , on a l'inégalité $dim(E_{\lambda_i}) \geq 1$. Il en résulte l'inégalité $dim(E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}) \geq n$. Or $dim(E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n})$ est un sous-espace vectoriel de E donc sa dimension est inférieure ou égale à la dimension de E , soit n . Par conséquent $dim(E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}) = n$ et on a l'égalité $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n} = E$, ce qui achève la démonstration compte tenu de la condition 3. du théorème ci dessus.

$\square$

Attention :
Cette condition est suffisante mais pas nécessaire. Pour s'en convaincre il suffit de considérer la matrice unité I_n . Elle est trivialement diagonalisable puisqu'elle est déjà diagonale, pourtant son polynôme caractéristique qui est $P_{car,I_n}(X) = (X-1)^n$, n'a pas de racines simples dès que n est supérieur ou égal à 2 .

Exemple 1.9 *Cette propriété, utilisée correctement, est très commode. Soit par exemple la matrice d'ordre 3 suvante :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il est immédiat qu'elle est diagonalisable puisque son polynôme caractéristique, égal à $P_{car,A}(X) = -(X-1)(X-\pi)(X-3)$ *, admet trois racines distinctes.*

1.6.3 Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation faisant intervenir le polynôme caractéristique

Le résultat essentiel de cette ressource est le théorème suivant :

Théorème 1.5 (Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation faisant intervenir le poly
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n , (ou A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$). Pour que f (respectivement A) soit diagonalisable, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

1. *Le polynôme caractéristique de f (respectivement de A) se factorise en un produit de polynômes du premier degré (non nécessairement distincts) à coefficients dans $\mathbb{K}$.*
2. *Pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.*

Vocabulaire : La propriété précédente prouve l'intérêt des deux entiers liés à une valeur propre : son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique et la dimension du sous-espace propre qui lui est associé. Il peut être commode d'introduire le vocabulaire suivant, classique dans ce domaine.

Définition 1.9 (Ordre de multiplicité algébrique et géométrique d'une valeur propre)
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n , (respectivement A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$) et λ une valeur propre de f (respectivement de A). L'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique est appelé ordre de multiplicité algébrique de λ . La dimension du sous-espace propre associé à λ est appelé ordre de multiplicité géométrique de λ .

Remarque 1.7 *Que signifie la condition 1. du théorème ? Cela veut dire que le polynôme caractéristique de f (respectivement de A) s'écrit sous la forme*

$$P_{car,f}(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{n_{\lambda_1}} \cdots (X - \lambda_r)^{n_{\lambda_r}},$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ distincts deux à deux. Ce sont les valeurs propres de f . Si un polynôme vérifie la condition 1., on dit qu'il est scindé dans $\mathbb{K}$. Par exemple, les polynômes : $(X-1)^2(X+1)$, $-(X-1)(X-\pi)(X-3)$ sont scindés dans $\mathbb{R}$, alors que le polynôme (X^2+1) ne l'est pas.

On peut remarquer que tout polynôme à coefficients dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est scindé dans $\mathbb{C}$.

Preuve du théorème :

La démonstration est faite dans le cadre vectoriel, donc pour un endomorphisme. La traduction dans le cadre matriciel est immédiate d'après ce qui a été vu précédemment.

- Condition nécessaire :

  Supposons f diagonalisable. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de f (cela sous-entend que les λ_i sont distincts deux à deux). Il existe donc une base de vecteurs propres. En regroupant les vecteurs propres associés à une même valeur propre, on obtient une base dans laquelle la matrice associée à f est diagonale de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_{\lambda_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{m_{\lambda_r}} \end{pmatrix},$$

  où m_{λ_i} est la dimension de E_{λ_i} pour $i = 1, 2, \ldots, r$. En calculant le polynôme caractéristique de f à partir de cette matrice, on obtient

$$P_{car,f}(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_r}}.$$

  Cela prouve à la fois que le polynôme caractéristique de f est scindé dans $\mathbb{K}$, et d'autre part que l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i est m_{λ_i} qui est la dimension de E_{λ_i} .

- Condition suffisante :

  La première hypothèse se traduit par

$$P_{car,f}(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{n_{\lambda_r}},$$

où les éléments de $\mathbb{K}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, distincts deux à deux, sont les valeurs propres de f . On en déduit immédiatement, puisque le degré du polynôme caractéristique est égal à la dimension de l'espace vectoriel, l'égalité $\sum_{i=1}^{r} m_{\lambda_i} = n$. On a vu précédemment que la somme des sous-espaces propres est directe. Compte tenu des propriétés de la dimension d'une somme directe on a donc $dim(E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}) = \sum_{i=1}^{r} dim(E_{\lambda_i})$ et donc d'après la deuxième hypothèse $dim(E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}) = \sum_{i=1}^{r} m_{\lambda_i} = n$ Donc $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$ est un sous-espace vectoriel de E , qui a même dimension que E et par conséquent, $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r} = E$. Cela prouve que f est diagonalisable.

$\square$

Exemple 1.10 *Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E . Soit f l'endomorphisme de E défini par :*

$$\begin{cases} f(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + e_3 \\ f(e_2) = -e_1 - e_3 \\ f(e_3) = e_1 + e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

f est-il diagonalisable ?

Solution :
La matrice associé à f dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Première étape : détermination du polynôme caractéristique de f .
On a

$$P_{car,f}(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 3-X & -1 & 1 \\ 2 & -X & 1 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix}.$$

En remplaçant la troisième colonne c_3 par la somme de la deuxième et de la troisième, soit par $c_3 + c_2$, on obtient :

$$P_{car,f}(X) = \begin{vmatrix} 3-X & -1 & 0 \\ 2 & -X & 1-X \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 3-X & -1 & 0 \\ 2 & -X & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

et donc en remplaçant la deuxième ligne L_2 par $L_2 - L_3$, on obtient :

$$P_{car,f}(X) = (1-X)\begin{vmatrix} 3-X & -1 & 0 \\ 1 & -X+1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-X)((3-X)(1-X)+1).$$

D'où $P_{car,f}(X) = (1-X)(X-2)^2$.
Le polynôme caractéristique de est scindé dans $\mathbb{R}$. Les valeurs propres sont 2 qui est une valeur d'ordre de multiplicité 2 , et 1 qui est une racine simple.
Deuxième étape : détermination de la dimension des sous-espaces propres.
La dimension du sous-espace associé à une valeur propre simple est égale à 1 , donc la dimension de E_1 est égale à 1 . Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 revient à déterminer les vecteurs $\nu = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ de E tels que $(A - 2I_3)\nu = 0_E$, i. e.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cette équation matricielle équivaut au système :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & -x_2 & + & x_3 & = 0 \\ 2x_1 & + & -2x_2 & + & x_3 & = 0 \\ x_1 & + & -x_2 & & & = 0 \end{array}\right.$$

En remplaçant la deuxième ligne L_2 par $L_2 - L_1$, on trouve que

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & -x_2 & + & x_3 & = 0 \\ x_1 & + & -x_2 & & & = 0 \\ x_1 & + & -x_2 & & & = 0 \end{array}\right.$$

Ce qui équivaut à $x_1 = x_2$. Par conséquent $\nu = x_1(e_1 + e_2)$. Donc E_2 est l'espace vectoriel engendré par le vecteur non nul $e_1 + e_2$ (car e_1 et e_2 sont linéairement indépendents). D'où la dimension de E_2 est égale à 1 . Or 2 est une valeur propre double, donc l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

Exemple 1.11 *Soit la matrice à coefficients dans* $\mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.*
2. *Trouver une matrice invertible P et une autre matrice diagonale D dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A = PDP^{-1}$.*
3. *Calculer A^n pour tout n un entier positif.*

Solution :

1. Montrons que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Première étape : Détermination du polynôme caractéristique de A .
   On a
   $$P_{car,A}(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}.$$
   En remplaçant la première ligne L_1 par $L_1 + L_2 + L_3$ on obtient :
   $$P_{car,A}(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 3-X & 3-X \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = (3-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix},$$
   et donc en remplaçant successivement la deuxième colonne c_2 par $c_2 - c_1$ et la troisième colonne c_3 par $c_3 - c_1$ on obtient :
   $$P_{car,A}(X) = (3-X) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -X & 0 \\ 1 & 0 & -X \end{vmatrix} = (3-X)X^2.$$
   Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}$. Les valeurs propres sont 0 qui est une valeur d'ordre de multiplicité 2 , et 3 qui est une valeur propre simple.
   Deuxième étape : détermination de la dimension des sous-espaces propres.
   La dimension du sous-espace associé à une valeur propre simple est égale à 1 , donc la dimension de E_3 est égale à 1 . Déterminer le sous-espace propre associé

à la valeur propre 0 revient à déterminer les vecteurs $\nu = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tels que $A\nu = 0_{\mathbb{R}^3}$, i.e.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cette équation matricielle équivaut à l'équation $x + y + z = 0$. Donc la dimension de E_0 est égale à 2 .
Donc pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique. La matrice est donc diagonalisable.

2. Déterminons les matrices P et D vérifiants $A = PDP^{-1}$.
Première étape : recherche d'une base de vecteurs propres.

Les éléments $\nu = (x, y, z)$ de E_0 sont tels que $x + y + z = 0$, ou encore $z = -x - y$. Donc

$$\begin{aligned} E_0 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = -x - y\} \\ &= \{(x, y, -x - y) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x, y \in \mathbb{R}\} \ . \end{aligned}$$

Les deux vecteurs $\nu_1 = (1, 0, -1)$ et $\nu_2 = (0, 1, -1)$ engendrent E_0 , et sont linéairement indépendants. Donc l'ensemble $\{\nu_1, \nu_2\}$ forme une base de E_0 . Les éléments $\nu = (x, y, z)$ de E_3 sont tels que $(A - 3I_3)\nu = 0_{\mathbb{R}^3}$, i.e.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui équivaut au système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} -2x & + & y & + & z & = 0 \\ x & + & -2y & + & z & = 0 \\ x & + & y & + & -2z & = 0 \end{array} \right. .$$

On résout ce système par la méthode du pivot de Gauss et l'on obtient une base de E_3 formée du vecteur $\nu_3 = (1, 1, 1)$. On a donc $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calculons A^n pour n un entier positif.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Remarque 1.8 *Nous avons suivi dans cet exemple la méthode standard. On aurait aussi pu obtenir certains résultats par des remarques faites en observant la matrice et en utilisant des résultats généraux d'algèbre linéaire.*
Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est égale à A . La matrice A ayant trois colonnes égales, est évidemment de rang 1 . Donc f est de rang 1 et son noyau est de dimension 2 (application du théorème du rang). Cela prouve que 0 est valeur propre, que la dimension du sous-espace propre associé est égale à 2 . Par conséquent, 0 a un ordre de multiplicité algébrique supérieur ou égal à 2. D'où 0 est une racine double ou triple de polynôme caractéristique associé à f . Donc, il y a deux cas possibles pour $P_{car,f}(X)$: ou bien 0 est une racine triple de $P_{car,f}(X)$, ou bien il y a une autre racine qui sera simple. Pour en décider deux façons :
<u>Première façon</u> : en désignant par $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on peut écrire, pour tout i compris entre 1 et 3 : $f(e_i) = f(e_1 + e_2 + e_3)$. Par la linéairité de f on déduit que $f(e_1 + e_2 + e_3) = 3f(e_1 + e_2 + e_3)$. Comme le vecteur $e_1 + e_2 + e_3$ n'est pas nul, cela prouve que 3 est une valeur propre de f ; $e_1 + e_2 + e_3$ étant un vecteur propre associé.
<u>Deuxième façon</u> : on a vu que le coefficient de X^{n-1} du polynôme caractéristique de A est égal à $(-1)^{n-1}tr(A)$. Or ici, on peut écrire $P_{car,f}(X) = -(X - \lambda)X^2$, et l'on sait que la trace de A est égale à 3. Donc on a $(-1)^2 3 = \lambda$ (coefficient de X^2). Par conséquent, 3 est une valeur propre de A. Donc $P_{car,f}(X) = -(X - \lambda)X^2$ et d'après le théorème f et donc A sont diagonalisables. On a obtenu directement une base de E_3 , à savoir le vecteur $e_1 + e_2 + e_3$. Tout ceci a pu être fait sans calculs. Pour avoir une base de E_0 , on utilise le fait que $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3)$. En effet, cela prouve que les vecteurs $\nu_1 = e_1 - e_2$, $\nu_2 = e_2 - e_3$ sont dans le noyau de f (qui est égal à E_0). Or ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, et E_0 est de dimension 2 . D'où, l'ensemble $\{\nu_1, \nu_2\}$ forme une base de E_0 . Finalement on a obtenu tous les résultats sans faire de calculs. Tout a été basé sur les relations $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3)$.

Exemple 1.12 *Soit A la matrice appartenant à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que A n'est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.*
2. *Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.*
3. *Trouver une matrice invertible P et une autre matrice diagonale D dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ vérifiant $A = PDP^{-1}$.*
4. *Calculer A^n pour tout n un entier positif.*

Solution :

1. Montrons que A n'est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
   Première étape : Détermination du polynôme caractéristique de A .
   On a

$$\begin{aligned} P_{car,A}(X) = \det(A - XI_4) &= \begin{vmatrix} 2-X & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-X & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -X & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2-X & 0 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -X & 1 \\ -1 & -X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)(1-X)(X^2+1). \end{aligned}$$

   Le calcul ci-dessus utilise les règles de calcul par blocs des déterminants mais il est aussi possible de développer le déterminant par rapport à la première ligne, puis le déterminant d'ordre 3 obtenu par rapport à la première colonne.
   Ce polynôme n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$, puisque le polynôme $X^2 + 1$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$. D'où A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
2. Montrons que A n'est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.
   On peut écrire le polynôme caractéristique de A sous la forme :

$$P_{car,A}(X) = (2-X)(1-X)(X-i)(X+i).$$

   Il est scindé dans $\mathbb{C}$ et admet 4 racines simples : $1, 2, i, -i$. Donc la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

3. Déterminons une matrice invertible P et une autre matrice diagonale D dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ vérifiant $A = PDP^{-1}$.
   La matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, ça veut dire qu'elle est semblable (dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$) à une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$. En résolvant les systèmes qui permettent de déterminer les sous-espaces propres (on sait d'avance qu'ils sont de dimension 1) on trouve que :
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+i & 1-i \\ 0 & 0 & 1+i & 1-i \\ 0 & 0 & -1+i & -1-i \end{pmatrix}$$
4. Calculons A^n pour n un entier positif.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors
$$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-i)^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Propriété 1.3 *Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. On suppose que son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$. Alors la trace de A est égale à la somme des valeurs propres de A , comptées autant de fois que l'exige leur ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.*

Preuve : Comme le polynôme caractéristique est scindé, il s'écrit
$$P_{car,A}(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{n_1}(X-\lambda_2)^{n_2}\cdots(X-\lambda_r)^{n_r},$$
où $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{R}$ tels que $n_1+n_2+\cdots+n_r = n$, et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ des valeurs distinctes de $\mathbb{K}$. D'autre part, on a déjà vu que
$$P_{car,A} = (-1)^n X^+ (-1)^n tr(A) X^{n-1} + \cdots + \det(A).$$
Le résultat est obtenu en comparant les coefficients de X^{n-1} dans ces deux expressions.

□

1.7 Résumé

Dans ce paragraphe, sont rappelés les résultats incontournables de ce chapitre et une synthèse méthodologique décrivant les différentes opérations nécessaires dans la pratique pour déterminer si un endomorphisme ou une matrice est diagonalisable ou non.

1.7.1 Les énoncés fondamentaux de cette théorie

Somme directe de sous-espaces propres

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que f a au moins deux valeurs propres distinctes. Soit k un entier supérieur ou égal à 2, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes de f et $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_k}$ les sous-espaces propres associés. Alors, la somme $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_k}$ est directe, autrement dit tout élément de $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_k}$ s'écrit de manière unique comme somme d'éléments des sous-espaces $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_k}$. Cela est noté $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_k} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}$.

Propriété de la dimension des sous-espaces propres

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que f a des valeurs propres et soit λ une valeur propre de f d'ordre de multiplicité n_λ en tant que racine du polynôme caractéristique. Alors, si E_λ est le sous-espace propre associé à λ , on a l'inégalité : $1 \leq dim(E_\lambda) \leq n_\lambda$.

Caractérisation générale d'un endomorphisme diagonalisable

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de type fini. On suppose que f possède des valeurs propres, soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes

1. L'endomorphisme f est diagonalisable.
2. Il existe une base de E formée de vecteurs propres de f .
3. L'espace vectoriel E est somme directe des sous-espaces propres, c'est-à-dire $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}$.

Condition suffisante de diagonalisation

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n , $(n \geq 1)$ (ou A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$). Si le polynôme caractéristique de f (respectivement de A) admet n racines distinctes, alors f (respectivement A) est diagonalisable.

Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation faisant intervenir le polynôme caractéristique

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n , $(n \geq 1)$ (ou A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$). Pour que f (respectivement A) soit diagonalisable, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

1. Le polynôme caractéristique de f (respectivement de A) se factorise en un produit de polynômes du premier degré (non nécessairement distincts) à coefficients dans

$\mathbb{K}$.

2. Pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

1.7.2 Synthèse méthodologique

Pour déterminer dans la pratique si un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de type fini ou une matrice de A est diagonalisable on peut procéder de la façon suivante :

Action	Outils
Calculer le polynôme caractéristique	Calcul d'un déterminant dépendant d'un paramètre en le factorisant
Déterminer ses racines dans K et leur ordre de multiplicité. Décider si le polynôme caractéristique est ou non scindé dans K.	Factorisation d'un polynôme en des polynômes à coefficients dans K.
Si la réponse est non, s'arrêter. Si la réponse est oui, continuer.	La condition nécessaire et suffisante de diagonalisation faisant intervenir le polynôme caractéristique.
Chercher la dimension des sous-espaces propres relatifs aux valeurs propres multiples s'il y en a (on sait d'avance que la dimension des sous-espaces propres relatifs aux valeurs propres simples est égale à 1).	Résolution de systèmes linéaires par la méthode du Pivot de Gauss (on sait d'avance que les systèmes considérés ne sont pas de Cramer).
Dire si l'endomorphisme ou la matrice est diagonalisable en utilisant le théorème.	La condition nécessaire et suffisante de diagonalisation faisant intervenir le polynôme caractéristique.
Si l'endomorphisme ou la matrice est diagonalisable, déterminer une base de vecteurs propres. Pour cela il suffit d'avoir une base de chacun des sous-espaces propres. En effet, leur somme est directe et égale à E, donc la réunion de ces bases est une base de l'espace E. En fait à ce stade il ne reste plus qu'à chercher une base pour les racines simples du polynôme caractéristique s'il y en a.	Résolution de systèmes linéaires par la méthode du Pivot de Gauss (on sait d'avance que les systèmes considérés ne sont pas de Cramer).

L'étude est terminée : si l'endomorphisme (ou la matrice) est diagonalisable on a une base de vecteurs propres de f ou une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.

1.8 Application de la diagonalisation

1.8.1 Méthode pour calculer la puissance d'une matrice ou d'un endomorphisme diagonalisable

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, une des motivations du problème de la diagonalisation est le calcul des puissances de matrices ou d'endomorphismes. En effet le calcul des puissances de matrices diagonales est simple comme le prouve la propriété suivante :

Propriété 1.4 (Puissance d'une matrice diagonale) *Soit D une matrice diagonale à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$,*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout entier strictement positif k , on a

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Preuve :
La preuve est immédiate, en faisant une démonstration par récurrence sur k .

□

On a le théorème :

Théorème 1.6 (Puissance d'une matrice diagonalisable) *Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diagonalisable, i.e. il existe une matrice inversible P et une autre diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Alors, pour tout entier k positif, on a $A^k = PD^kP^{-1}$.*

Preuve :
On fait une démonstration par récurrence sur k : La propriété est vraie pour $k = 1$. On la suppose vraie jusqu'à $k = n$ et on la démontre pour $k = n + 1$. On a

$$A^{k+1} = A^kA = (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}).$$

En utilisant l'associativité du produit de matrices on trouve

$$A^{k+1} = (PD^k)(P^{-1}P)(DP^{-1}) = (PD^k)(I_n)(DP^{-1}) = (PD^kDP^{-1}) = PD^{k+1}P^{-1}.$$

La propriété est donc héréditaire.

□

On a donc un procédé pour calculer les puissances d'un endomorphisme diagonalisable.

Il faut remarquer qu'ici le point de vue matriciel a été privilégié pour la démonstration car la formulation des calculs dans ce cadre est beaucoup plus simple.

Exemple 1.13 *Calculer A^k , avec k est un élément de $\mathbb{N}^*$ et A est la matrice réelle suivante :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution : Le polynôme caractéristique de A est égal à $P_{car,A}(X) = (X-1)(X_3)$. Comme A est une matrice d'ordre 2 et admet deux veleurs propres simples : 1 et 3 , donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Déterminons maintenant une matrice diagonale D et une matrice inversible P verifiants : $A = PDP^{-1}$.
On a $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Trouver P revient à chercher une base des vecteurs propres de $\mathbb{R}^2$. Il suffit donc de déterminer les sous-espaces propres E_1 , E_3 associés aux valeurs propres $1, 3$ respectivement.
Soit $\nu = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$\begin{aligned}
\nu \in E_1 \iff A\nu = \nu \quad &\iff (A - I_2)\nu = 0_{\mathbb{R}^2} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\
&\iff y = -x.
\end{aligned}$$

D'où

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 0\} = \{x(1, -1) \ / \ x \in \mathbb{R}\} = Vec\{(1, -1)\}.$$

En suivant les mêmes étapes on trouve $E_3 = Vec\{(1, 1)\}$.
D'où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $A^k = PD^kP^{-1}$, i.e.

$$A^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^k+1 & 3^k-1 \\ 3^k-1 & 3^k+1 \end{pmatrix}.$$

1.9 Questionnaire de compréhension immédiate 1

Question 1 *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension 2 dont le polynôme caractéristique est : $P_{car,f}(X) = X^2 - 3X + 2$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?*

☐	*Oui*
☐	*Non*
☐	*On ne peut conclure*

Question 2 *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E de dimension 2 dont le polynôme caractéristique est : $P_{car,f}(X) = X^2 - 3X + 2$. On a vu dans la question précédente que les valeurs propres de f sont 1 et 2 et que f est diagonalisable. Soit $\{u_1, u_2\}$ une base de E formée de vecteurs propres de f . Cocher les matrices pouvant être la matrice de f dans une telle base :*

☐	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
☐	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
☐	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
☐	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Question 3 *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension 3 dont le polynôme caractéristique est : $P_{car,f}(X) = (X^2 - 3X + 2)(3 - X)$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?*

☐	*Oui*
☐	*Non*
☐	*On ne peut conclure*

Question 4 *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension 3 dont le polynôme caractéristique est :* $P_{car,f}(X) = (X^2 - 2X + 2)(3 - X)$ *. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?*

☐	*Oui*
☐	*Non*
☐	*On ne peut conclure*

Question 5 *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension 3 dont le polynôme caractéristique est :* $P_{car,f}(X) = (X^2 - 2X + 1)(3 - X)$ *. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?*

☐	*Oui*
☐	*Non*
☐	*On ne peut conclure*

Question 6 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. On suppose que f est distinct de l'application identitique de E , i.e. $f \neq Id_E$ et le polynôme caractéristique est :* $P_{car,f}(X) = (-1)^n(X-1)^n$ *. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?*

☐	*Oui*
☐	*Non*
☐	*On ne peut conclure*

Question 7 *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable dont le polynôme caractéristique est :* $P_{car,f}(X) = (3 - X)(X - 1)^2$ *. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ égale à la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Cocher les matrices semblables à A :*

☐	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
☐	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
☐	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
☐	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
☐	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Question 8 *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable dont le polynôme caractéristique est : $P_{car,f}(X) = (3-X)(X-1)^2$. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ égale à la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On désigne par E_1 le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$. Quelle est la dimension de E_1 ?*

☐	*0*
☐	*1*
☐	*2*
☐	*3*

Question 9 *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable dont le polynôme caractéristique est : $P_{car,f}(X) = (3-X)(X-1)^2$. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ égale à la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On désigne par E_3 le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$. Quelle est la dimension de E_3 ?*

☐	*0*
☐	*1*
☐	*2*
☐	*3*

Question 10 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}AP$, où P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et D la matrice suivante :*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Quel est le polynôme caractéristique de A ?

☐	$P_{car,A}(X) = (1-X)(2-X)(3-X)$
☐	$P_{car,A}(X) = (1-X)^2(2-X)(3-X)$
☐	$P_{car,A}(X) = (1-X)(2-X)^2(3-X)$

Question 11 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension* 4*. On suppose que l'ensemble des valeurs propres de f est $\{0,1\}$. Cocher les formes possibles du polynôme caractéristique de f .*

☐	$P_{car,f}(X) = X(1-X)$
☐	$P_{car,f}(X) = X^2(1-X)$
☐	$P_{car,f}(X) = X^2(1-X)^2$
☐	$P_{car,f}(X) = X^3(1-X)$
☐	$P_{car,f}(X) = (1-X)^4$
☐	$P_{car,f}(X) = X(1-X)(X^2+1)$
☐	$P_{car,f}(X) = X(1-X)^3$

1.10 Questionnaire de compréhension immédiate 2

Question 12 *La proposition suivante est-elle vraie ? ń Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à une matrice diagonalisable est diagonalisable. ż*

☐	*Oui*
☐	*Non*

Question 13 *Un des résultats du cours est que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. La réciproque est-elle vraie ? C'est-à-dire : deux matrices ayant même polynôme caractéristique sont-elles nécessairement semblables ?*

☐	*Oui*
☐	*Non*

Question 14 *Parmi les matrices suivantes cocher celles pour lesquelles on peut affirmer qu'elles sont diagonalisables par une simple observation (sans recherche des vecteurs propres nécessitant la résolution d'un système). On pourra considérer chacune de ces matrices comme la matrice d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ relativement à la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$.*

☐	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
☐	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
☐	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
☐	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
☐	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
☐	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
☐	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
☐	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Question 15 *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ la matrice relativement à la base canonique est :* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. *Cocher les triplets qui sont des vecteurs propres de f .*

☐	*(1 , 0 , 0)*
☐	*(0 , 1 , 0)*
☐	*(0 , 0 , 1)*
☐	*(0 , 0 , 0)*
☐	*(2 , -1 , 0)*
☐	*(1 , 1 , 0)*
☐	*(0 , 0 , 2)*
☐	*(1 , 1 , -1)*
☐	*(0 , 3 , -2)*
☐	*(0 , -1 , 1)*

Question 16 *Dans l'exercice précédent on a obtenu les résultats suivants pour l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$:* $(0,0,1)$ *est vecteur propre associé à la valeur propre 3 ,*

$(2,-1,0)$ *est vecteur propre associé à la valeur propre 0 ,*
$(0,0,2)$ *est vecteur propre associé à la valeur propre 3 ,*
$(1,1,-1)$ *est vecteur propre associé à la valeur propre 0 ,*
$(0,3,-2)$ *est vecteur propre associé à la valeur propre 0 .*
Ces informations sont-elles suffisantes pour décider si l'endomorphisme f est diagonalisable ou non ?

☐	*Oui, l'endomorphisme est diagonalisable*
☐	*Oui, l'endomorphisme n'est diagonalisable*
☐	*Non, les informations sont insuffisantes pour conclure*

1.11 Exercices thécniques avec solutions

1.11.1 Fiche 1

Cette ressource est composée de quatre exercices. Dans chacun des exercices il s'agit de dire si une matrice ou un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est diagonalisable et de le diagonaliser lorsque cela est possible.
Prérequis indispensables : Le cours sur les endomorphismes ou matrices diagonalisables.
Objectifs :

- Savoir calculer les valeurs propres d'un endomorphisme (ou d'une matrice), déterminer ses sous-espaces propres.
- Appliquer la condition suffisante, ou la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation.
- Calculer les puissances d'une matrice diagonalisable.

Temps de travail prévu : 90 minutes

Exercise 1 (20 minutes) *Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ sont respectivement les matrices A et C :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour chacun des endomorphismes répondre aux questions suivantes :

1. *L'endomorphisme est-il diagonalisable ?*
2. *Si oui, trouver une base formée de vecteurs propres de f et la matrice de f dans cette base.*

Solution(1) :

1. Pour déterminer les valeurs propres de f on calcule le polynôme caractéristique de f .

$$P_{car,f}(X) = \det(A - XI_2) = \begin{vmatrix} 3-X & -2 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2).$$

L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ a deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$, il est donc diagonalisable.
Soit E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ et $u = (x, y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} u \in E_1 \iff f(u) = u \iff (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})(u) = 0_{\mathbb{R}^2} &\iff (A - I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y. \end{aligned}$$

D'où

$$u \in E_1 \iff \exists x \in \mathbb{R} \ / \ u = x(1,1).$$

C'est-à-dire, E_1 est la droite vectorielle de base $u_1 = (1,1)$.
On détermine de même le sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$. Soit $u = (x, y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} u \in E_2 \iff f(u) = 2u \iff (f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})(u) = 0_{\mathbb{R}^2} &\iff (A - 2I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff x = 2y. \end{aligned}$$

D'où

$$u \in E_2 \iff \exists y \in \mathbb{R} \ / \ u = y(2,1).$$

C'est-à-dire, E_2 est la droite vectorielle de base $u_2 = (2,1)$.
Les vecteurs u_1 et u_2 sont des vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes. Ils sont donc linéairement indépendants et forment une base de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2\}$. Comme $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = 2u_2$, la matrice D de f dans la

base $\mathcal{B}'$ est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = PDP^{-1}$.

2. Pour déterminer les valeurs propres de g on calcule le polynôme caractéristique de g .

$$P_{car,g}(X) = \det(C - XI_2) = \begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ -1 & 4-X \end{vmatrix} = X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2.$$

L'endomorphisme g de $\mathbb{R}^2$ a une seule valeur propre, d'ordre de multiplicité 2 , égale à 3 . Si g était diagonalisable, la matrice C serait semblable à la matrice $3I_2$, il existerait donc une matrice inversible P telle que $C = P(3I_2)P^{-1}$ et donc on aurait l'égalité $C = 3I_2$. On arrive à une contradiction. L'endomorphisme g n'est donc pas diagonalisable.

Exercise 2 (25 minutes) *On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que f est diagonalisable, trouver une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et la matrice A' de f dans cette base.*
2. *Déterminer, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, la matrice A^n .*

Solution(2) :

1. Pour déterminer les valeurs propres de f on calcule le polynôme caractéristique de f .

$$P_{car,f}(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}.$$

En ajoutant la ligne 2 à la ligne 1 on fait apparaître une factorisation par $2 - X$.

$$P_{car,f}(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 2-X & 0 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = (2-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}.$$

On enlève la colonne 1 à la colonne 2 et on obtient

$$P_{car,f}(X) = (2-X)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = -X(1-X)(2-X).$$

L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ a trois valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$, il est donc diagonalisable.
Soit E_{λ_1} le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_1 et $u = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Alors,

$$u \in E_{\lambda_1} \iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=-x \\ z=0 \end{cases}$$

D'où

$$u \in E_{\lambda_1} \iff \exists x \in \mathbb{R} \ / \ u = x(1,-1,0).$$

C'est-à-dire, E_{λ_1} est la droite vectorielle de base $u_1 = (1, -1, 0)$.
Soit E_{λ_2} le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_2 et $u = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Alors,

$$u \in E_{\lambda_2} \iff (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x-z=0 \\ x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=-x \\ z=x \end{cases}$$

D'où

$$u \in E_{\lambda_2} \iff \exists x \in \mathbb{R} \ / \ u = x(1,-1,1).$$

C'est-à-dire, E_{λ_2} est la droite vectorielle de base $u_2 = (1, -1, 1)$.
Soit E_{λ_3} le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_3 et $u = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Alors,

$$u \in E_{\lambda_3} \iff (f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \iff (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

D'où

$$u \in E_{\lambda_3} \iff \exists y \in \mathbb{R} \ / \ u = y(0,1,1).$$

C'est-à-dire, E_{λ_3} est la droite vectorielle de base $u_3 = (0,1,1)$.
Les vecteurs u_1 , u_2 et u_3 sont des vecteurs propres associés à trois valeurs propres distinctes. Ils sont donc linéairement indépendants et forment une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$. Comme $f(u_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $f(u_2) = u_2$, $f(u_3) = 2u_3$, la matrice A' de f dans la nouvelle base B' est :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

et $A = PA'P^{-1}$.

2. $A = PA'P^{-1}$ et pour tout entier n strictement positif, $A^n = PA'^n P^{-1}$ et

$$A'^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

La matrice P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ à la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, i.e.

$$\begin{cases} u_1 = e_1 - e_2 \\ u_2 = e_1 - e_2 - e_3 \\ u_3 = e_2 + e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = u_2 + u_3 \\ e_2 = -u_1 + u_2 + u_3 \\ e_3 = u_1 - u_2 \end{cases}$$

D'où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^n = PA'^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 1 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercise 3 (25 minutes) *Dans chacune des questions suivantes, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Si oui, donner une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et la matrice A' de f dans cette base, en précisant le lien entre A et A' .*

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solution(3) :

1. Pour déterminer les valeurs propres de f on calcule le polynôme caractéristique de f .

$$P_{car,f}(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -2-X & -2 & 1 \\ -2 & 1-X & -2 \\ 1 & -2 & -2-X \end{vmatrix}.$$

En retranchant à la colonne 1 la colonne 3 on fait apparaître une factorisation par $3 + X$.

$$P_{car,f}(X) = \begin{vmatrix} -3-X & -2 & 1 \\ 0 & 1-X & -2 \\ 3+X & -2 & -2-X \end{vmatrix} = (3+X) \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1-X & -2 \\ 1 & -2 & -2-X \end{vmatrix}.$$

On ajoute la ligne 1 à la ligne 3 et on obtient

$$P_{car,f}(X) = (3+X)\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1-X & -2 \\ 0 & -4 & -1-X \end{vmatrix} = -(3+X)(X^2-9) = -(X+3)^2(X-3).$$

Le polynôme caractéristique de f est scindé dans $\mathbb{R}$. L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ a deux valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = -3$ est une valeur propre double, $\lambda_2 = 3$ est une valeur propre simple. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si, pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique. La dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre simple est égale à 1. Donc f est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre double est égale à 2. Soit E_{λ_1} le sous-espace propre associé à la valeur propre double $\lambda_1 = -3$ et $u = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Alors,

$$\begin{aligned} u \in E_{\lambda_1} \iff f(u) = -3u \quad & \iff (A + 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ -2x + 4y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \\ & \iff x - 2y + z = 0 \end{aligned}$$

D'où

$$u \in E_{\lambda_1} \iff \exists x, y \in \mathbb{R} \;/\; u = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 2).$$

C'est-à-dire, E_{λ_1} est le plan vectorielle de base $\{u_1 = (1, 0, -1)\ ,\ u_2 = (0, 1, 2)\}$. L'endomorphisme f est donc diagonalisable.

On détermine maintenant une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f . Les vecteurs u_1 et u_2 sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$, ils forment donc une base de E_{λ_1} .

Soit E_{λ_2} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$ et $u = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Alors,

$$u \in E_{\lambda_2} \iff (f - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \iff (A - 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} -5x - 2y + z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - 5z = 0 \end{array} \right.$$

En retranchant la première équation de la deuxième et la troisième équation le système se transforme en un système équivalent :

$$\left\{ \begin{array}{l} -5x - 2y + z = 0 \\ 3x - 3z = 0 \\ 6x - 6z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} z = x \\ y = -2x \end{array} \right.$$

D'où

$$u \in E_{\lambda_2} \iff \exists x \in \mathbb{R} \ / \ u = x(1, -2, 1).$$

C'est-à-dire, E_{λ_2} est la droite vectorielle de base $u_3 = (1, -2, 1)$.
$\{u_1, u_2\}$ est une base de E_{λ_1} , $\{u_3\}$ est une base de E_{λ_2} , donc la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre et les vecteurs u_1 , u_2 et u_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$. Comme $f(u_1) = -3u_1$, $f(u_2) = -3u_2$, $f(u_3) = 3u_3$, la matrice A' de f dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$ est :

$$A' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

et $A = PA'P^{-1}$.

2. Pour déterminer les valeurs propres de f on calcule le polynôme caractéristique de f .

$$P_{car,f}(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1 - X & 1 & 0 \\ 1 & 2 - X & 1 \\ -1 & 0 & 1 - X \end{vmatrix}.$$

En ajoutant la ligne 2 à la ligne 3 on fait apparaître une factorisation par $2 - X$.

$$P_{car,f}(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 0 & 2-X & 2-X \end{vmatrix} = (2-X) \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On enlève la colonne 3 à la colonne 2 ajoute la ligne 1 à la ligne 3 et on obtient

$$P_{car,f}(X) = (2-X) \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2-X)((X-1)^2 - 1) = -X(X-2)^2.$$

Le polynôme caractéristique de f est scindé dans $\mathbb{R}$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ a deux valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = 0$ est une valeur propre simple, $\lambda_2 = 2$ est une valeur propre double. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si, pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique. La dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre simple est égale à 1. Donc f est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre double est égale à 2. Soit E_{λ_2} le sous-espace propre associé à la valeur propre double $\lambda_2 = 2$ et $u = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Alors,

$$\begin{aligned} u \in E_{\lambda_1} \iff f(u) = 2u \quad &\iff (A - 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = x \\ z = -x \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$u \in E_{\lambda_2} \iff \exists x \in \mathbb{R} \ / \ u = x(1, 1, -1).$$

C'est-à-dire, E_{λ_2} est une droite vectorielle. L'endomorphisme f n'est donc pas diagonalisable. on ne peut pas trouver une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f .

Exercise 4 (20 minutes) *1. Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$. On considère A comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si λ est une valeur* *propre complexe et non réelle de A alors $\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre de A et que si T , un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ alors $\overline{T}$ est un vecteur propre correspondant à $\overline{\lambda}$. (où $\overline{T}$ désigne le vecteur dont les composantes sont les conjuguées des composantes de T).*

2. *On considère la matrice A définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) *Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

   (b) *Trouver, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.*

Solution(4) :

1. Les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique de A est à coefficients réels. Donc si λ , un élément de $\mathbb{C}$, est une racine de ce polynôme alors $\overline{\lambda}$ est aussi une racine de ce polynôme.
   Soit T une matrice colonne appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Si T est un vecteur propre de A associé à λ , on a alors $AT = \lambda T$, d'où $\overline{AT} = \overline{\lambda T}$ (propriétés du passage au conjugué dans $\mathbb{C}$) et, comme A est à coefficients dans $\mathbb{R}$, $A\overline{T} = \overline{\lambda T}$, et ça veut dire que $\overline{T}$ est un vecteur propre de A associé à $\overline{\lambda}$. D'où, si T est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ alors $\overline{T}$ est un vecteur propre de A associé à $\overline{\lambda}$.

2. Pour déterminer les valeurs propres de A on calcule le polynôme caractéristique de A .

$$P_{car,A}(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix}.$$

   En ajoutant à la colonne 1 les deux autres colonnes on fait apparaître une factorisation par $(2 - X)$.

$$P_{car,A}(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 0 \\ 2-X & 2-X & 1 \\ 2-X & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (2-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix}.$$

On enlève successivement la ligne 1 à la ligne 2 et à la ligne 3 et on obtient

$$P_{car,A}(X) = (2-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-X & 1 \\ 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix} = (2-X)((1-X)^2+1).$$

Le polynôme $((1-X)^2+1)$ n'a pas de racine réelle. Le polynôme caractéristique de A n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$, la matrice A n'est donc pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère maintenant la matrice A comme une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$. Le polynôme caractéristique de A est alors scindé dans $\mathbb{C}$ et

$$P_{car,A}(X) = (2-X)(1+i-X)(1-i-X).$$

La matrice A a trois valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1+i$, $\lambda_3 = 1-i$. Elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Soit E_{λ_1} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$ et $T = (x,y,z)$ un vecteur de $\mathbb{C}^3$. Alors,

$$\begin{aligned} T \in E_{\lambda_1} \iff AT = 2T \quad & \iff (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff \begin{cases} -x+y=0 \\ -x+y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \\ & \iff x = y = z \end{aligned}$$

D'où

$$T \in E_{\lambda_1} \iff \exists x \in \mathbb{R} \ / \ T = x(1,1,1).$$

C'est-à-dire, E_{λ_1} est la droite vectorielle de base $\{T_1 = (1,1,1)\}$.

Soit E_{λ_2} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 1+i$ et $T = (x,y,z)$ un vecteur de $\mathbb{C}^3$. Alors,

$$T \in E_{\lambda_2} \iff AT = (1+i)T \quad \iff (A-(1+i)I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -ix + y = 0 \\ -x + (1-i)y + z = 0 \\ x - iz = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = ix \\ z = -ix \end{cases}$$

D'où

$$T \in E_{\lambda_1} \iff \exists x \in \mathbb{R} \ / \ T = x(1, i, -i).$$

C'est-à-dire, E_{λ_2} est la droite vectorielle de base $\{T_2 = (1, i, -i)\}$.

Comme $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$, alors, d'après la première question, E_{λ_3} est la droite vectorielle de base $\{T_3 = \overline{T_2} = (1, -i, +i)\}$.

La matrice A est semblable à la matrice D avec

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

et $A = PA'P^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ 1 & -i & i \end{pmatrix}.$$

1.11.2 Test 1

Cette ressource est composée de quatre exercices. Dans chacun des exercices il s'agit de dire si une matrice ou un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est diagonalisable et de le diagonaliser lorsque cela est possible.

Prérequis indispensables : Le cours sur les endomorphismes ou matrices diagonalisables.

Objectifs :

- Savoir calculer les valeurs propres d'un endomorphisme (ou d'une matrice), déterminer ses sous-espaces propres.
- Appliquer la condition suffisante, ou la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation.

- Calculer les puissances d'une matrice diagonalisable.

Temps de travail prévu : 65 minutes

Exercise 5 *Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E . On considère l'endomorphisme f de E défini par :*

$$\begin{cases} f(e_1) = 5e_1 + 6e_2 + 4e_3 \\ f(e_2) = -3e_1 - 4e_2 - 4e_3 \\ f(e_3) = 2e_1 + 4e_2 + 5e_3 \end{cases}$$

Montrer que f est diagonalisable, trouver une base de E formée de vecteurs propres de f et écrire la matrice de f dans cette base.

Exercise 6 *On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que f est diagonalisable, trouver une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et la matrice A' de f dans cette base.*
2. *Déterminer, pour tout entier n strictement positif, la matrice A^n .*

Exercise 7 *On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f . En déduire que f n'est pas diagonalisable.*
2. *Soit $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ où $u_1 = (1, 0, 0, -1), u_2 = (1, 1, 1, 1), u_3 = (0, 1, 1, 0), u_4 = (1, -1, 0, 1)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et écrire la matrice de f dans cette base.*

Solution du test

Solution(5) :

Soit A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer les valeurs propres de f on calcule le polynôme caractéristique de f .

$$P_{car,f}(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 5-X & -3 & 2 \\ 6 & -4-X & 4 \\ 4 & -4 & 5-X \end{vmatrix}.$$

En ajoutant la colonne 2 à la colonne 1 on fait apparaître une factorisation par $(2-X)$:

$$P_{car,f}(X) = \begin{vmatrix} 2-X & -3 & 2 \\ 2-X & -4-X & 4 \\ 0 & -4 & 5-X \end{vmatrix} = (2-X)\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -4-X & 4 \\ 0 & -4 & 5-X \end{vmatrix}.$$

On enlève la ligne 1 à la ligne 2 et on obtient

$$P_{car,f}(X) = (2-X)\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1-X & 2 \\ 0 & -4 & 5-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2-4X+3) = (2-X)(X-3)(X-1).$$

L'endomorphisme f de E a trois valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$, il est donc diagonalisable.
Soit E_{λ_1} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ et $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ un vecteur de E . Alors,

$$u \in E_{\lambda_1} \iff f(u) = u \iff (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 0 \\ 6x - 5y + 4z = 0 \\ 4x - 4y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2x \\ z = x \end{cases}$$

D'où

$$u \in E_{\lambda_1} \iff \exists x \in \mathbb{R} \ / \ u = x(e_1 + 2e_2 + e_3).$$

C'est-à-dire, E_{λ_1} est une droite vectorielle de base $u_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$.
Soit E_{λ_2} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ et $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ un vecteur de E . Alors,

$$u \in E_{\lambda_1} \iff f(u) = 2u \quad \iff (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 3x - 3y + 2z = 0 \\ 6x - 6y + 4z = 0 \\ 4x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x - 3y + 2z = 0 \\ 4x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x - 3y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$$

D'où

$$u \in E_{\lambda_2} \iff \exists x \in \mathbb{R} \ / \ u = x(e_1 + e_2).$$

C'est-à-dire, E_{λ_2} est une droite vectorielle de base $u_2 = e_1 + e_2$.
Soit E_{λ_3} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = 3$ et $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ un vecteur de E . Alors,

$$u \in E_{\lambda_3} \iff f(u) = 3u \quad \iff (A - 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - 3y + 2z = 0 \\ 6x - 7y + 4z = 0 \\ 4x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - 3y + 2z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2x \\ z = 2x \end{cases}$$

D'où

$$u \in E_{\lambda_3} \iff \exists x \in \mathbb{R} \ / \ u = x(e_1 + 2e_2 + 2e_3).$$

C'est-à-dire, E_{λ_1} est une droite vectorielle de base $u_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.
Les vecteurs u_1, u_2 et u_3 sont des vecteurs propres associés à trois valeurs propres distinctes. Ils sont donc linéairement indépendants et forment une base de E . Soit $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$. Comme $f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = 2u_2$, $f(u_3) = 3u_3$, la matrice D de f dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$ est :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

et $A = PA'P^{-1}$.

Solution(6) :

1. Pour déterminer les valeurs propres de f on calcule le polynôme caractéristique de f .

$$P_{car,f}(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix}.$$

En ajoutant à la ligne 1 la somme des deux autres lignes on fait apparaitre une factorisation par $(2 - X)$:

$$P_{car,f}(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 2-X & 2-X \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} = (2-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix}.$$

On retranche la ligne 1 à la ligne 3 et on obtient

$$P_{car,f}(X) = (2-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 0 & 0 & -X-1 \end{vmatrix} = (2-X)(X+1)^2.$$

Le polynôme caractéristique de f est scindé dans $\mathbb{R}$.
L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ a deux valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = -1$ est une

valeur propre double, $\lambda_2 = 2$ est une valeur propre simple.
L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si, pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique. La dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre simple est égale à 1. Donc f est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre double est égale à 2.
Soit E_{λ_1} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$ et $u = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Alors,

$$\begin{aligned}
u \in E_{\lambda_1} \iff f(u) = -u \quad &\iff (A + I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \\
&\iff x + y + z = 0
\end{aligned}$$

D'où E_{λ_1} est un plan vectorielle $\mathbb{R}^3$. L'endomorphisme est donc diagonalisable.
On détermine maintenant une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f .
Les vecteurs $u_1 = (1, 0, -1)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$ sont deux vecteurs non colinéaires de E_{λ_1} , ils forment donc une base de E_{λ_1} .
Soit E_{λ_2} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ et $u = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Alors,

$$\begin{aligned}
u \in E_{\lambda_1} \iff f(u) = 2u \quad &\iff (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où
$$u \in E_{\lambda_1} \iff \exists x \in \mathbb{R} \ / \ u = x(1,1,1).$$
C'est-à-dire E_{λ_1} est une droite vectorielle $\mathbb{R}^3$ de base $\{u_3 = (1,1,1)\}$.
$\{u_1, u_2\}$ est une base de E_{λ_2} , $\{u_3\}$ est une base de E_{λ_1} , donc la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre et les vecteurs u_1, u_2 et u_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$. Comme $f(u_1) = -u_1$, $f(u_2) = -u_2$, $f(u_3) = 2u_3$, la matrice A' de f dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$ est
$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$
et $A = PA'P^{-1}$.

2. $A = PA'P^{-1}$ et pour tout entier n strictement positif, $A^n = PA'^nP^{-1}$ et
$$A'^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$
La matrice P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ à la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, i.e.
$$\begin{cases} u_1 = e_1 - e_3 \\ u_2 = e_2 - e_3 \\ u_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = \frac{1}{3}(2u_1 - u_2 + u_3) \\ e_2 = \frac{1}{3}(-u_1 + 2u_2 + u_3) \\ e_3 = \frac{1}{3}(-u_1 - u_2 + u_3) \end{cases}$$
D'où
$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
et
$$A^n = PA'^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + (-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Solution(7) :

1. Pour déterminer les valeurs propres de f on calcule le polynôme caractéristique de f .

$$P_{car,f}(X) = \det(A - XI_4) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -X & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2-X & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1-X \end{vmatrix}.$$

En ajoutant à la colonne 1 la somme des trois autres colonnes on fait apparaitre une factorisation par $(1-X)$ pour obtenir

$$P_{car,f}(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & -2 & 0 \\ 1-X & -X & -1 & 1 \\ 1-X & 1 & -2-X & 1 \\ 1-X & 2 & -2 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -X & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2-X & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1-X \end{vmatrix}.$$

On retranche successivement la ligne 1 à chacune des autres lignes et on obtient

$$\begin{aligned} P_{car,f}(X) &= (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -X-2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -X & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X) \begin{vmatrix} -X-2 & 1 & 1 \\ -1 & -X & 1 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)^2(X^2+2X+1) = (1-X)^2(1+X)^2. \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de f est scindé dans $\mathbb{R}$.

L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ a deux valeurs propres doubles distinctes : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$.

L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si, pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique. La dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre simple est égale à 1. Donc f est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre double est égale à 2.

Soit E_{λ_1} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$ et $u = (x, y, z, t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Alors,

$$u \in E_{\lambda_1} \iff f(u) = -u \quad \iff (A + I_4) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ x + y - z + t = 0 \\ x + y - z + t = 0 \\ 2y - 2z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ t = 0 \end{cases}$$

D'où

$$u \in E_{\lambda_1} \iff \exists y \in \mathbb{R} \ / \ u = y(0, 1, 1, 0).$$

C'est-à-dire E_{λ_1} est une droite vectorielle $\mathbb{R}^4$ de base $\{v_1 = (0, 1, 1, 0)\}$.
Soit E_{λ_2} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ et $u = (x, y, z, t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Alors,

$$u \in E_{\lambda_1} \iff f(u) = u \quad \iff (A - I_4) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2y - 2z = 0 \\ x - y - z + t = 0 \\ x + y - 3z + t = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = z \\ t = -x + 2y \end{cases}$$

D'où

$$u \in E_{\lambda_2} \iff \exists x, y \in \mathbb{R} \ / \ u = x(1, 0, 0, -1) + y(0, 1, 1, 2).$$

C'est-à-dire E_{λ_2} est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_2 = (1, 0, 0, -1)$ et $v_3 = (0, 1, 1, 2)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment donc une base de E_{λ_2} .
L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si, pour chaque valeur propre,

la dimension du sous-espace propre associé est égale à son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique. La dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre double $E_{\lambda_1} = -1$ est égale à 1. L'endomorphisme f n'est donc pas diagonalisable.

2. Soit $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ où $u_1 = (1, 0, 0, -1), u_2 = (1, 1, 1, 1), u_3 = (0, 1, 1, 0)$ et $u_4 = (1, -1, 0, 1)$. Montrons que $\mathcal{B}'$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$. On a

$$\det(u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On ajoute la ligne 1 à la ligne 4 et on obtient

$$\det(u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Les quatre vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 sont linéairement indépendants, i.e. $\mathcal{B}'$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$.
Comme $\mathcal{B}'$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ et $Card(\mathcal{B}') = 4 = dim(\mathbb{R}^4)$, donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
Les composantes des vecteurs u_1 et u_2 vérifient les conditions d'appartenance au sous-espace propre E_{λ_2} : $\left\{ \begin{array}{l} y = z \\ t = -x + 2y \end{array} \right.$, on a donc $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$.
Le vecteur u_3 appartient à E_{λ_1} , donc $f(u_3) = -u_3$.
Il reste à écrire le vecteur $f(u_4)$ dans la base $\mathcal{B}'$. On cherche d'abord les coordonnés de $f(u_4)$ dans la base canonique, $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$, en utilisant la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$. On a

$$f(u_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

d'où $f(u_4) = (-1, 2, 1, -1)$. On peut remarquer que $f(u_4) = u_3 - u_4$. Si on ne trouve pas directement cette relation, on cherche (a, b, c, d) appartenant à $\mathbb{R}^4$ tel que $f(u_4) = au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4$. On a

$$
\begin{aligned}
au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = f(u_4) \quad & \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+b+d=-1 \\ b+c-d=2 \\ b+c=1 \\ -a+b+d=-1 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+b+d=-1 \\ b+c-d=2 \\ b+c=1 \\ 2b+2d=-2 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+b+d=-1 \\ b+c-d=2 \\ d=-1 \\ b+d=-1 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow (a,b,c,d) = (0,0,1,-1).
\end{aligned}
$$

Comme $f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = u_2$, $f(u_3) = -u_3$ et $f(u_4) = u_3 - u_4$, la matrice A' de f dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$ est

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et $A = PA'P^{-1}$.

1.11.3 Fiche 2

Cette ressource est composée de trois exercices. Dans le premier exercice il s'agit de montrer qu'un endomorphisme de est diagonalisable. Dans le deuxième exercice, un endomorphisme de est défini à l'aide de paramètres réels et on cherche une condition nécessaire et suffisante que doivent vérifier ces paramètres pour que l'endomorphisme soit diagonalisable. Le troisième exercice est le calcul du polynôme caractéristique d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Prérequis indispensables :

- Les propriétés d'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, en particulier le théorème du rang.

- Le cours sur les endomorphismes ou matrices diagonalisables.

Objectifs :

- Utiliser la définition d'une valeur propre d'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Savoir calculer les valeurs propres d'un endomorphisme, déterminer ses sous-espaces propres.
- Appliquer la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation.
- Calculer le polynôme caractéristique d'une matrice carrée d'ordre en utilisant un raisonnement par récurrence.

Temps de travail prévu : 55 minutes

Exercise 8 (15 minutes) *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice par rapport à la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, est $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 4}$ où $a_{ij} = 1$ pour tout i et pour tout j compris entre 1 et 4.*

1. *Montrer sans calculer le polynôme caractéristique que 0 est une valeur propre de f.*
2. *Montrer que le vecteur $v = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est un vecteur propre de f.*
3. *Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$, formée de vecteurs propres de f. Déterminer la matrice de f dans cette base.*

Solution(8) :

1. On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le rang de A est égal à 1. L'endomorphisme f n'est donc pas bijectif et son noyau n'est pas réduit au vecteur nul. Il existe alors un vecteur non nul u de $\mathbb{R}^4$ tel que $f(u) = 0_{\mathbb{R}^4}$. Donc 0 est une valeur propre de f .

2. Soit $v = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Comme f est linéaire, alors $f(v) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) = 4v$. Comme v est non nul, 4 est une valeur propre de f et v est un vecteur propre associé à cette valeur propre.

3. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est le noyau de f . D'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$. Mais $\dim(\mathrm{Im}(f))$ =rang$(A) = 1$, d'où $\dim(\ker(f)) = 3$. Soit $\{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\ker(f)$. Le vecteur v étant un vecteur propre associé à la valeur propre 4, les vecteurs u_1, u_2, u_3 et v sont linéairement indépendants et forment une base de $\mathbb{R}^4$. Il existe donc une base de $\mathbb{R}^4$, formée de vecteurs propres de f .
Pour déterminer une base de $\ker(f)$, il suffit d'obtenir 3 vecteurs linéairement indépendants, appartenant à $\ker(f)$.
On a $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = f(e_4) = (1, 1, 1, 1)$. D'où,
$$f(e_1 - e_2) = 0_{\mathbb{R}^4}\ ,\ f(e_1 - e_3) = 0_{\mathbb{R}^4}\ ,\ f(e_1 - e_4) = 0_{\mathbb{R}^4}.$$
Et ça veut dire que les vecteurs $e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 - e_4$ appartiennent à $\ker(f)$. Ils sont linéairement indépendants. En effet, soit λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels, alors
$$\lambda_1(e_1 - e_2) + \lambda_1(e_1 - e_3) + \lambda_1(e_1 - e_4) = 0_{\mathbb{R}^4} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$
Soit $u_1 = e_1 - e_2, u_1 = e_1 - e_3$ et $u_1 = e_1 - e_4$. L'ensemble $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre de $Ker(f)$ et $\mathrm{Card}(\{u_1, u_2, u_3\}) = 3 = \dim(\ker(f))$, et ça veut dire que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\ker(f)$. D'où, $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3, v\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
La matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$ est diagonale car $\mathcal{B}'$ est formée de vecteurs propres de f .
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = PDP^{-1}.$$

Exercise 9 (20 minutes) *On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & d & 2 & 0 \\ c & e & k & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelle condition nécessaire et suffisante les réels a, b, c, d, e, k doivent-ils vérifier pour que f soit diagonalisable ?

Solution(9) :
Pour déterminer les valeurs propres de f on calcule le polynôme caractéristique de f .

$$P_{car,f}(X) = \det(A - XI_4) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 & 0 \\ a & 1-X & 0 & 0 \\ b & d & 2-X & 0 \\ c & e & k & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(2-X)^2.$$

Le polynôme caractéristique de f est scindé dans $\mathbb{R}$. f a deux valeurs propres doubles $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$, et f est diagonalisable si et seulement si à chaque valeur propre double correspond un sous-espace propre de dimension égale à 2.
Soit E_{λ_1} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$, i.e. $E_{\lambda_1} = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$.
La matrice associée à $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$ est

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ b & d & 1 & 0 \\ c & e & k & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})) + \dim(\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$. Mais $\dim(\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}))$ =rang$(A - I_4)$. La dimension de E_{λ_1} est donc égale à 2 si et seulement si le rang de $A - I_4$ est égal à 2.

Il existe un mineur d'ordre 2 non nul extrait de $A-I_4$: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{vmatrix}$. Donc, le rang de $A-I_4$ est égal à 2 si et seulement si tous les mineurs d'ordre 3 extraits de $A-I_4$ sont nuls. Si $a=0$, les deux premières lignes de $A-I_4$ sont nulles, et par suite tous les mineurs d'ordre 3 extraits de $A-I_4$ sont nuls. Si $a \neq 0$, il existe un mineur d'ordre 3 extrait de $A-I_4$ non nul : $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & k & 1 \end{vmatrix} = a$.

D'où, La dimension de E_{λ_1} est donc égale à 2 si et seulement si $a=0$.
Soit E_{λ_2} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2=2$, i.e. $E_{\lambda_2}=\ker(f-2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$.
La matrice associée à $f-2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$ est

$$A-2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ c & e & k & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(f-2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}))+\dim(\mathrm{Im}(f-2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})) = \dim(\mathbb{R}^4)=4$. Mais $\dim(\mathrm{Im}(f-2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}))$ =rang$(A-2I_4)$. La dimension de E_{λ_2} est donc égale à 2 si et seulement si le rang de $A-2I_4$ est égal à 2.

Il existe un mineur d'ordre 2 non nul extrait de $A-2I_4$: $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ a & -1 \end{vmatrix}$. Donc, le rang de $A-2I_4$ est égal à 2 si et seulement si tous les mineurs d'ordre 3 extraits de $A-2I_4$ sont nuls. Si $k=0$, les deux dernières colonnes de $A-2I_4$ sont nulles, et par suite tous les mineurs d'ordre 3 extraits de $A-2I_4$ sont nuls. Si $k \neq 0$, il existe un mineur d'ordre 3 extrait de $A-2I_4$ non nul : $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ c & e & k \end{vmatrix} = k$.

D'où, La dimension de E_{λ_2} est donc égale à 2 si et seulement si $a=0$.
L'endomorphisme est diagonalisable si et seulement si $a=k=0$.

Exercise 10 (20 minutes) *Soit $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ n éléments du corps $\mathbb{K}$, on note $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$*

la matrice suivante :

$$M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminer le polynôme caractéristique de cette matrice.*

2. *En déduire que pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{K}[X]$ et s'écrivant sous la forme $P(X) = (-1)^n X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$, où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ n des éléments de $\mathbb{K}$, il existe une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que le polynôme P soit le polynôme caractéristique de M.*

3. *On considère le polynôme P défini par $P(X) = X^4 - 5X^3 + 3X^2 - X + 1$. Déterminer la matrice M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que le polynôme P soit le polynôme caractéristique de M.*

Solution(10) :

1. On a

$$P_{car, M(a_0, a_1, \ldots a_{n-1})}(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -X & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -X & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -X & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} - X \end{vmatrix}.$$

On développe ce déterminant suivant la première colonne :

$$\begin{aligned} P_{car,M(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1})}(X) &= -X \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -X & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -X & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -X & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1}-X \end{vmatrix} \\ & +(-1)^{n+1}a_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -X & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -X & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -X & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Le premier déterminant est le polynôme caractéristique de la matrice $M(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ et le deuxième déterminant est triangulaire et égal à 1. D'où la relation

$$P_{car,M(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1})}(X) = -XP_{car,M(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})}(X) + (-1)^{n+1}a_0. \tag{1.1}$$

C'est une relation entre le polynôme caractéristique de la matrice $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ où $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont n éléments de $\mathbb{K}$ et celui de la matrice $M(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ où $M(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ sont $n-1$ éléments de $\mathbb{K}$. Pour déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ on procède alors par récurrence.
Soit $n = 2$: on considère deux éléments a_0 et a_1 de $\mathbb{K}$. Alors,

$$M(a_0, a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix}$$

et

$$P_{car,M(a_0,a_1)} = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ a_0 & a_1 - X \end{vmatrix} = X^2 - a_1X - a_0.$$

Pour avoir une idée de l'expression du polynôme caractéristique de $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ on le calcule aussi pour $n = 3$.
Soit $n = 3$: on considère trois éléments a_0, a_1 et a_2 de $\mathbb{K}$. D'après la relation (1.1),

on obtient

$$\begin{aligned} P_{car,M(a_0,a_1,a_2)}(X) &= -XP_{car,M(a_1,a_2}(X) + (-1)^{3+1}a_0 \\ &= -X(X^2 - a_2X - a_1) + a_0 \\ &= -(X^3 - a_2X^2 - a_1X - a_0). \end{aligned}$$

Soit $P(n)$ la propriété : pour n éléments $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ de $\mathbb{K}$,

$$P_{car,M(a_0,a_1,\dots a_{n-1})}(X) = (-1)^n(X^n - a_{n-1}X^{n-1} - a_{n-2}X^{n-2} - \cdots - a_1X - a_0).$$

Montrons par recurrence sur n que la propriété $P(n)$ est vrai pour tout entier $n \geq 2$.

i) $P(2)$ est vraie car si on considère deux éléments a_0 et a_1 de $\mathbb{K}$, on trouve

$$P_{car,M(a_0,a_1)} = X^2 - a_1X - a_0 = (-1)^2(X^2 - a_1X - a_0).$$

ii) On suppose que $P(n)$ est vraie jusqu'à $n = k$ et démontrons alors que $P(n)$ est vraie pour $n = k+1$. On considère $k+1$ éléments $a_0, a_1, \dots, a_k$ de $\mathbb{K}$. D'après la relation (1.1), on obtient

$$P_{car,M(a_0,a_1,\dots a_k)}(X) = -XP_{car,M(a_1,a_2,\dots,a_k)}(X) + (-1)^{k+2}a_0.$$

$a_1, a_2, \dots, a_k$ sont k éléments de $\mathbb{K}$, or, d'après l'hypothèse de récurrence $P(k)$ on a

$$P_{car,M(a_1,a_2,\dots a_k)}(X) = (-1)^k(X^k - a_kX^{k-1} - a_{k-1}X^{k-2} - \cdots - a_2X - a_1).$$

D'où

$$\begin{aligned} P_{car,M(a_0,a_1,\dots a_k)}(X) &= -X(-1)^k(X^k - a_kX^{k-1} - a_{k-1}X^{k-2} - \cdots - a_2X - a_1) \\ &\quad +(-1)^{k+2}a_0 \\ &= (-1)^{k+1}(X^{k+1}a_kX^k - a_{k-1}X^{k-1} - a_2X^2 - a_1X - a_0). \end{aligned}$$

C'est-à-dire $P(n)$ est vrai pour $n = k+1$.

De i) et ii), $P(n)$ est vrai pour tout entier n supérieur ou égal à 2.

2. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par

$$P(X) = (-1)^n X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0, \ \forall X \in \mathbb{K},$$

   où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ n des éléments de $\mathbb{K}$.
   Pour tout $X \in \mathbb{K}$, $P(X)$ peut s'écrire sous la forme

$$P(X) = (-1)^n \left((-1)^n X^n - (-1)^{n-1}\alpha_{n-1}X^{n-1} - \cdots - (-1)^{n-1}\alpha_1 X - (-1)^{n-1}\alpha_0\right).$$

   D'après la première question, P est le polynôme caractéristique de la matrice $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ où $a_0 = (-1)^{n-1}\alpha_0, a_1 = (-1)^{n-1}\alpha_1, \ldots, a_{n-1} = (-1)^{n-1}\alpha_{n-1}$.

3. On considère le polynôme P défini par $P(X) = X^4 - 5X^3 + 3X^2 - X + 1$. Déterminons la matrice M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que le polynôme P soit son polynôme caractéristique de M.
   On remarque que ce polynôme est de la forme $P(X) = (-1)^n X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$. D'après la deuxième question, P est le polynôme caractéristique de la matrice $M = M(a_0, a_1, a_2, a_3)$, où $a_0 = (-1)^{4-1}(1) = -1, \ a_1 = (-1)^{4-1}(-1) = 1, \ a_2 = (-1)^{4-1}(3) = -3, \ a_3 = (-1)^{4-1}(-5) = 5$. D'où

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.11.4 Test 2

Prérequis indispensables : <u>Prérequis indispensables</u> :

- Le cours sur les endomorphismes ou matrices diagonalisables.

<u>Objectifs</u> :

- Savoir calculer les valeurs propres et déterminer les sous-espaces propres d'un endomorphisme (ou d'une matrice) défini à l'aide de paramètres.
- Appliquer la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation.

<u>Temps de travail prévu</u> : 40 minutes

Exercise 11 *Soit m un nombre réel et f_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice suivante :*

$$A_m = \begin{pmatrix} 2m-5 & 1 & 1 & 4-m \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 5-m & -1 & m-1 & m-4 \\ 2m-10 & 2 & 2 & 8-m \end{pmatrix}.$$

Étudier suivant les valeurs de m si la matrice est diagonalisable.

Exercise 12 *Soit a et b deux nombres réels et $M(a,b)$ la matrice suivante :*

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

La matrice $M(a,b)$ est-elle diagonalisable ? Si oui, trouver une matrice diagonale $D(a,b)$ et une matrice inversible p de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $M(a,b) = PD(a,b)P^{-1}$.

<u>Solution du test</u>

<u>Solution</u>(11) :

Pour déterminer les valeurs propres de f_m on calcule le polynôme caractéristique de f_m .

$$P_{car,f_m}(X) = \det(A_m - XI_4) = \begin{vmatrix} 2m-5-X & 1 & 1 & 4-m \\ 0 & m-X & 0 & 0 \\ 5-m & -1 & m-1-X & m-4 \\ 2m-10 & 2 & 2 & 8-m-X \end{vmatrix}.$$

On développe ce déterminant suivant la deuxième ligne :

$$P_{car,f_m}(X) = (-1)^{2+2}(m-X) \begin{vmatrix} 2m-5-X & 1 & 4-m \\ 5-m & m-1-X & m-4 \\ 2m-10 & 2 & 8-m-X \end{vmatrix}.$$

On ajoute la ligne 2 à la ligne 1 et on obtient

$$\begin{aligned} P_{car,f_m}(X) &= (m-X) \begin{vmatrix} m-X & m-X & 0 \\ 5-m & m-1-X & m-4 \\ 2m-10 & 2 & 8-m-X \end{vmatrix} \\ &= (m-X)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5-m & m-1-X & m-4 \\ 2m-10 & 2 & 8-m-X \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On ajoute à la ligne 3 deux fois la ligne 2 :

$$P_{car,f_m}(X) = (m-X)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5-m & m-1-X & m-4 \\ 0 & 2(m-X) & m-X \end{vmatrix} = (m-X)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5-m & m-1-X & m-4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

On enlève la colonne 1 à la colonne 2 :

$$\begin{aligned} P_{car,f_m}(X) &= (m-X)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5-m & 2m-6-X & m-4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (m-X)^3(2m-6-X-2m+8) = (m-X)^3(2-X). \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de f_m est scindé dans $\mathbb{R}$. i) Si $m = 2$, l'endomorphisme f_m de $\mathbb{R}^4$ a une seule valeur propre, égale à 2. Si f_2 était diagonalisable, la matrice A_2 serait semblable à la matrice $2I_4$, il existerait alors une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $A_2 = P(2I_4)P^{-1})$ et on aurait l'égalité $A_2 = 2P(I_4)P^{-1}) = 2I_4$. On arrive à une contradiction car

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ -6 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme f_m n'est donc pas diagonalisable.
ii) Si $m \neq 2$, l'endomorphisme f_m de $\mathbb{R}^4$ a deux valeurs propres : $\lambda_1 = 2$ est une valeur propre simple et $\lambda_2 = m$ est une valeur propre d'ordre de multiplicité 3. L'endomorphisme f_m est diagonalisable si et seulement si, pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égal à son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique. La dimension du sous-espace propre associé une valeur propre simple est égale à 1. L'endomorphisme f_m est donc diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ_2 est égale à 3.
Soit E_{λ_2} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = m$, i.e. $E_{\lambda_2} = \ker(f_m - m\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$, et la matrice associée à $f_m - m\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$ est

$$A_m - m\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4} = \begin{pmatrix} 5-m & 1 & 1 & 4-m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5-m & -1 & 1 & m-4 \\ 2(m-5) & -2 & 2 & 2(4-m) \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(f_m-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}))+\dim(\mathrm{Im}(f_m-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$. Or $\dim(\mathrm{Im}(f_m-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}))=$rang$(A_m-I_4)$. Les vecteurs colonnes de la matrice $A_m-m\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$ sont nuls ou colinéaires au vecteur colonne $(1,0,1,2)^T$. Le rang de la matrice $A_m-m\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$ est égal à 1 et la dimension de E_{λ_2} est égale à 3. Si $m\neq 2$, l'endomorphisme f_m est donc diagonalisable.
De i) et ii), l'endomorphisme f_m est diagonalisable si et seulement si $m\neq 2$.

Solution(12) :

Pour déterminer les valeurs propres de $M(a,b)$, on calcule le polynôme caractéristique de $M(a,b)$.

$$P_{car,M(a,b)}(X)=\det(M(a,b)-XI_4)=\begin{vmatrix} a-X & 0 & 0 & b\\ 0 & a-X & b & 0\\ 0 & b & a-X & 0\\ b & 0 & 0 & a-X\end{vmatrix}.$$

En ajoutant à la ligne 1 les trois autres lignes on fait apparaître une factorisation par $(a+b-X)$:

$$P_{car,M(a,b)}(X)=(a+b-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a-X & b & 0\\ 0 & b & a-X & 0\\ b & 0 & 0 & a-X\end{vmatrix}.$$

On enlève successivement la colonne 1 à chacune des autres colonnes :

$$P_{car,M(a,b)}(X)=(a+b-X)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a-X & b & 0\\ 0 & b & a-X & 0\\ b & -b & -b & a-b-X\end{vmatrix}.$$

On développe suivant la première ligne :

$$\begin{aligned} P_{car,M(a,b)}(X) &= (a+b-X)\begin{vmatrix} a-X & b & 0\\ b & a-X & 0\\ -b & -b & a-b-X\end{vmatrix}\\ &= (a+b-X)(a-b-X)((a-X)^2-b^2)=(a+b-X)^2(a-b-X)^2.\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de $M(a,b)$ est scindé dans $\mathbb{R}$.
On cherche si les racines $a+b$ et $a-b$ sont distinctes. On a

$$a+b=a-b \iff b=0.$$

Si $b = 0$, la matrice $M(a, b)$ a une seule valeur propre égale à a. Or

$$M(a,0) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI_4.$$

La matrice $M(a, 0)$ est diagonale donc diagonalisable.
Si $b \neq 0$, la matrice $M(a, b)$ a deux valeurs propres doubles : $\lambda_1 = a + b$ et $\lambda_2 = a - b$. Elle est diagonalisable si et seulement si à chaque valeur propre double correspond un sous-espace propre de dimension égale à 2.
Soit E_{λ_1} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = a + b$ et $u = (x, y, z, t)$ un élément de $\mathbb{R}^4$. Alors,

$$\begin{aligned} u \in E_{\lambda_1} &\iff (A - (a+b)I_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 & b \\ 0 & -b & b & 0 \\ 0 & b & -b & 0 \\ b & 0 & 0 & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} b(-x+t) = 0 \\ b(-y+z) = 0 \\ b(y-z) = 0 \\ b(x-t) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $b \neq 0$, alors

$u \in E_{\lambda_1} \iff \begin{cases} z = y \\ t = x \end{cases}$. D'où

$$u \in E_{\lambda_1} \iff \exists x, y \in \mathbb{R} \ / \ u = x(1,0,0,1) + y(0,1,1,0).$$

C'est-à-dire, E_{λ_1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs : $u_1 = (1, 0, 0, 1)$ et $u_2 = (0, 1, 1, 0)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, la dimension de E_{λ_1} est donc égale à 2.
Soit E_{λ_2} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = a - b$ et $u = (x, y, z, t)$ un élément de $\mathbb{R}^4$. Alors,

$$\begin{aligned}
u \in E_{\lambda_2} &\iff (A-(a-b)I_4)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & b\\ 0 & b & b & 0\\ 0 & b & b & 0\\ b & 0 & 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} b(x+t)=0\\ b(y+z)=0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Comme $b \neq 0$, alors

$$u \in E_{\lambda_2} \iff \left\{\begin{array}{l} z=-y\\ t=-x\end{array}\right. .$$

D'où

$$u \in E_{\lambda_2} \iff \exists x, y \in \mathbb{R} \ / \ u = x(1,0,0,-1) + y(0,1,-1,0).$$

C'est-à-dire, E_{λ_2} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs : $u_3 = (1,0,0,-1)$ et $u_4 = (0,1,-1,0)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, la dimension de E_{λ_2} est donc égale à 2.
La dimension de chaque sous-espace propre est égale à 2. La matrice $M(a,b)$ est donc diagonalisable. Elle est semblable à la matrice $D(a,b)$ avec

$$D(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 & 0\\ 0 & a+b & 0 & 0\\ 0 & 0 & a-b & 0\\ 0 & 0 & 0 & a-b\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M(a,b) = PD(a,b)P^{-1}$$

où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

1.11.5 Fiche 3

Cette ressource est composée de trois exercices. Dans le premier, on étudie les valeurs propres de l'endomorphisme ń dérivée ż et on prolonge la notion de valeur propre à un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie. Le deuxième montre l'existence d'une

relation simple entre les valeurs propres d'une matrice et celles d'une expression polynomiale de cette matrice. Le troisième utilise la diagonalisation pour trouver l'expression du terme général d'une suite récurrente.
Prérequis indispensables :

- Le cours sur les endomorphismes ou matrices diagonalisables : notions de valeurs propres, de vecteurs propres, conditions suffisantes ou nécessaires pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Temps de travail prévu : 60 minutes

Exercise 13 (15 minutes) *1. Soient n un entier supérieur ou égal à 1, et E l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K}$ étant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), formé du polynôme nul et des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de l'endomorphisme D_E de E qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivé P'. L'application D_E est-elle diagonalisable ?*

2. Soit F l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions numériques admettant des dérivées de tout ordre (F n'est pas un espace vectoriel de dimension finie). Soit D l'endomorphisme de F qui à toute fonction f de F associe sa dérivée f'. Pour tout réel λ, montrer qu'il existe une fonction f de F, non nulle, telle que $D(f) = \lambda f$ et déterminer l'ensemble F_λ des fonctions f de telles que $D(f) = \lambda f$.

Solution(13) :

1. Soit $\rfloor al B = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ la base canonique de E et soit M la matrice carrée d'ordre $(n+1)$ associée à l'endomorphisme D_E dans la base $\mathcal{B}$. On a $D_E(1) = 0, D_E(X) = 1, D_E(X^2) = 2X, \ldots, D_E(X^n) = nX^{n-1}$, donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et le polynôme caractéristique de D_E est :

$$P_{car,D_E}(T) = \det(M - TI_{n+1}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-T)^{n+1}.$$

Donc, la seule valeur propre de D_E est 0.
On pouvait aussi remarquer que si P est un polynôme non nul, les degrés de P et de $D_E(P)$ sont liés par la relation $deg(D_E(P)) = deg(P) - 1$. Donc l'égalité $D_E(P) = \lambda P$ ne peut avoir lieu que si P est le polynôme constant et si λ est nul.
Le rang de la matrice M est n, car les colonnes de cette matrice forment un système de rang n. Donc d'après le théorème du rang, le sous-espace propre E_0 de D_E associé à la valeur propre 0 est de dimension 1, comme il contient le polynôme 1 , il est engendré par ce polynôme. Le sous-espace propre E_0 est le sous-espace vectoriel formé des polynômes constants. Comme l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 n'est pas égale à la dimension du sous-espace propre E_0, on en déduit que D_E n'est pas diagonalisable.

2. Soit λ un réel. On cherche les fonctions f telles que $D(f) = \lambda f$, f est donc une solution de l'équation différentielle $y' = \lambda y$. Les solutions de cette équation sont toutes les fonctions de la forme $x \in \mathbb{R} \longmapsto a\exp(\lambda x)$, où a est une constante réelle. On a ainsi montré que pour tout réel λ, il existe une fonction f non nulle telle que $D(f) = \lambda f$, par exemple la fonction $f_1 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(\lambda x)$. L'ensemble F_λ des fonctions f de F, telles que $D(f) = \lambda f$, est le sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la fonction f_1.

   Remarque : Tout réel λ est " valeur propre " de D et le problème de la diagonalisation n'a aucun sens ici.

Exercise 14 (20 minutes) *Soient $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, A une matrice d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note I_n la matrice unité d'ordre n. Si $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$, on note par $P(A)$ la matrice d'ordre n qui est égale à $P(A) = a_0I_n + a_1A + \cdots + a_pA^p$.*

1. *Montrer que si λ est une valeur propre de A et k est un entier strictement positif, alors λ^k est une valeur propre de A^k et $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(A)$. Que peut-on dire des vecteurs propres correspondants ?*

2. *Soient M et N les matrices d'ordre 3 à coefficients complexes définies par*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad N = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$ tel que $N = Q(M)$. Déterminer les valeurs propres de N. Montrer que les matrices M et N sont diagonalisables. En déduire le déterminant de N sous forme d'un produit de trois facteurs.

3. *Soient A et B les matrices d'ordre 4 à coefficients complexes définies par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} a & d & c & b \\ b & a & d & c \\ c & b & a & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe un polynôme T de $\mathbb{C}[X]$ tel que $B = T(A)$. Déterminer les valeurs propres de B. Les matrices A et B sont telles diagonalisables ?

Solution[14] :

1. Soient λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé, V appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne. Donc $AV = \lambda V$. On montre, par récurrence, la propriété $P(k)$ suivante : $A^k V = \lambda^k V$, pour tout entier k strictement positif.
   - La propriété $P(k)$ est vraie pour $k = 1$.
   - Supposons que la propriété $P(k)$ est vraie pour tout entier $k = 1, 2, \ldots, j$, et montrons qu'elle est vraie por $k = j+1$. Comme $A^{j+1}V = A(A^j V) = A(\lambda^j V) = \lambda^j (AV) = \lambda^j \lambda V$, on a bien $A^{j+1}V = \lambda^{j+1}V$.

   La propriété $P(k)$ est donc héréditaire, comme elle est vraie pour l'entier 1, elle est vraie pour tout entier k strictement positif.

   Donc si λ est une valeur propre de A, associée au vecteur propre V, alors λ^k est une valeur propre de A^k associée au même vecteur propre V. Et les vecteurs propres de A sont des vecteurs propres de A^k. On en déduit l'égalité suivante :

$$P(A)V = (a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p)V = a_0 V + a_1 \lambda V + \cdots + a_p \lambda^p V = P(\lambda)V.$$

Donc, si λ est une valeur propre de A associée au vecteur propre V, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(A)$ associée au même vecteur propre V. Les vecteurs propres de A sont des vecteurs propres de $P(A)$.

2. On calcule M^2. On trouve

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $N = aI_3 + bM + cM^2$, où I_3 est la matrice unité d'ordre 3. D'où $N = Q(M)$, avec $Q(X) = a + bX + cX^2$. Pour connaître les valeurs propres de N, on commence par chercher les valeurs propres de M. Pour connaître les valeurs propres de M, on calcule son polynôme caractéristique. On trouve

$$P_{car,M}(X) = \det(M - XI_3) = -(X^3 - 1).$$

Les valeurs propres de M sont donc 1, $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$ et $j^2 = \exp(\frac{4i\pi}{3})$. La matrice M d'ordre 3 a trois valeurs propres distinctes, donc M est diagonalisable :
L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ admet une base de vecteurs propres de M. D'après la question 1. , ces vecteurs propres sont aussi des vecteurs propres de N, donc N est aussi diagonalisable, et ses valeurs propres sont $Q(1), Q(j)$ et $Q(j^2)$. Comme $j^3 = 1$, les valeurs propres de N sont : $a + b + c$, $a + bj + cj^2$ et $a + bj^2 + cj$.
. Comme N est semblable à une matrice diagonale D, son déterminant est égal au produit des éléments de la diagonale de D, qui sont les valeurs propres de N. On en déduit : $\det(N) = (a + b + c)(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)$, où $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$.

3. On procède de même pour A et B. On trouve

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $B = aI_4 + bA + cA^2 + dA^3$.
Le polynôme caractéristique de A est $P_{car,A}(X) = \det(A - XI_4) = X^4 - 1$, donc la matrice A a quatre valeurs propres distinctes qui sont ± 1 et $\pm i$, où i est le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$. Et pour les mêmes raisons que celles données à la question 3. , les matrices A et A sont diagonalisables, et les valeurs propres de B sont : $a+b+c+d$, $a-b+c-d$, $a+ib-c-id$ et $a-ib-c-id$.

Exercise 15 *Soient a et b des nombres réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_1 = b \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On considère, pour tout entier n positif ou nul, le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, (espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices à 2 lignes et une colonne).

1. *Montrer qu'on a l'égalité $X_{n+1} = AX_n$, où A est une matrice carrée d'ordre 2, à déterminer.*
2. *En déduire l'égalité $X_n = A^n X_0$, pour tout entier n positif ou nul.*
3. *Montrer que A est semblable à une matrice diagonale. Calculer A^n.*
4. *En déduire une formule donnant la valeur de u_n en fonction de a et b.*

Solution[15] :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. On cherche A sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $X_{n+1} = AX_n$. D'où

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_n & bu_{n+1} \\ cu_n & du_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Or $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$, on remarque que les valeurs $a = 0, b = 1, c = 2, d = 1$ conviennent. On en déduit l'égalité $X_{n+1} = AX_n$, où A est la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On veut montrer la propriété suivante : Pour tout entier positif n, $X_n = A^n X_0$ (1). Comme $A^0 = I_2$ où I_2 est la matrice unité d'ordre 2, la propriété (1) est vraie pour $n = 0$. Supposons-la vraie pour l'entier p, on a donc $X_p = A^p X_0$. Comme $X_{p+1} = AX_p = A(A^p X_0)$, alors $X_{p+1} = A^{p+1} X_0$.
   La propriété (1) est héréditaire ; comme elle est vraie pour l'entier $n = 0$, elle est vraie pour tout entier n positif ou nul.

3. Comme la matrice A est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est défini par $P(X) = X^2 - X - 2$. Ce polynôme admet deux racines distinctes -1 et 2, donc A est diagonalisable et elle est semblable à la matrice diagonale D suivante $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   Il existe donc une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$. Cela entraîne $A^n = PD^nP^{-1}$. Pour déterminer une telle matrice P, on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A, et on cherche une base de vecteurs propres de f ; la matrice P sera la matrice de passage de la base canonique à cette base de vecteurs propres. On détermine le sous-espace propre $E_{-1} = \ker(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$:

$$(x, y) \in E_{-1} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y = 0.$$

   Ceci prouve que E_{-1} est un sous-espace vectoriel de dimension 1 dont une base est formée du vecteur $(1, -1)$.
   On détermine le sous-espace propre $E_2 = \ker(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$:

$$(x, y) \in E_2 \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x - y = 0.$$

   Ceci prouve que E_2 est un sous-espace vectoriel de dimension 1 dont une base est formée du vecteur $(1, 2)$.
   Les deux vecteurs : $(1, -1)$ et $(1, 2)$ forment donc, dans $\mathbb{R}^2$, une base de vecteurs propres de f et la matrice de passage de la base canonique à cette base de vecteurs propres, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, est une matrice qui vérifie $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En calculant l'inverse de P , par exemple en utilisant la formule $P^{-1} = \dfrac{1}{\det(P)}{}^t(com(P))$, où $com(P)$ est la comatrice de P (la matrice des cofacteurs de P), on obtient :

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} & (-1)^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

4. Comme $X_n = A^n X_0$, on a

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} & (-1)^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Donc

$$u_n = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}a + \frac{(-1)^{n+1} + 2^n}{3}b = \frac{2^n}{3}(a+b) + \frac{(-1)^n}{3}(2a-b).$$

1.11.6 Test 3

Cette ressource comporte des exercices plutôt théoriques sur la diagonalisation.
Prérequis indispensables :

- Le cours sur les endomorphismes ou matrices diagonalisables : notions de valeurs propres, de vecteurs propres, conditions suffisantes ou nécessaires pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Temps de travail prévu : 65 minutes

Exercise 16 *1. Soit A la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

où α, β et γ sont des éléments de $\mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Etudier, suivant les valeurs de α, β et γ, si A est semblable à une matrice diagonale.

2. *Soit A la matrice suivante :*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

où α, β et γ sont des éléments de $\mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Etudier, suivant les valeurs de α, β et γ, si B est semblable à une matrice diagonale.

3. *Soit A la matrice suivante :*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où α, β et γ sont des éléments de $\mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Etudier, suivant les valeurs de α, β et γ, si C est semblable à une matrice diagonale.

4. *En déduire une formule donnant la valeur de u_n en fonction de a et b.*

Exercise 17 *On note E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E et Id_E l'endomorphisme identité de E.*

1. *Si $\det(f) = 0$, f admet-il des vecteurs propres ?*
2. *Si $f^2 = -2Id_E$, f admet-il des vecteurs propres ?*
3. *Si f n'admet pas de vecteur propre, la dimension de E peut-elle être impaire ?*

Exercise 18 1. *Toute matrice inversible est-elle diagonalisable ?*

2. *Toute matrice diagonalisable est-elle inversible ?*
3. *Soient a et b deux réels et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.*
   (a) *M est-elle inversible ?*
   (b) *M est-elle diagonalisable ?*

Exercise 19 1. *Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que AB est diagonalisable. La matrice BA est-elle diagonalisable ?*

2. *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont l'une, au moins, est inversible.*
   (a) *Montrer que les matrices AB et BA sont semblables.*

(b) Montrer que si AB est diagonalisable, alors BA est diagonalisable.

Solution du test

Solution(16) :

Une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

1. La matrice A étant triangulaire supérieure son polynôme caractéristique est défini par
$$P_{car,A}(X) = \det(A - XI_3) = (1-X)(2-X)(3-X).$$
Il est scindé et chaque valeur propre a pour multiplicité 1 : A est donc diagonalisable.
Pour toutes valeurs de α, β, γ , la matrice A est semblable à la matrice diagonale
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ dont la matrice dans la base canonique est B. La matrice B étant triangulaire supérieure le polynôme caractéristique de f est défini par
$$P_{car,f}(X) = \det(B - XI_3) = (1-X)^2(3-X).$$
Il est scindé sur $\mathbb{K}$ et f admet deux valeurs propres : la valeur propre 1 de multiplicité 2, la valeur propre 3 de multiplicité 1. La valeur propre 3 étant de multiplicité 1, la dimension du sous-espace propre associé est 1.
Soit E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre 1, E_1 est le noyau de l'endomorphisme $(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^3})$. Si I_3 est la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, la matrice de $(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^3})$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$ est la matrice $(B - I_3)$. Or
$$B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
si $\alpha \neq 0$, cette matrice est de rang 2 et la dimension de E_1 est 1, si $\alpha = 0$ elle est de rang 1 et la dimension de E_1 est 2. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité

de la valeur propre associée. Par conséquent f est diagonalisable si et seulement si $\alpha = 0$.
La matrice B est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme f est diagonalisable donc si et seulement si $\alpha = 0$. Lorsque $\alpha = 0$, B est semblable à la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ dont la matrice dans la base canonique est C. La matrice C étant triangulaire supérieure le polynôme caractéristique de f est défini par

$$P_{car,f}(X) = \det(C - XI_3) = (1 - X)^3.$$

Il est scindé et f admet une seule valeur propre de multiplicité 3.
Soit E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre 1, E_1 est le noyau de l'endomorphisme $(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^3})$, et f est diagonalisable si et seulement si la dimension de E_1 est 3. Si I_3 est la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, la matrice de $(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^3})$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$ est la matrice $(C - I_3)$. Comme

$$(C - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la dimension de E_1 est 3 si et seulement si la matrice $(C - I_3)$ est la matrice nulle, c'est-à-dire si seulement si $\alpha = \beta = \gamma$.
La matrice C est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme f est diagonalisable. La matrice C est donc semblable à une matrice diagonale si seulement si $\alpha = \beta = \gamma$.

Remarque : Comme C admet une seule valeur propre 1 de multiplicité 3, plutôt que de déterminer la dimension de E_1, on aurait pu remarquer que C est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à la matrice I_3, c'est-à-dire si il existe une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $C = PI_3P^{-1}$. Or $PI_3P^{-1} = I_3$, donc C est diagonalisable si et seulement si $C = I_3$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha = \beta = \gamma$.

Solution(17) :

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Un vecteur u de E est un vecteur propre de f s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- u est un vecteur non nul,
- il existe un scalaire λ appartenant à $\mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$.

1. Si le déterminant de f est nul, alors f n'est pas injective et son noyau n'est pas réduit au vecteur nul. Il existe des vecteurs u non nuls de E tels que $f(u) = 0_E$. Ces vecteurs sont des vecteurs propres de f associés à la valeur propre 0 et par conséquent f admet des vecteurs propres.
2. Soit u un vecteur de E et λ un réel tel que $f(u) = \lambda u$. On a : $f^2(u) = f(\lambda u) = \lambda^2 u$. Si $f^2 \equiv -2\mathrm{Id}_E$ on obtient $\lambda^2 u = -2u$, d'où $(\lambda^2+2)u = 0_E$. Comme (λ^2+2), l'égalité $(\lambda^2+2)u = 0_E$ n'est satisfaite que si u est le vecteur nul. Le seul vecteur u de E tel qu'il existe un réel λ, vérifiant $f(u) = \lambda u$, est le vecteur nul, par conséquent f n'admet pas de vecteur propre.
3. Lorsque la dimension de E est impaire nous pouvons montrer que tout endomorphisme de E admet des vecteurs propres. En effet si la dimension de E est impaire le polynôme caractéristique de f est de degré impair. Comme tout polynôme de degré impair à coefficients dans $\mathbb{R}$ admet au moins une racine réelle, le polynôme caractéristique de f admet au moins une racine réelle et ces racines réelles sont les valeurs propres de f. Par conséquent, si f n'admet pas de vecteur propre la dimension de E ne peut pas être impaire.

Solution(18) :

1. On peut donner un contre-exemple ; il existe des matrices inversibles qui ne sont pas diagonalisables. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
   Comme $det(A) \neq 1$, A est inversible. Comme $P_{car,A}(X) = (1-X)^2$, 1 est une valeur propre double de A. Soit E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre 1. On a :
   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1 \iff \begin{cases} x + y = x \\ y = y \end{cases} \iff y = 0.$$
   E_1 est la droite vectorielle de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ de base $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le sous-espace vectoriel E_1 est de dimension 1 et la valeur propre associée est de multiplicité 2, donc A n'est pas semblable à une matrice diagonale.
2. Toute matrice carrée qui admet 0 pour valeur propre n'est pas inversible car son noyau n'est pas réduit au vecteur nul. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$

ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) est une matrice diagonale qui admet pour valeurs propres 1 et 0, donc A n'est pas inversible bien qu'elle soit diagonalisable.

3. ◦ Comme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $\det(M) = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ et on a : $\det(A) = 0 \iff |a| = |b|$.

   - Si $|a| = |b|$, M n'est pas inversible car son déterminant est nul.
   - Si $|a| \neq |b|$, M est inversible car son déterminant n'est pas nul.

   ◦ On a

$$P_{car,M}(X) = \begin{vmatrix} a-X & b \\ b & a-X \end{vmatrix} = (a-X)^2 - b^2 = (a-X-b)(a-X+b).$$

   Les valeurs propres de M sont $a+b$ et $a-b$.

   - Si $b \neq 0$, les réels $a+b$ et $a-b$ sont distincts. La matrice carrée d'ordre 2 admet deux valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable et semblable à la matrice $\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$.
   - Si $b = 0$, on a $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, donc M est une matrice diagonale. Par conséquent quels que soient les réels a et b, M est diagonalisable et semblable à la matrice $\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$.

Solution(19) :

1. Comme $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, AB est une matrice diagonale donc diagonalisable.

   Comme $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $P_{car,BA}(X) = X^2$, BA admet une seule valeur propre double 0. Comme A n'est pas la matrice nulle elle ne peut pas être semblable à la matrice nulle, elle n'est donc pas diagonalisable.

2.

   ◦ • Si A est inversible, nous avons $A^{-1}(AB)A = BA$, donc les matrices AB et BA sont semblables.

- Si B est inversible, nous avons $B^{-1}(BA)B = AB$, donc les matrices AB et BA sont semblables.

Par conséquent, si A et B sont deux matrices de dont l'une, au moins, est inversible alors les matrices et sont semblables.

◦ Lorsque deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, si l'une est diagonalisable l'autre est aussi diagonalisable. En effet si M, N, D, P, Q, sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où D est une matrice diagonale et P, Q des matrices inversibles telles que $M = PDP^{-1}$ et $N = QMQ^{-1}$, alors $N = Q(PDP^{-1})Q^{-1} = (QP)D(QP)^{-1}$. Ceci prouve que si M est semblable à la matrice diagonale D, toute matrice semblable à M est aussi semblable à la matrice diagonale D. Lorsque l'une des matrices A ou B est inversible, on a montré précédemment que les matrices AB et BA sont semblables. Par conséquent, si la matrice AB est diagonalisable, alors BA est diagonalisable. La question 1 montre que ce résultat peut être faux lorsque ni A ni B ne sont des matrices inversibles.

1.11.7 Fiche 4

Cette ressource comporte cinq exercices théoriques sur la diagonalisation. Les exercices 21 et 22 (restriction à un sous-espace vectoriel...) démontrent le même résultat avec des méthodes différentes. Ils ont toutefois une question commune. (D'autres méthodes existent également, en particulier une plus immédiate lorsque l'on connaît la théorie du polynôme minimal). Le résultat démontré dans l'exercice 20 est nécessaire à la résolution des exercices 21 et 22, et le résultat de ces derniers est nécessaire à la résolution des exercices 23 et 24 (mais seuls les résultats suffisent et sont rappelés en début d'énoncé). Les exercices 20 et 23 sont simples, les autres sont plus difficiles.

Prérequis indispensables :

- Le cours sur les endomorphismes ou matrices diagonalisables : notions de valeurs propres, de vecteurs propres, conditions suffisantes ou nécessaires pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Temps de travail prévu : 70 minutes.

Dans la résolution de ces exercices, on n'utilise pas la théorie du polynôme minimal.

Exercise 20 (08 minutes) *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie n ; $n \in \mathbb{N}^*$, et f un endomorphisme de E. On dit qu'un sous-espace vectoriel H de E est stable par f s'il vérifie la propriété : " l'image par f de tout élément de H appartient à H , i.e. $(f(H) \subset H)$ ".*

1. *Montrer qu'un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs propres est stable par f.*
2. *On suppose que f est un endomorphisme de E diagonalisable. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E stable par f admet un supplémentaire stable par f.*

Solution(20) :

1. Soit H un sous-espace vectoriel de E engendré par une famille de vecteurs propres. L'espace vectoriel E étant de dimension finie n, H est aussi de dimension finie k; $k \leq n$, donc de la famille de vecteurs propres qui engendrent H, on peut extraire une base notée $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$.
   Soit u un élément de H, il existe des scalaires $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq k}$, tels que $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$. Cela entraîne $f(u) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_k f(v_k)$. En notant $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres associées à $v_1, v_2, \dots, v_k$ respectivement, on obtient $f(u) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_k \lambda_k v_k.$, on remarque alors que $f(u)$ est une combinaison linéaire de $v_1, v_2, \dots, v_k$ et donc appartient à H. Donc H est stable par f.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E, stable par f. Puisque l'endomorphisme f de E est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de f. D'après le théorème de la base incomplète, on peut " compléter " une base de F par des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ pour obtenir une base de E. On note $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ une base de F et $v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n$ les $n - r$ vecteurs de la base $\mathcal{B}$ tels que $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2, \dots, e_r, v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n\}$ soit une base de E.
   Soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n\}$. Par construction de $\mathcal{B}'$ et de G, G est un supplémentaire de F , et d'après la question 1, G est stable par f.

Exercise 21 (08 minutes) *Les hypothèses de cet exercice utilisent le résultat de l'exercice(20) : "Un sous-espace stable par un endomorphisme diagonalisable admet un supplémentaire stable".*
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie n ; $n \in \mathbb{N}^*$, et f un endomorphisme de E diagonalisable, $P_{car,f}$ son polynôme caractéristique. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension r; $0 < r < n$, stable par f.

1. *Soit G un supplémentaire de F stable par f. On note $f_{/F}$ et $f_{/G}$ les restrictions de f aux sous-espaces vectoriels F et G respectivement. On peut donc considérer leurs polynômes caractéristiques $P_{car,f_{/F}}$ et $P_{car,f_{/G}}$. Montrer l'égalité $P_{car,f} = P_{car,f_{/F}} \times P_{car,f_{/G}}$.*

2. *Soit λ une valeur propre de f et E_λ le sous-espace propre associé à λ. On note $F_{(\lambda)}$ et $G_{(\lambda)}$ les sous-espaces vectoriels de E suivants : $F_{(\lambda)} = F \cap E_\lambda$ et $F_{(\lambda)} = G \cap E_\lambda$.*
   (a) *Montrer l'égalité : $E_\lambda = F_{(\lambda)} \oplus G_{(\lambda)}$.*
   (b) *Montrer que si $F_{(\lambda)}$ n'est pas réduit au vecteur nul alors λ est une valeur propre de $f_{/F}$, et $F_{(\lambda)}$, considéré comme sous-espace vectoriel de F, est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de $f_{/F}$.*
3. *Montrer à l'aide des questions 1 et 2 que la restriction de f au sous-espace vectoriel F est diagonalisable.*

Solution(21) :

1. Soit G un supplémentaire de F, stable par f (un tel sous-espace existe d'après le résultat de l'exercice précédent, rappelé en début d'énoncé), et soit $\mathcal{B}'$ une base de E formée de la réunion d'une base $\mathcal{B}_1$ de F et d'une base $\mathcal{B}_2$ de G. Soient $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ et $\mathcal{B}_2 = \{e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_n\}$. Soient $f_{/F}$ et $f_{/G}$ les restrictions de f aux sous-espaces vectoriels F et G respectivement, A_1 la matrice de $f_{/F}$ dans la base $\mathcal{B}_1$, A_2 la matrice de $f_{/G}$ dans la base $\mathcal{B}_2$, et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
   Pour $i = 1, 2, \ldots, r$, on a $f_{/F}(e_i) = \alpha_{1,i}e_1 + \alpha_{2,i}e_2 + \cdots + \alpha_{r,i}e_r$ et
   $$f(e_i) = \alpha_{1,i}e_1 + \alpha_{2,i}e_2 + \cdots + \alpha_{r,i}e_r + 0e_{r+1} + 0e_{r+2} + \cdots + 0e_n.$$
   Pour $i = r+1, r+2, \ldots, n$, on a $f_{/G}(e_i) = \alpha_{r+1,i}e_{r+1} + \alpha_{r+2,i}e_{r+2} + \cdots + \alpha_{n,i}e_n$ et
   $$f(e_i) = 0e_1 + 0e_2 + \cdots + 0e_r + \alpha_{r+1,i}e_{r+1} + \alpha_{r+2,i}e_{r+2} + \cdots + \alpha_{n,i}e_n.$$
   Alors A_1 est la matrice $(\alpha_{k,i})_{1 \le k,i \le r}$, A_2 est la matrice $(\alpha_{k,i})_{r+1 \le k,i \le n}$, et la matrice A est donc de la forme :
   $$A = \begin{pmatrix} A_1 & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & A_2 \end{pmatrix},$$
   $O_{p,q}$ étant la matrice nulle à p lignes et q colonnes.
   Le polynôme caractéristique de f est le déterminant de la matrice $A - XI_n$:
   $$A - XI_n = \begin{pmatrix} A_1 - XI_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & A_2 - XI_{n_r} \end{pmatrix},$$

I_t étant la matrice unité d'ordre t.
D'après les propriétés des déterminants, on a $\det(A - XI_n) = \det(A_1 - XI_r) \times \det(A_2 - XI_{n-r})$. On reconnaît l'égalité : $P_{car,f} = P_{car,f_{/F}} \times P_{car,f_{/G}}$.

2. Soient λ une valeur propre de f, E_λ le sous-espace propre associé à λ, $F_{(\lambda)} = F \cap E_\lambda = \{x \in F/\ f(x) = \lambda x\}$ et $F_{(\lambda)} = G \cap E_\lambda = \{x \in G/\ f(x) = \lambda x\}$.
(Remarque : l'un de ces sous-espaces vectoriels peut ne contenir que le vecteur nul).

   (a) On veut montrer l'égalité $E_\lambda = F_{(\lambda)} \oplus G_{(\lambda)}$. On sait que F et G sont des sous-espaces supplémentaires, donc $F \cap G = \{0_E\}$, à fortiori $F_{(\lambda)} \cap G_{(\lambda)} = \{0_E\}$. Donc la somme de $F_{(\lambda)}$ et $G_{(\lambda)}$ est directe et comme chacun d'eux est inclus dans E_λ, on a $F_{(\lambda)} \oplus G_{(\lambda)} \subset E_\lambda$. On montre $E_\lambda \subset F_{(\lambda)} \oplus G_{(\lambda)}$: Soit u un élément de E_λ, donc $f(u) = \lambda u$; u , en tant qu'élément de E, s'écrit $u = u_1 + u_2$; $u_1 \in F$ et $u_2 \in G$ Ceci entraîne à la fois $f(u) = \lambda(u_1 + u_2)$ et $f(u) = f(u_1) + f(u_2)$. Or F et G sont stables par f, donc $f(u_1) \in F$ et $f(u_2) \in G$, et comme la somme de F et G est directe, l'écriture de $f(u)$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique. Cela entraîne : $f(u_1) = \lambda u_1$ et $f(u_2) = \lambda u_2$. Donc $u_1 \in F_{(\lambda)}$ et $u_2 \in G_{(\lambda)}$, et par suite $u = u_1 + u_2 \in F_{(\lambda)} \oplus G_{(\lambda)}$. D'où, $E_\lambda \subset F_{(\lambda)} \oplus G_{(\lambda)}$.
   On a bien montré l'égalité $E_\lambda = F_{(\lambda)} \oplus G_{(\lambda)}$.

   (b) Si $F_{(\lambda)}$ n'est pas réduit au vecteur nul, soit v un vecteur non nul appartenant à $F_{(\lambda)} = F \cap E_\lambda$; ça veut dire, $v \in F$ et $f(v) = \lambda v$; donc $f_{/F}(v) = \lambda v$; d'après la définition de vecteur propre, v est un vecteur propre de $f_{/F}$ et λ est une valeur propre de $f_{/F}$.
   Réciproquement, si λ est une valeur propre de $f_{/F}$, il existe un vecteur v non nul appartenant à F tel que $f_{/F}(v) = \lambda v$ or $f_{/F}(v) = f(v)$, donc $f(v) = \lambda v$ et v appartient à $F \cap E_\lambda = F_{(\lambda)}$.
   Donc $F_{(\lambda)}$, considéré comme sous-espace vectoriel de F, est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de $f_{/F}$.

3. Comme f est diagonalisable, son polynôme caractéristique est scindé. Or le polynôme caractéristique de $f_{/F}$ divise le polynôme caractéristique de f, (question 1), donc le polynôme caractéristique de $f_{/F}$, $P_{car,f_{/F}}$, est scindé, et toute racine de $P_{car,f_{/F}}$ est racine de $P_{car,f}$.
Soit λ une racine de $P_{car,f_{/F}}$, λ est une valeur propre de $P_{car,f_{/F}}$, donc aussi de f, et

$F_{(\lambda)} = F \cap E_\lambda$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de $f_{/F}$, d'après la question 2.

On sait que la dimension de $F_{(\lambda)}$ est inférieure ou égale à l'ordre de multiplicité de λ dans $P_{car,f_{/F}}$.

Pour montrer que $f_{/F}$ est diagonalisable, on montre que la dimension de $F_{(\lambda)}$ est égale à l'ordre de multiplicité de λ dans $P_{car,f_{/F}}$:

(a) Si $G_{(\lambda)}$ est réduit au vecteur nul, alors :

- d'une part λ n'est pas racine de $P_{car,f_{/G}}$, et comme $P_{car,f} = P_{car,f_{/F}} \times P_{car,f_{/G}}$, l'ordre de multiplicité de λ dans $P_{car,f_{/F}}$ est égal à l'ordre de multiplicité de λ dans $P_{car,f}$;
- d'autre part $E_\lambda = F_{(\lambda)} \oplus G_{(\lambda)} = F_{(\lambda)} \oplus \{0_E\}$, ceci entraîne donc $E_\lambda = F_{(\lambda)}$. Or f est diagonalisable donc la dimension de E_λ est égale à l'ordre de multiplicité de λ dans $P_{car,f}$ et donc la dimension de $F_{(\lambda)}$ est égale à l'ordre de multiplicité de λ dans $P_{car,f_{/F}}$.

(b) Si $G_{(\lambda)}$ n'est pas réduit au vecteur nul,

- ce qui est vrai pour $F_{(\lambda)}$ est vrai pour $G_{(\lambda)}$: $G_{(\lambda)}$, considéré comme sous-espace vectoriel de G, est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de $f_{/G}$ et la dimension de $G_{(\lambda)}$ est inférieure ou égale à l'ordre de multiplicité de λ dans $P_{car,f_{/G}}$.
  On fait alors une démonstration par l'absurde :
  Supposons que la dimension de $F_{(\lambda)}$ est strictement inférieure à l'ordre de multiplicité de λ dans $P_{car,f_{/F}}$. Comme $E_\lambda = F_{(\lambda)} \oplus G_{(\lambda)}$, $\dim(E_\lambda) = \dim(F_{(\lambda)}) + \dim(G_{(\lambda)})$, et donc la dimension de E_λ serait strictement inférieure à la somme des ordres de multiplicité de λ dans $P_{car,f_{/F}}$ et $P_{car,f_{/G}}$; or cette somme est égale à l'ordre de multiplicité de λ dans $P_{car,f}$ car $P_{car,f} = P_{car,f_{/F}} \times P_{car,f_{/G}}$. Donc la dimension de E_λ serait strictement inférieure à l'ordre de multiplicité de λ dans $P_{car,f}$, ce qui est absurde car f est diagonalisable.

Exercise 22 (08 minutes) *Les hypothèses de cet exercice utilisent le résultat de l'exercice(20) : "Un sous-espace stable par un endomorphisme diagonalisable admet un supplémentaire stable".*

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie n ; $n \in \mathbb{N}^*$, et f un endomorphisme de E diagonalisable. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension r; $0 < r < n$, stable par f.

1. *Soit G un supplémentaire de F stable par f. Soit λ une valeur propre de f et E_λ le sous-espace propre associé à λ. On note $F_{(\lambda)}$ et $G_{(\lambda)}$ les sous-espaces vectoriels de E suivants : $F_{(\lambda)} = F \cap E_\lambda$ et $F_{(\lambda)} = G \cap E_\lambda$.*
   (a) *Montrer l'égalité : $E_\lambda = F_{(\lambda)} \oplus G_{(\lambda)}$.*
   (b) *Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ les t valeurs propres distinctes de f. Montrer les égalités : $F = F_{(\lambda_1)} \oplus F_{(\lambda_2)} \oplus \cdots \oplus F_{(\lambda_t)}$ et $G = G_{(\lambda_1)} \oplus G_{(\lambda_2)} \oplus \cdots \oplus G_{(\lambda_t)}$.*
2. *En déduire que F admet une base de vecteurs propres de $f_{/F}$, la restriction de f au sous-espace F, et donc que la restriction de f au sous-espace F est diagonalisable.*

Solution(22) :

1. Soient λ une valeur propre de f, E_λ le sous-espace propre associé à λ, $F_{(\lambda)} = F \cap E_\lambda = \{x \in F/\ f(x) = \lambda x\}$ et $F_{(\lambda)} = G \cap E_\lambda = \{x \in G/\ f(x) = \lambda x\}$.
   (Remarque : l'un de ces sous-espaces vectoriels peut ne contenir que le vecteur nul).
   (a) On veut montrer l'égalité $E_\lambda = F_{(\lambda)} \oplus G_{(\lambda)}$. On sait que F et G sont des sous-espaces supplémentaires, donc $F \cap G = \{0_E\}$, à fortiori $F_{(\lambda)} \cap G_{(\lambda)} = \{0_E\}$. Donc la somme de $F_{(\lambda)}$ et $G_{(\lambda)}$ est directe et comme chacun d'eux est inclus dans E_λ, on a $F_{(\lambda)} \oplus G_{(\lambda)} \subset E_\lambda$. On montre $E_\lambda \subset F_{(\lambda)} \oplus G_{(\lambda)}$: Soit u un élément de E_λ, donc $f(u) = \lambda u$; u , en tant qu'élément de E, s'écrit $u = u_1 + u_2$; $u_1 \in F$ et $u_2 \in G$ Ceci entraîne à la fois $f(u) = \lambda(u_1 + u_2)$ et $f(u) = f(u_1) + f(u_2)$. Or F et G sont stables par f, donc $f(u_1) \in F$ et $f(u_2) \in G$, et comme la somme de F et G est directe, l'écriture de $f(u)$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique. Cela entraîne : $f(u_1) = \lambda u_1$ et $f(u_2) = \lambda u_2$. Donc $u_1 \in F_{(\lambda)}$ et $u_2 \in G_{(\lambda)}$, et par suite $u = u_1 + u_2 \in F_{(\lambda)} \oplus G_{(\lambda)}$. D'où, $E_\lambda \subset F_{(\lambda)} \oplus G_{(\lambda)}$.
   On a bien montré l'égalité $E_\lambda = F_{(\lambda)} \oplus G_{(\lambda)}$.
   (b) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ les t valeurs propres distinctes de f. Comme f est diagonalisable, E est somme directe de ses sous-espaces propres. Donc $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_t}$. Or d'après la question précédente $E_{\lambda_i} = F_{(\lambda_i)} \oplus G_{(\lambda_i)}$, pour tout $i = 1, 2, \ldots, t$. L'égalité suivante est alors immédiate :

$$E = F_{\lambda_1} \oplus F_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_t} \oplus G_{\lambda_1} \oplus G_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus G_{\lambda_t}.$$

Comme pour tout $i = 1, 2, \ldots, t$, $F_{\lambda_i} \subset F$ et $G_{\lambda_i} \subset G$, on en déduit :

$$F_{\lambda_1} \oplus F_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_t} \subset F \quad \text{et} \quad G_{\lambda_1} \oplus G_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus G_{\lambda_t} \subset G.$$

Comme on a aussi $E = F \oplus G$, la seule possibilité est :

$$F = F_{\lambda_1} \oplus F_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_t} \quad \text{et} \quad G = G_{\lambda_1} \oplus G_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus G_{\lambda_t}.$$

(On peut aussi considérer les dimensions de tous les sous-espaces intervenant dans ces sommes directes.)

2. Donc $F = F_{\lambda_1} \oplus F_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_t}$. Il est possible que certains des f_{λ_i} soient réduits au vecteur nul. Comme la dimension de F est non nulle, un au moins de ces sous-espaces vectoriels n'est pas réduit au vecteur nul. En notant $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ ceux des λ_i tels que F_{λ_i} ne soit pas réduit au vecteur nul, on en déduit : $F = F_{\mu_1} \oplus F_{\mu_2} \oplus \cdots \oplus F_{\mu_k}$. Le sous-espace vectoriel F admet donc comme base la réunion des bases des F_{μ_i} ; $i = 1, 2, \ldots, k$. Or $F_{\mu_i} = F \cap E_{\mu_i}$, donc tout élément v non nul de F_{μ_i} appartient à E_{μ_i} et est donc un vecteur propre de f : $f(v) = \mu_i v$. Soit $f_{/F}$ la restriction de f au sous-espace F :

$$\begin{array}{rccc} f_{/F}: & F & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Comme v appartient à F, on obtient $f_{/F}(v) = f(v) = \mu_i v$, donc v est un vecteur propre de $f_{/F}$. Donc F admet une base formée de vecteurs propres de $f_{/F}$. D'où $f_{/F}$ est diagonalisable.

Exercise 23 (08 minutes) *Il est utile pour résoudre cet exercice de connaître le résultat de l'exercice(21) : "La restriction à un sous-espace vectoriel stable d'un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable".*
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie n; $n \in N$. On considère deux endomorphismes f et g de E tels que $f \circ g = g \circ f$.

1. *Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g.*
2. *Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à f et g.*
3. *Montrer que si f et g sont diagonalisables, il existe une base commune de vecteurs propres. L'endomorphisme $f \circ g$ est-il diagonalisable ?*

4. *On considère les matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et les endomorphismes de* $\mathbb{C}^2$ *associés à ces matrices dans la base canonique de* $\mathbb{C}^2$*. La propriété démontrée au 3 est-elle vérifiée ? Expliquer.*

Solution(23) :

1. Soient λ une valeur propre de f et E_λ le sous-espace propre associé à λ. Soit u appartenant à E_λ, i.e. $f(u) = \lambda u$. On montre que $g(u)$ appartient à E_λ : en effet $f(g(u)) = g(f(u))$ car $f \circ g = g \circ f$. Comme $f(u) = \lambda u$, il vient $f(g(u)) = g(f(u)) = g(u)$, ce qui signifie que $g(u)$ appartient aussi à E_λ, donc E_λ est stable par g.

2. Comme E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de f est scindé, il admet donc une racine, notée λ, qui est une valeur propre de f. Le sous-espace propre E_λ est stable par g d'après la question 1). On peut donc considérer la restriction $g_{/E_\lambda}$ de g au sous-espace E_λ :

$$g_{/E_\lambda} : \begin{array}{ccc} E_\lambda & \longrightarrow & E_\lambda \\ u & \longmapsto & g(u). \end{array}$$

L'application $g_{/E_\lambda}$ est un endomorphisme de E_λ, qui est lui aussi un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, donc le polynôme caractéristique de $g_{/E_\lambda}$ a une racine μ qui est une valeur propre de $g_{/E_\lambda}$. Il existe alors un élément v de E_λ qui est vecteur propre de $g_{/E_\lambda}$, c'est-à-dire tel que $v \neq 0_E$ et $g_{/E_\lambda}(v) = \mu v$. Or $g_{/E_\lambda}(v) = g(v)$. Donc v , un vecteur non nul, vérifie à la fois $g(v) = \mu v$ et $f(v) = \lambda v$ (puisque v appartient à E_λ). D'où v est un vecteur propre commun à f et à g.

3. On suppose de plus que f et g sont diagonalisables. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ les t valeurs propres distinctes de f, donc $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_t}$, E_{λ_i} étant le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i. D'après la question 1, les sous-espaces propres E_{λ_i}; $i = 1, 2, \ldots, t$, sont stables par g, or on a le résultat rappelé de l'exercice précédent : " La restriction à un sous-espace vectoriel stable d'un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable ".
Donc dans chaque E_{λ_i}; $i = 1, 2, \ldots, t$, il existe une base de vecteurs propres pour la restriction de g à ce sous-espace, ces vecteurs propres sont donc aussi des vecteurs propres de g, mais ce sont des vecteurs propres de f d'après la définition de E_{λ_i}.
Comme E est somme directe des E_{λ_i}; $i = 1, 2, \ldots, t$, la réunion de ces bases de E_{λ_i}, est une base de E ; c'est une base commune de vecteurs propres de f et g.

De plus, si v est un vecteur propre à la fois de f et de g, il existe λ et μ tels que $f(v) = \lambda v$ et $g(v) = \mu v$, donc $f \circ g(v) = f(\mu v) = \mu f(u) = \mu\lambda v$ et v est vecteur propre de $f \circ g$. Donc la base commune de vecteurs propres de f et g est une base de vecteurs propres de $f \circ g$, donc $f \circ g$ est diagonalisable.

4. Soit f associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et g associé à la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$.
   La matrice A est diagonale, donc f est diagonalisable, la matrice B admet deux valeurs propres 1 et 2 distinctes, donc g est diagonalisable.
   Le produit AB est égal à $AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donc $f \circ g$ n'est pas diagonalisable car la matrice AB a la seule valeur propre double 2 sans être égale à $2I_2$, I_2 étant la matrice unité d'ordre 2 (voir par exemple que le rang de $AB - 2I_2$ est 1, donc $E_2 = \ker(f \circ g - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})$ est de dimension 1). Ceci ne peut s'expliquer que par l'absence d'au moins une hypothèse. En effet $AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   Donc $f \circ g \neq g \circ f$.

Exercise 24 (08 minutes) *Il est utile pour résoudre cet exercice de connaître le résultat de l'exercice(21) : "La restriction à un sous-espace vectoriel stable d'un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable".*
Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété P_n suivante : P_n : " Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n, il existe une base formée de vecteurs propres communs à un ensemble d'endomorphismes diagonalisables qui commutent entre eux. "

1. *Montrer que la propriété P_1 est vraie.*
2. *Soit n strictement supérieur à 1. On suppose que la propriété P_m est vraie pour tout entier $1 < m < n$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, S un ensemble d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux.*
   (a) *Montrer que si tous les éléments de S sont des homothéties, la propriété P_n est vérifiée.*
   (b) *On suppose qu'il existe un élément f de S qui n'est pas une homothétie. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les r valeurs propres de f et $E_1, E_2, \ldots, E_r$ les sous-espaces propres associés.*
   Soit i un entier compris entre 1 et r, montrer que le sous-espace vectoriel E_i

est stable par tous les endomorphismes de S : $g(E_i) \subset E_i$, $\forall g \in S$.
En déduire que la propriété P_n *est vraie.*

3. *Conclure.*

Solution(24) :

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1, S un ensemble d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux.
   Tout vecteur u non nul de E forme une base de E, et quelque soit l'endomorphisme f de E, $f(u)$ est colinéaire à u, donc u est une base de vecteurs propres pour tout endomorphisme de E, donc à fortiori pour tout élément de S.
   Donc la propriété P_1 est vraie.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $n > 1$, S un ensemble d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux.

   (a) Soit f une homothétie de E, c'est-à-dire : $\exists \lambda \in \mathbb{K}; \forall x \in E, f(x) = \lambda x$; donc tout élément non nul de E est un vecteur propre de f. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, cette base est donc une base de vecteurs propres pour n'importe quelle homothétie de E et si tous les éléments de S sont des homothéties, la propriété P_n est vérifiée.

   (b) Soit f un élément de S, f n'étant pas une homothétie. Puisque f est diagonalisable, soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les r valeurs propres de f et $E_1, E_2, \ldots, E_r$ les sous-espaces propres associés (l'entier r est strictement supérieur à 1 puisque f n'est pas une homothétie). Soient i un entier compris entre 1 et r, et u un vecteur appartenant à E_i, donc $f(u) = \lambda_i u$. Soit g appartenant à S, donc g commute avec f . On montre que $g(u)$ appartient à E_i :
   En effet, $g(f(u)) = f(g(u))$ car $g \circ f = f \circ g$. Comme $f(u) = \lambda_i g(u)$, il vient $g(f(u)) = g(\lambda_i u) = \lambda_i g(u)$. Donc $f(g(u)) = \lambda_i g(u)$, ce qui signifie que $g(u)$ appartient à E_i .
   Donc tous les sous-espaces propres E_i , $1 \leq i \leq r$, sont stables par tous les endomorphismes de S.
   Soit i fixé, $1 \leq i \leq r$, et soit g appartenant à S. Le sous-espace propre E_i étant stable par g , et g étant diagonalisable, la restriction de g à E_i est diagonalisable. Donc, les restrictions des éléments de S au sous-espace propre E_i forment un ensemble d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Or le sous-espace vectoriel E_i est de dimension strictement inférieur à n car E_i est

contenu dans E et n'est pas égal à E puisque f n'est pas une homothétie.
Comme la propriété P_m est vraie pour tout entier m ; $0 < m < n$, dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E_i , il existe une base formée de vecteurs propres communs à toutes les restrictions des éléments de S , mais les vecteurs propres des restrictions des éléments de S sont aussi des vecteurs propres de ces éléments.
Ceci est vrai dans chaque E_i , $1 \leq i \leq r$. Or f est diagonalisable, donc $E = E_i \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_r$, et la réunion des bases des E_i forme une base de E .
On a donc construit dans E une base de vecteurs propres communs à tous les éléments de S . La propriété P_n est donc vérifiée.

3. Les questions 1. et 2. constituent la démonstration par récurrence de la propriété P_n . Donc on a démontré le résultat suivant : Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n $(n \in \mathbb{N}^*)$, il existe une base formée de vecteurs propres communs à un ensemble d'endomorphismes diagonalisables commutant entre eux.

1.11.8 Test 4

Cette ressource contient un test composé d'exercices théoriques simples sur la diagonalisation d'endomorphismes ou de matrices.
Prérequis indispensables : Le cours sur les endomorphismes ou matrices diagonalisables.
Objectifs : Appliquer les différents théorèmes et conditions suffisantes ou nécessaires de diagonalisation dans des situations plutôt abstraites.
Temps de travail prévu : 55 minutes

Exercise 25 *Soit M une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels, admettant une valeur propre complexe λ non réelle.*

1. *Montrer que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes).*
2. *En déduire que 1 est une valeur propre de M^n si et seulement si $M^n = I_2$, où I_2 est la matrice unité d'ordre 2, et donner une condition nécessaire et suffisante vérifiée par λ pour que cette relation soit vérifiée.*

Exercise 26 *Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n > 1$ et $\mathbb{K}$ étant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soient f et g des endomorphismes de E . On suppose que f et g ont chacun n valeurs propres distinctes. Montrer que f et g commutent (c'est-à-dire $f \circ g = g \circ f$) si et seulement si f et g ont les mêmes vecteurs propres.*

Exercise 27 *Dans cet exercice $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n est un entier naturel non nul et A est une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.*

1. *Montrer que le polynôme $Q : X \mapsto Q(X) = X^{n-1}$ divise le polynôme caractéristique de A .*
2. *Si A n'est pas diagonalisable, quel est son polynôme caractéristique ?*
3. *Si A est diagonalisable, montrer que A est semblable à la matrice suivante :*

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & tr(A) \end{pmatrix},$$

où $tr(A)$ est la trace de la matrice A , c'est-à-dire la somme des éléments diagonaux de la matrice A .

<u>Solution du test</u>

<u>Solution</u>(25) :

1. Les valeurs propres de M sont les racines de son polynôme caractéristique.
   Le polynôme caractéristique de M est à coefficients réels, comme λ est une racine complexe non réelle, sa conjuguée $\overline{\lambda}$ est aussi racine de ce polynôme et est distincte de λ . Comme M est une matrice carrée d'ordre 2, son polynôme caractéristique est de degré 2, et comme ce polynôme admet deux racines distinctes, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
2. D'après la question 1., M est diagonalisable, donc il existe une matrice P inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, telle que :
   $M = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix} P^{-1}$
   On en déduit : $M^n = P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}^n \end{pmatrix} P^{-1}$.
   Donc la matrice M^n admet les deux valeurs propres λ^n et $\overline{\lambda}^n$.
   Par suite 1 est valeur propre de M^n si et seulement si λ^n ou $\overline{\lambda}^n$ est égal à 1, donc si et seulement si λ^n et $\overline{\lambda}^n$ sont toutes deux égales à 1, donc si et seulement si $M^n = PI_2P^{-1} = I_2$.
   La condition nécessaire est suffisante que doit vérifiée λ pour que la relation $M^n =$

I_2 soit vérifiée est $\lambda^n = 1$. Ceci est vérifié si et seulement si il existe un entier k tel que $\lambda = \exp\left(\frac{2k}{n} i\pi\right)$.

Solution(26) :

On montre que la condition " f et g commutent " est suffisante pour que f et g admettent les mêmes vecteurs propres.
On suppose donc que f et g commutent, c'est-à-dire $f \circ g = g \circ f$.
Soit v un vecteur propre de f ; il existe un scalaire λ de $\mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda v$. Comme $f \circ g = g \circ f$, donc $g(f(v)) = f(g(v))$. Par suite $f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$.
On a ainsi montré que $g(v)$ appartient au sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ .
Or f a n valeurs propres distinctes, donc chaque sous-espace propre de f est de dimension 1 ; comme v est non nul et appartient au sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ , il en forme une base. Puisque $g(v)$ appartient au sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ , il est donc colinéaire à v ; c'est-à-dire il existe un scalaire α de $\mathbb{K}$ tel que $g(v) = \alpha v$. Et par suite, le vecteur v est un vecteur propre de g . Comme f et g ont des rôles identiques, on montre de même que tout vecteur propre de g est un vecteur propre de f .
On montre que la condition " f et g commutent " est nécessaire pour que f et g admettent les mêmes vecteurs propres.
On suppose donc que f et g ont les mêmes vecteurs propres. Comme f et g ont chacun n valeurs propres distinctes, ils sont diagonalisables, et la base de E formée de vecteurs propres de f est donc aussi une base de vecteurs propres de g . Soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ une telle base. Il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que $f(v_i) = \lambda_i v_i$, pour tout entier i ; $1 \leq i \leq n$ et de même il existe des scalaires $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ tels que $g(v_i) = \mu_i v_i$, pour tout entier i ; $1 \leq i \leq n$. Alors pour tout i ; $1 \leq i \leq n$, on a

$$g(f(v_i)) = g(\lambda_i v_i) = \lambda_i g(v_i) = \lambda_i \mu_i v_i \quad \text{et} \quad f(g(v_i)) = f(\mu_i v_i) = \mu_i f(v_i) = \mu_i \lambda_i v_i.$$

Donc $f \circ g$ et $g \circ f$, étant égaux sur une base de E , sont égaux sur E tout entier.

Solution(26) :

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A . Le rang de f est aussi égal au rang de A : $rang(f) = rang(A) = 1$. Par conséquent $\dim(\ker(f)) = n - 1$, et, d'après le théorème de la base incomplète, il existe une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ tel que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ soit une base de $\ker(f)$ et des

scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que la matrice de f dans cette base soit la suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Comme A et B représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes nous avons :

$$P_{car,f}(X) = P_{car,A}(X) = P_{car,B}(X) = (-X)^{n-1}(\alpha_n - X).$$

Et par suite, le polynôme $Q : X \mapsto Q(X) = X^{n-1}$ divise le polynôme caractéristique de A .

2. Comme $P_{car,f}(X) = (-X)^{n-1}(\alpha_n - X)$, si α_n est différent de 0, f admet deux valeurs propres distinctes : 0 de multiplicité $n-1$ et α_n de multiplicité 1. Notons E_0 et E_{α_n} les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 0 et α_n respectivement. Comme $E_0 = \ker(f)$, nous avons $\dim(E_0) = \dim(\ker(f)) = n-1$. Comme α_n est de multiplicité 1, nous avons $\dim(E_{\alpha_n}) = 1$. Par conséquent, lorsque α_n est différent de 0, le polynôme caractéristique de f est scindé et la dimension des sous-espaces propres est égale à la multiplicité des valeurs propres associées, donc f est diagonalisable.
   Si α_n est égal à 0, f admet une seule valeur propre 0 de multiplicité n . Notons E_0 le sous-espace propre associé à la valeur propre 0, Comme $E_0 = \ker(f)$, nous avons $\dim(E_0) = \dim(\ker(f)) = n-1$. Par conséquent, lorsque α_n est égal à 0, la multiplicité de la valeur propre 0 n'est pas égale à la dimension du sous-espace propre associé, d'où f n'est pas diagonalisable.
   Si A n'est pas diagonalisable alors f n'est pas diagonalisable et nous avons α_n qui est égal à 0. Par conséquent si A n'est pas diagonalisable, son polynôme caractéristique est égal à $P_{car,A}(X) = (-1)^n X^n$.
3. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si α_n est différent de 0.
   Si $\alpha_n \neq 0$, les valeurs propres de f sont 0 de multiplicité $n-1$ et α_n de multiplicité 1, et il existe une base de vecteurs propres de f telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice suivante :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Comme A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, si A est diagonalisable alors f est diagonalisable et les matrices A et D sont semblables. Or deux matrices semblables ont la même trace donc $\alpha_n = tr(A)$. Par conséquent, si A est diagonalisable, A est semblable à la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & tr(A) \end{pmatrix}.$$

Chapitre 2

Polynôme minimal

2.1 Polynôme minimal d'un endomorphisme

2.1.1 Introduction

L'objet de cette ressource est l'introduction et l'étude des propriétés du polynôme minimal d'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de type fini (ou d'une matrice). Cette notion de polynôme minimal est fondamentale dans la théorie de la réduction des matrices (ou des endomorphismes). Elle permet en effet de résoudre des problèmes difficiles sans nécessiter beaucoup de calculs. Attention, le lien entre polynôme caractéristique et polynôme minimal n'est pas exposé dans cette ressource, mais dans celle traitant du théorème de Cayley Hamilton.

Prérequis indispensables :

- L'algèbre linéaire.
- Les polynômes (définition, structure), la notion de fonctions polynômes et leurs propriétés.
- Les généralités sur les endomorphismes diagonalisables.

Objectifs :

- Acquérir la notion de polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de type fini et la caractérisation d'un endomorphisme diagonalisable faisant intervenir le polynôme minimal.

Dans le dernier paragraphe est traitée la notion de polynôme minimal d'une partie relativement à un endomorphisme. Cette notion, plus fine que celle de polynôme minimal, a des applications très intéressantes. Cependant, elle n'est pas toujours traitée et peut donc éventuellement ne pas être abordée dans un premier temps. Dans le Q.C.I., aucune question ne porte donc sur cette notion.

2.1.2 Polynôme annulateur d'un endomorphisme d'un espace vectoriel

Construction d'un morphisme de l'algèbre des polynômes dans l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel

Soient $\mathbb{K}$ un corps (ici c'est le corps des réels ou celui des complexes) et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On note $\mathbb{K}[X]$ l'algèbre des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $L_{\mathbb{K}}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E (ou applications linéaires de E dans lui-même).
Soit f une application linéaire de E dans lui-même. On peut définir une application Φ_f de $\mathbb{K}[X]$ dans $L_{\mathbb{K}}(E)$ de la façon suivante :
Pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ définit par $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_kX^k$, $\Phi_f(P)$ est l'endomorphisme de E suivant :

$$\Phi_f(P) = P(f) = a_0\mathrm{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_k f^k \ ,$$

avec Id_E est l'application identique de E et si r est un entier positif ou nul, f^r est défini par récurrence de la manière suivante : $\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_E & \text{si } r = 0, \\ f^r = f^{r-1} \circ f & \text{si } r = 0. \end{cases}$

Exemple 2.1 *soit f une application linéaire de E dans lui-même. L'endomorphisme $f^2 + f - 2Id_E$ est l'image par Φ_f du polynôme P définit par $P(X) = X^2 + X - 2$.*

Compte tenu des propriétés connues des fonctions polynômes, Φ_f a les propriétés suivantes :

Théorème 2.1 (Propriétés de l'application qui à P associe $\Phi_f(P) = P(f)$) *Soit Φ_f l'endomorphise définit ci-dessus Pour tout élément P, Q de $\mathbb{K}[X]$, Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Pour tout élément P, Q de $\mathbb{K}[X]$, on a $\Phi_f(P + Q) = \Phi_f(P) + \Phi_f(Q)$,*
2. *Pour tout élément P de $\mathbb{K}[X]$ et tout α de $\mathbb{K}$, on a $\Phi_f(\alpha P) = \alpha\Phi_f(P)$,*
3. *Pour tout élément P, Q de $\mathbb{K}[X]$, on a $\Phi_f(PQ) = \Phi_f(P) \circ \Phi_f(Q)$,*
4. *Si on note " 1 " le polynôme constant égal à $1_{\mathbb{K}}$, $\Phi_f(1)$ est l'application identique de E.*

Remarque 2.1
- *Les propriétés 1., 3. et 4. caractérisent les homomorphismes d'anneau .*

- *Les propriétés 1. et 2. caractérisent les applications linéaires .*

On peut dire que Φ_f est un homomorphisme d'algèbre.

Comme le produit dans est commutatif, la propriété suivante est immédiate.

Propriété 2.1 *Soit f une application linéaire de E dans lui-même. Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$, on a $\Phi_f(P) \circ \Phi_f(Q) = \Phi_f(Q) \circ \Phi_f(P)$.*

Il faut bien voir l'intérêt de cette propriété : en effet la composition des applications et ici des endomorphismes n'est pas commutative. Par contre les endomorphismes de la forme $\Phi_f(P) = P(f)$ où P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, commutent entre eux.

Définition d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme

Définition 2.1 (Polynôme annulateur d'un endomorphisme) *Soit f une application linéaire de E dans lui-même. On appelle polynôme annulateur de f un polynôme P non nul appartenant à $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$.*

Autrement dit, si $P : X \mapsto P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_k X^k$ est un polynôme annulateur de f , il est non nul et pour tout $x \in E$, $P(f)(x) = a_0 x + a_1 f(x) + \cdots + a_k f(x)^k = 0$.

Exemple 2.2 *Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = Id_E$ (f est une symétrie). Alors le polynôme $P : X \mapsto P(X) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de f . Le polynôme $Q : X \mapsto Q(X) = X^3 - X$ est aussi un polynôme annulateur de f .*
En effet, $P(f) = f^2 - Id_E = 0$ et $Q(f) = f^3 - f = f^2 \circ f - f = Id_E \circ f - f = f - f = 0$, puisque $f^2 = Id_E$.

D'après cette définition, si f est une application linéaire de E dans lui-même, P est un polynôme annulateur de f si et seulement si P est non nul et $\Phi_f(P) = 0$, donc si et seulement si P est non nul et appartient au noyau de Φ_f . L'étude de ce noyau permet donc de connaître la structure de l'ensemble des polynômes annulateurs d'un endomorphisme f . Dans toute la suite ce noyau est noté $Ann(f)$. Avant d'énoncer et de démontrer le théorème qui donne ses propriétés, il peut être utile de revoir la notion d'idéal et la structure des idéaux de $\mathbb{K}[X]$.

Rappel sur la notion d'idéal :

La sous structure essentielle dans la théorie des anneaux est l'idéal. Pour ceux qui ne connaissent pas cette notion, nous donnons la définition générale d'un idéal, sans aller plus avant dans la théorie générale. Cela est fait dans le but de faciliter l'exposé de ce cours.

Définition 2.2 (Idéal dans un anneau commutatif) *Soit A un anneau commutatif. On dit qu'une partie I de A est un idéal de A si I vérifie les propriétés suivantes :*

1. *I est non vide,*
2. *I est stable pour la soustraction, c'est-à-dire : $\forall (x,y) \in I \times I,\ x - y \in I$,*
3. *Pour tout élément a de A et tout élément x de I , le produit ax appartient à I , autrement dit : $\forall a \in A, \forall x \in I,\ ax \in I$.*

Remarque 2.2 *les propriétés 1. et 2. signifient que I est un sous-groupe additif de A . L'ensemble des propriétés 1. et 2. équivaut à l'ensemble des propriétés :*

- *$I \neq \emptyset$,*
- *$\forall (x,y) \in I \times I,\ x - y \in I$,*
- *$\forall x \in I,\ -x \in I$.*

2.1.3 Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de type fini

Désormais l'espace vectoriel considéré est de type fini. Soit f une application linéaire de E dans lui-même. L'étude de $Ann(f)$, noyau de Φ_f , conduit au théorème définition suivant :

Théorème 2.2 (Définition de polynôme minimal d'un endomorphisme) *Soit E un espace vectoriel de type fini et f un endomorphisme de E . L'ensemble $Ann(f)$, noyau de Φ_f , vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$Ann(f)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, non réduit à 0 (le polynôme nul) .*
2. *Il existe un unique polynôme unitaire tel que tout polynôme annulateur de f soit un multiple de ce polynôme.*
   Ce polynôme est appelé le polynôme minimal de f et est noté $P_{min,f}$. Ceci peut être écrit sous la forme :

$$Ann(f) = P_{min,f}\mathbb{K}[X] = \{Q \in \mathbb{K}[X]; \exists Q_1 \in \mathbb{K}[X], Q = P_{min,f}Q_1\}.$$

Remarque 2.3 *Pour les étudiants connaissant la théorie des anneaux, le résultat 1. est immédiat puisque Φ_f est un morphisme d'anneau ; en effet le noyau d'un morphisme d'anneau est un idéal de l'anneau de départ.*

Preuve du théorème :

1. Montrons que $Ann(f)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, non réduit à 0 (le polynôme nul). On a déjà remarqué que Φ_f est une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $L_{\mathbb{K}}(E)$. Donc son noyau est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, en particulier il est non vide et stable pour la soustraction. De plus, si P est un élément de $Ann(f)$ et Q un élément quelconque de $\mathbb{K}[X]$, alors $\Phi_f(PQ) = \Phi_f(P) \circ \Phi_f(Q) = 0$, car $\Phi_f(P) = 0$ $(P \in Ann(f))$. Donc PQ appartient à $Ann(f)$. D'où, $Ann(f)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

   Il reste à montrer que $Ann(f)$ n'est pas réduit au polynôme nul. C'est là qu'intervient fondamentalement l'hypothèse faite sur E d'être de type fini. Soit n la dimension de E . L'espace vectoriel $L_{\mathbb{K}}(E)$ est alors un espace vectoriel de type fini dont la dimension est n^2 . Or, la famille $\{\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n^2}\}$ comprend n^2+1 éléments de $L_{\mathbb{K}}(E)$, donc elle n'est pas libre et $\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n^2}$ sont linéairement dépendants. Il existe donc $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n^2}$ éléments de $\mathbb{K}$, non tous nuls, tels que $a_0\mathrm{Id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_{n^2} f^{n^2} = 0$. Le polynôme $P : X \mapsto P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_{n^2} X^{n^2}$ est donc un polynôme annulateur de f , donc P est un élément de $Ann(f)$ et il n'est pas nul car ses coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n^2}$ ne sont pas tous nuls.

2. Montrons maintenant l'existence d'un unique polynôme unitaire tel que tout polynôme annulateur de f soit un multiple de ce polynôme.

   - Montrons l'existence d'un polynôme satisfaisant au problème.

     Soit N_f l'ensemble des degrés des polynômes non nuls éléments de $Ann(f)$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers n tels qu'il existe $P \in Ann(f)$, non nul, avec $deg(P) = n$. Comme l'idéal $Ann(f)$, n'est pas réduit à 0, N_f est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc possède un plus petit élément noté n_0 . On a donc les deux propriétés suivantes :

     $\forall P \in Ann(f);\ P \neq 0,\ deg(P) \geq n_0,$
     $\exists P_0 \in Ann(f);\ n_0 = deg(P_0).$

     Soit P un élément quelconque de $Ann(f)$; en faisant la division euclidienne de P par P_0 on obtient :

     $\exists!(Q,R) \in (\mathbb{K}[X])^2;\ P = QP_0 + R$, avec $R = 0$ ou $deg(R) < n_0$. Comme $Ann(f)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, QP_0 est un élément de $Ann(f)$ ($P_0 \in Ann(f)$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$), et par conséquent le polynôme $R = P - QP_0$ est aussi élément de $Ann(f)$. Si $R \neq 0$, d'après la définition de n_0, on a l'inégalité : $deg(R) \geq n_0$. On a donc une contradiction, puisque d'après la propriété de la division euclidienne, on a $deg(R) < n_0$. L'hypothèse $R \neq 0$ est donc absurde et on a $R = 0$. Alors $P = QP_0$. Ceci prouve l'inclusion $P_0\mathbb{K}[X] \supseteq Ann(f)$. L'autre inclusion est immédiate, car P_0 appartient à $Ann(f)$ et ce dernier est un ideal de $\mathbb{K}[X]$. D'où $Ann(f) = P_0\mathbb{K}[X]$. Considérons le polynôme $P_1 = \frac{1}{a_{n_0}}P_0$. Alors P_1 est un polynôme unitaire engendrant $Ann(f)$, c'est-à-dire $Ann(f) = P_1\mathbb{K}[X]$.

- Montraons maintenant l'unicité d'un polynôme unitaire satisfaisant au problème.
  Supposons qu'il existe P_2 un autre polynôme unitaire engendrant $Ann(f)$. Comme $P_1 \in Ann(f) = P_2\mathbb{K}[X]$, il existe c une constante réelle non nulle telle que $P_1 = cP_2$. Puisque P_1 et P_2 sont unitaires, alors forcement $c = 1$, et par suite on a $P_1 = P_2$.

$\square$

Remarques 2.1 *1. La propriété qui vient d'être démontrée est un résultat général des idéaux de l'anneau $\mathbb{K}[X]$.*

2. Il résulte de la construction du polynôme minimal que nous venons de faire que le polynôme minimal de f est le polynôme unitaire annulateur de f de plus bas degré. Cette remarque est souvent utile dans la pratique pour trouver explicitement le polynôme minimal d'un endomorphisme.

3. $P_{min,f}(X) = 1 \iff E = \{0\}$. Donc dans toute la suite on suppose que E est différent de $\{0\}$.

4. Si E est différent de $\{0\}$, alors $P_{min,f}(X) = X \iff f = 0$.

Théorème 2.3 (Caractérisation des idéaux de K(X)) *Pour tout idéal I de $\mathbb{K}[X]$, il existe un polynôme P tel que I soit égal à l'ensemble des multiples de P. Ce qui peut s'écrire :*

$$I = P\mathbb{K}[X] = \{Q \in \mathbb{K}[X]; \exists Q_1 \in \mathbb{K}[X], Q = PQ_1\}.$$

On dit que I est engendré par P. Si I n'est pas réduit au polynôme nul, P est non nul. Si, de plus, on impose à P d'être unitaire, il est unique.

Remarque 2.4 *1. Un idéal engendré par un élément est appelé un idéal principal. Il résulte du théorème ci-dessus que tous les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont principaux.*

2. Un anneau intègre dont tous les idéaux sont principaux est appelé un anneau principal. Donc, $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal.

Exemple 2.3 *Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2 et $\{e_1, e_2\}$ une base de E. Soient f, g et h des endomorphismes de E définis par :*
$f(e_1) = e_2, f(e_2) = 0, g(e_1) = e_2, g(e_2) = -e_1, h(e_1) = e_2, h(e_1) = e_2.$
Déterminer le polynôme minimale de chaque endomorphisme.

Solution :

- On considère l'endomorphisme f de E défini par $f(e_1) = e_2, f(e_2) = 0$. Il est alors immédiat que $f^2(e_1) = 0,\ f^2(e_2) = 0$, et par conséquent $f^2 = 0$. Le polynôme $P : X \mapsto P(X) = X^2$ est donc un polynôme annulateur de f ; c'est donc un multiple du polynôme minimal de f. Les diviseurs de P sont les polynômes : $P_1 : X \mapsto P_1(X) = 1,\ P_2 : X \mapsto P_2(X) = X$ et P. L'espace considéré n'est pas $\{0\}$, donc cela exclut P_1, l'endomorphisme f n'est pas nul donc P_2 n'est pas un polynôme annulateur de f. Par conséquent il reste P_3 et donc $P_{min,f} = P$.
- On considère l'endomorphisme g de E défini par $g(e_1) = e_2, g(e_2) = -e_1$. Il est alors immédiat que $g^2(e_1) = -e_1,\ g^2(e_2) = -e_2$, et par conséquent $f^2 = -\mathrm{Id}_E$, soit $g^2 + \mathrm{Id}_E = 0$. Le polynôme $P : X \mapsto P(X) = X^2 + 1$ est donc un polynôme annulateur de g ; c'est donc un multiple du polynôme minimal de g. Comme il est irréductible sur $\mathbb{R}$, il n'a pas de diviseur et c'est le polynôme minimal de g, donc $P_{min,g} = P$.
- On considère l'endomorphisme h de E défini par $h(e_1) = e_2, h(e_2) = e_1$. Il est alors immédiat que $h^2(e_1) = e_1,\ h^2(e_2) = e_2$, et par conséquent $h^2 = \mathrm{Id}_E$, soit $h^2 - \mathrm{Id}_E = 0$. Le polynôme $P : X \mapsto P(X) = X^2 - 1$ est donc un polynôme annulateur de h, donc le polynôme minimal de h est un diviseur de P. Cela peut donc être : $P_1 : X \mapsto P_1(X) = X - 1$, $P_2 : X \mapsto P_2(X) = X + 1$ ou P. Or, ni P_1 ni P_2 ne sont des polynômes annulateurs de h puisque $h(e_1)$ est différent de e_1 et de $-e_1$. Donc le polynôme minimal de h est P.

Exemple 2.4 *Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et E l'espace vectoriel suivant :*

$$E = \{P \in \mathbb{K}[T];\ P = 0 \ ou\ deg(P) \leq n\}.$$

Soit D l'endomorphisme de E défini par $D(P) = P'$ (polynôme dérivé du polynôme P). Déterminer le polynôme minimale de D.

Remarque 2.5 (Remarque sur la notation) *Si l'espace vectoriel considéré est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, ou l'un de ses sous-espaces, les polynômes vont intervenir dans deux rôles différents : comme vecteurs et comme polynômes* *annulateurs. Pour éviter les confusions, l'indéterminée est notée T pour les polynômes lorsqu'ils sont considérés comme des vecteurs.*

Solution :
On sait que E est de dimension $n+1$. Une démonstration par récurrence prouve immédiatement que :

- pour tout entier k tel que $k \geq 1$, on a $D^k(P) = P^{(k)}, \forall P \in E$,
- pour tout entier k et r tels que $1 \leq k \leq r \leq n$, on a $D^k(T^r) = r(r-1)\cdots(r-k+1)T^{r-k}$.

Alors, pour tout $P : T \mapsto P(T) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_n T^n$, on a $D^n(P) = n!a_n$ et $D^{n+1} = 0$. Cela prouve que $D^{n+1} = 0$ et $D^n \neq 0$ (puisque par exemple $D^n(T^n) = n!$). Donc $Q : X \mapsto Q(X) = X^{n+1}$ est un polynôme annulateur de D, et comme $Q_1 : X \mapsto Q_1(X) = X^n$ n'est pas un polynôme annulateur de D, alors Q est le polynôme unitaire annulateur de D de plus bas degré, c'est-à-dire que $P_{min,D} = Q$.

2.1.4 Polynôme minimal d'une matrice

Soient $\mathbb{K}$ un corps (ici c'est le corps des réels ou celui des complexes) et M une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Comme précédemment, on peut construire une application Φ_M de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la façon suivante :
Pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ définit par $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_k X^k$, $\Phi_M(P)$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ suivante :

$$\Phi_M(P) = P(M) = a_0 I_n + a_1 M + \cdots + a_k M^k \ ,$$

avec I_n est la matrice unité de d'ordre n.
On montre, de la même manière, que Φ_M est un morphisme d'anneau, que son noyau n'est pas réduit à 0. On le note $Ann(M)$. Les éléments non nuls de cet idéal sont appelés les polynômes annulateurs de M. Cet idéal est engendré par un polynôme, unique si on lui impose d'être unitaire. C'est le polynôme minimal de M. On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Soient M et N deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
Alors, $P_{min,M} = P_{min,N}$.

Preuve :
Soient M et N deux matrices semblables ; il existe donc une matrice inversible Q de

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telle que $M = QNQ^{-1}$. Alors si $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_kX^k$, il vient immédiatement :

$$P(M) = a_0 + a_1M + \cdots + a_kM^k = Q(a_0 + a_1N + \cdots + a_kN^k)Q^{-1} = QP(N)Q^{-1}.$$

Il en résulte alors l'égalité $Ann(M) = Ann(N)$, d'où le résultat.
. □

Cette proposition permet d'établir un lien entre le polynôme minimal d'un endomorphisme et celui d'une matrice. On a aussi, compte tenu des propriétés qui lient endomorphisme et matrice, la propriété : $Ann(M) = Ann(f)$, où f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n et M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associée à f par rapport à une base de E.

Compte tenu de ces deux résultats, on a le théorème suivant :

Théorème 2.4 (Polynôme minimal, endomorphisme et matrice associée)

1. *Le polynôme minimal de f, endomorphisme d'un espace vectoriel E de type fini, est égal au polynôme minimal d'une matrice de f dans n'importe quelle base de E.*
2. *Le polynôme minimal d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est égal au polynôme minimal de l'endomorphisme f_M de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est égale à M.*

Ce résultat est très utile dans la pratique car il permet de choisir le point de vue, vectoriel ou matriciel, qui est le plus simple dans le contexte.

2.1.5 Polynôme minimal et sous-espaces stables. Application aux matrices

Ce paragraphe fournit des outils essentiels dans cette théorie.

Sous-espace stable par un endomorphisme

Définition 2.3 (Définition d'un sous-espace stable par un endomorphisme) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On dit qu'un sous-espace F de E est stable par f si $f(F) \subseteq F$, ce qui équivaut à : $\forall x \in F, f(x) \in F$.*

La restriction de f à un sous-espace F de E est l'application : $\hat{f} : F \mapsto E$ définie par $\hat{f}(x) = f(x)$. C'est encore une application linéaire.

Si F est un sous-espace stable par f, la restriction de f à F permet de définir une application de F dans F, notée $f_{/F}$, qui est un endomorphisme de F. Par abus de langage, on l'appelle encore restriction de f à F.
C'est une des raisons de l'importance de la notion de sous-espace stable.

Exemple 2.5 *Si f est un endomorphisme d'un espace de type fini, admettant des valeurs propres, tout sous-espace propre de f est stable par f.*

Interprétation en termes de matrice

On suppose E de type fini. Soit F un sous-espace de E, stable par f. On considère une base de E obtenue en complétant une base $\mathcal{B}_F$ de F. Alors la matrice associée à f dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A est la matrice associée à la restriction $f_{/F}$ de f à F par rapport à $\mathcal{B}_F$.

Généralisation

Soit E un espace vectoriel de type fini. On suppose que E est somme directe de sous-espaces $(F_i)_{1\leq i\leq k}$, stables par f, ce qui s'écrit $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k$, avec $f(F_i) \subset F_i$ pour tout i ; $1 \leq i \leq k$. Soit une base de E obtenue en prenant la réunion des bases $\mathcal{B}_{F_i}$ de F_i, alors la matrice associée à f dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

où A_i est la matrice associée à la restriction $f_{/F_i}$ de f à F_i par rapport à $\mathcal{B}_{F_i}$.

Polynôme minimal de la restriction à un sous-espace stable et applications

Cas d'un sous-espace stable

Proposition 2.2 (Polynôme minimal de la restriction à un sous-espace stable) *Soit F un sous-espace de E, stable par f. Alors le polynôme minimal de la restriction de f à F divise le polynôme minimal de f . Soit une matrice M de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Alors le polynôme minimal de A divise le polynôme minimal de M.*

Preuve :

Il est clair que la propriété concernant les endomorphismes entraîne immédiatement la

propriété concernant les matrices.
Puisque le polynôme minimal de f est un polynôme annulateur de f , pour tout élément v de E, on a $(P_{min,f}(f))(v) = 0$. Ceci est vrai en particulier pour tout élément v de F. Or si v appartient à F , $(P_{min,f}(f))(v) = \left(P_{min,f}(f_{/F})\right)(v)$. Donc $\forall v \in F$, $\left(P_{min,f}(f_{/F})\right)(v) = 0$. D'où $P_{min,f}(f_{/F}) = 0$. Le polynôme minimal de f est un polynôme annulateur de $f_{/F}$. Donc c'est un multiple du polynôme minimal de $f_{/F}$.

□

Cas d'une somme directe de sous-espaces stables

Il résulte immédiatement de la proposition précédente que, si $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k$, le polynôme minimal de f est un multiple de chacun des polynômes P_{min,f_i}, où $f_i = f_{/F_i}$, donc de leur PPCM. La réciproque est vraie comme le prouve le théorème suivant :

Théorème 2.5 *Soientt E un espace vectoriel de type fini et f un endomorphisme de E. On suppose que E est somme directe de sous-espaces $(F_i)_{1\leq i\leq r}$, stables par f, ce qui s'écrit $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_r$, avec $f(F_i) \subset F_i$ pour tout i ; $1 \leq i \leq r$. Alors, $P_{min,f} = PPCM\,(P_{min,f_i}, 1 \leq i \leq r)$, où f_i est la restriction de f à F_i.*

Preuve :
Soit v un élément quelconque de E. On peut l'écrire sous la forme $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_r$ avec, pour tout i, avec $1 \leq i \leq r$, v_i élément de F_i. On note Q le $PPCM\,(P_{min,f_i}, 1 \leq i \leq r)$.
Alors
$Q(f)(v) = Q(f)(v_1) + Q(f)(v_2) + \cdots + Q(f)(v_r) = Q(f_1)(v_1) + Q(f_2)(v_2) + \cdots + Q(f_r)(v_r)$.
Comme, pour tout i, avec $1 \leq i \leq r$, Q est un multiple du polynôme minimal de f_i, on a : $\forall i; 1 \leq i \leq r$, $Q(f_i) = 0$.
Donc pour tout $v \in E$, $Q(f)(v) = 0$, c'est-à-dire $Q(f) = 0$ sur E, et par conséquent le polynôme Q est un polynôme annulateur de f, donc c'est un multiple du polynôme minimal de f. Comme ces deux polynômes sont unitaires, Q et $P_{min,f}$ sont égaux.

□

interprétation en termes matriciels

On en déduit immédiatement le résultat suivant :

Théorème 2.6 *Soit A une matrice carrée d'ordre n, qui se présente comme un tableau diagonal de matrices carrées, soit*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix}.$$

Alors, $P_{min,A} = PPCM\,(P_{min,A_i}, 1 \leq i \leq r)$*.*

Exemple 2.6 *Soit* A *la matrice, à coefficients dans* $\mathbb{C}$*, suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $P_{min,A}$ *le polynôme minimal de* A*.*

Preuve :

Cette matrice se décompose en blocs sous la forme :

$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{pmatrix}$, avec

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = (0), \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

(tous les autres blocs étant nuls).

Il est immédiat que $P_{min,A_2}(X) = X$ puisque A_2 est la matrice nulle.

La matrice A_1 a une seule valeur propre qui est 0 . Or on est dans $\mathbb{C}$, donc on sait que le polynôme minimal de A_1 est scindé. Donc le polynôme minimal de A_1 est de la forme X^r. Pour le déterminer exactement, on calcule les puissances successives de A_1 et on s'arrête dès que l'on trouve la matrice nulle. On obtient

$A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Donc $P_{min,A_1}(X) = X^3$.

On peut faire exactement le même raisonnement pour A_3 donc $P_{min,A_3}(X) = X^3$.

Alors $P_{min,A}(X) = PPCM(X, X^3) = X^3$.

Polynôme annulateur et décomposition en somme directe de sous-espaces stables

Le résultat suivant est un outil tout à fait essentiel pour la suite et dans toute la théorie de la réduction des matrices.

Lemme 2.1 (Lemme des noyaux) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$; on suppose que $P = P_1P_2\cdots P_k$ avec $P = P_1, P_2, \ldots, P_k$ sont des polynômes premiers entre eux deux à deux. Alors :*

$$\ker(P(f)) = \ker(P_1(f)) \oplus \ker(P_2(f)) \oplus \cdots \oplus \ker(P_k(f)).$$

Preuve :

On procède par récurrence pour $k \geq 2$.

- Cas où $k = 2$:
  On a donc $P = P_1P_2$ avec P_1, P_2 premiers entre eux. On peut donc appliquer le théorème de Bézout. Il existe donc deux polynômes Q_1 et Q_2 tels que $P_1Q_1+P_2Q_2 = 1$. D'où, $P_1(f)\circ Q_1(f)+P_2(f)\circ Q_2(f) = \mathrm{Id}_E$. Donc pour tout x de E et en particulier pour tout élément x de $\ker(P(f))$, on a : $x = [P_1(f)\circ Q_1(f)](x)+[P_2(f)\circ Q_2(f)](x)$. Soient $x_1 = [P_1(f)\circ Q_1(f)](x)$ et $x_2 = [P_2(f)\circ Q_2(f)](x)$. Alors $x = x_1+x_2$. D'autre part, on a
  $$\begin{aligned} P_2(f)(x_1) &= P_2(f)\left([P_1(f)\circ Q_1(f)](x)\right) \\ &= [P_2(f)\circ P_1(f)\circ Q_1(f)](x) \\ &= [Q_1(f)\circ P_1(f)\circ P_2(f)](x) \\ &= [Q_1(f)\circ P(f)](x) \\ &= 0, \end{aligned}$$
  puisque x appartient au noyau de $P(f)$. D'où $P_2(f)(x_1) = 0$ et par conséquent x_1 appartient à $\ker(P_2(f))$.
  De la même façon on démontre que x_2 appartient à $\ker(P_1(f))$.
  Donc on a $\ker(P(f)) = \ker(P_1(f))+\ker(P_2(f))$. Donc Cette somme est directe. En effet, soit x appartenant à E, alors
  $$\begin{aligned} x \in \ker(P_1(f))\cap\ker(P_2(f)) &\iff x \in \ker(P_1(f)) \text{ et } x \in \ker(P_2(f)) \\ &\iff P_1(f)(x) = 0 \text{ et } P_2(f)](x) = 0. \end{aligned}$$
  Or, $x = [P_1(f)\circ Q_1(f)](x) + [P_2(f)\circ Q_2(f)](x) = [Q_1(f)\circ P_1(f)](x) + [Q_2(f)\circ P_2(f)](x)$ (ne pas oublier que les endomorphismes de la forme $P(f)$ commutent entre eux), d'où $x = 0$. Et par conséquent $\ker(P_1(f))\cap\ker(P_2(f)) = \{0\}$.
  D'où $\ker(P(f)) = \ker(P_1(f))\oplus\ker(P_2(f))$.
- Supposons le résultat vrai jusqu'à k et montrons le pour $k+1$.

Soit $P = P_1P_2 \cdots P_kP_{k+1}$. Posons $R_1 = P_1P_2 \cdots P_k$ et $R_2 = P_{k+1}$. Les polynômes R_1 et R_2 sont premiers entre eux (théorème de Gauss) et par conséquent d'après le cas $k = 2$, on a $\ker(P(f)) = \ker(R_1(f)) \oplus \ker(R_2(f))$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, cela donne $\ker(P(f)) = \ker(P_1(f)) \oplus \ker(P_2(f)) \oplus \cdots \oplus \ker(P_k(f)) \oplus \ker(P_{k+1})$.

Remarque 2.6 *Il faut noter que E est un espace quelconque que l'on n'a pas supposé de type fini.*

Corollaire 2.1 (Polynôme annulateur et décomposition en somme directe) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$; on suppose que $P = P_1P_2 \cdots P_k$ avec $P = P_1, P_2, \ldots, P_k$ sont des polynômes premiers entre eux deux à deux. Pour tout i compris entre 1 et k, on note $E_i = ker(P_i(f))$. Alors :*

1. *E est somme directe des sous-espaces E_i, autrement dit : $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_k$.*
2. *Pour tout i compris entre 1 et k, le sous-espace E_i est stable par f.*

Preuve :

1. Cette propriété est une conséquence immédiate du lemme des noyaux puisque, P étant un polynôme annulateur de f , on a $E = \ker(P(f))$.
2. Cette propriété se vérifie aisément. En effet soit v un élément de $E_i = ker(P_i(f))$; on a donc $P_i(f)(v) = 0$. Comme f et $P_i(f)$ commutent, $P_i(f)(f(v)) = f(P_i(f)(v)) = f(0) = 0$. Donc $f(v)$ appartient à $E_i = ker(P_i(f))$.

□

Remarque 2.7 *Comme P est un polynôme annulateur mais pas forcément le polynôme minimal, certains de ces noyaux peuvent être réduits au vecteur nul.*

Exemple 2.7 (Exemple d'utilisation de ce corollaire et illustration de la remarque) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Déterminer tout les endomorphisme f de E vérifiant $f^2 = Id_E$, ainsi que ses polynômes minimaux.*

Solution :

Soit f un tel endomorphisme de E. Le polynôme $P : X \mapsto P(X) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de f. Comme $P(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ avec $P_1 : X \mapsto P_1(X) = X - 1$ et $P_2 : X \mapsto P_2(X) = X + 1$ premiers entre eux, on a d'après le corollaire, ci-dessus, $E = \ker(P(f)) = \ker(P_1(f)) \oplus \ker(P_2(f))$. Plusieurs cas sont à envisager :

1. Si $\ker(P_1(f)) = \{0\}$; alors $E = \ker(P(f)) = \ker(P_2(f))$, $f = -\mathrm{Id}_E$ et $P_{min,f} = P_2$.
2. Si $\ker(P_2(f)) = \{0\}$; alors $E = \ker(P(f)) = \ker(P_1(f))$, $f = \mathrm{Id}_E$ et $P_{min,f} = P_1$.
3. Si $\ker(P_1(f)) \neq \{0\}$ et $\ker(P_2(f)) \neq \{0\}$; alors $\forall v \in \ker(P_1(f))$, $f(v) = v$ et $\forall v \in \ker(P_2(f))$, $f(v) = -v$. Donc f est la symétrie par rapport à $\ker(P_1(f))$ parallèlement à $\ker(P_2(f))$. Dans ce cas là, le polynôme minimal de f est $P_{min,f} = P$.

2.1.6 Polynôme minimal d'un endomorphisme, ou d'une matrice, valeurs propres et diagonalisation

Théorème 2.7 (Valeurs propres et polynôme minimal) *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$- espace vectoriel E de dimension finie n , $n \geq 1$. Un scalaire λ est valeur propre de f si et seulement si λ est racine du polynôme minimal de f.*

Preuve :

- Soit λ une valeur propre de f et $P_{min,f} : X \mapsto P_{min,f}(X) = b_s X^s + b_{s-1} X^{s-1} + \cdots + b_1 X + b_0$ le polynôme minimal de f. Il existe donc un vecteur v de E non nul tel que $f(v) = \lambda v$. Une récurrence immédiate prouve que pour tout entier strictement positif k, $f^k(v) = \lambda^k v$, d'où on en déduit que pour tout polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$, $(P(f))(v) = P(\lambda)v$. En appliquant ce résultat avec le polynôme minimal, on obtient $(P_{min,f}(f))(v) = P_{min,f}(\lambda)v$, mais $(P_{min,f}(f))(v) = 0$, donc $P_{min,f}(\lambda)v = 0$. Comme le vecteur v est non nul on en déduit que $P_{min,f}(\lambda) = 0$, c'est-à-dire, λ est une racine de $P_{min,f}$.
- Réciproquement, soit λ est une racine de $P_{min,f}$. Le polynôme $P : X \mapsto P(X) = X - \lambda$ divise donc $P_{min,f}$; cela prouve l'existence d'un polynôme Q tel que $P_{min,f} = PQ$. Alors, on a $P_{min,f}(f) = P(f) \circ Q(f) = 0$. Comme le degré de Q est strictement inférieur au degré de $P_{min,f}$, Q n'est pas un polynôme annulateur de f. Il en résulte que $u = Q(f)$ n'est pas nul et que $P(f)(u) = 0$, c'est-à-dire $(f - \lambda \mathrm{Id}_E)(u) = 0$, c'est-à-dire $f(u) = \lambda u$, et par conséquent λ est une valeur propre de f.

□

Remarque 2.8 *Le polynôme minimal a donc les mêmes racines que le polynôme caractéristique.*

Théorème 2.8 ***(Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation faisant intervenir le polynôme minimal)***
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$- espace vectoriel E de dimension finie n , $n \geq 1$ (ou soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$). Pour que f (respectivement M) soit diagonalisable, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

1. *Le polynôme minimal de f (respectivement de M) se factorise en un produit de polynômes unitaires du premier degré à coefficients dans $\mathbb{K}$ (autrement dit est scindé dans $\mathbb{K}$).*
2. *Ces polynômes sont tous distincts. Autrement dit le polynôme minimal de f (respectivement de M) n'a que des racines simples.*

Remarque 2.9 (Remarque importante) *Ce théorème est fondamental dans cette théorie. Il permet en effet de déterminer si un endomorphisme est ou n'est pas diagonalisable, dans des situations où les hypothèses ne permettraient pas de le faire avec la caractérisation faisant intervenir le polynôme caractéristique. Par contre, ce théorème n'est pas effectif et ce procédé ne permet pas d'obtenir une base de vecteurs propres. De plus, le calcul du polynôme minimal est moins systématique que celui du polynôme caractéristique. Toutefois la connaissance du théorème de Cayley Hamilton facilite beaucoup la détermination du polynôme minimal. Cela est traité dans une autre ressource.*

Exemple 2.8 (Exemple illustrant cette remarque) *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe E de dimension finie n , $n \geq 1$. On suppose qu'il existe un entier k , $k \geq 1$ tel que $f^k = Id_E$. Montrer que f est diagonalisable.*

<u>Solution :</u>
Le polynôme $P : X \mapsto P(X) = X^k - \lambda$ est un polynôme annulateur de f, donc est divisible par le polynôme minimal de f. Dans $\mathbb{C}$, corps algébriquement clos, le polynôme P est scindé et n'a que des racines simples (les k racines k-ième de l'unité) et par conséquent tout polynôme qui le divise aussi. Donc, d'après le théorème ci-dessus, f est diagonalisable.
Ce qu'il faut particulièrement remarquer dans cet exemple c'est que l'on ne connaît ni le polynôme minimal de f, ni son polynôme caractéristique ni ses valeurs propres et évidemment encore moins ses sous-espaces-propres, mais que l'on a su justifier qu'il était diagonalisable.

<u>Preuve du théorème :</u>

- Supposons que f soit diagonalisable. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f et $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_r}$ les sous-espaces propres associés. Si l'on considère le polynôme $P : X \mapsto P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\cdots(X - \lambda_r)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, il est scindé dans $\mathbb{K}$ et n'a que des racines simples. Pour tout entier $i; 1 \leq i \leq r$, les polynômes $P_i : X \mapsto P(X) = X - \lambda_i$ sont premiers entre eux deux à deux ce qui permet d'utiliser le lemme des noyaux (2.1), d'où
$$\begin{aligned}\ker(P(f)) &= \ker(P_1(f)) \oplus \ker(P_2(f)) \oplus \cdots \oplus \ker(P_r(f)) \\ &= \ker(f - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \lambda_2 \mathrm{Id}_E) \oplus \cdots \oplus \ker(f - \lambda_r \mathrm{Id}_E) \\ &= E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r} \\ &= E \text{ (car } f \text{ est diagonalisable)}.\end{aligned}$$
Il en résulte que $E = \ker(P(f))$ et donc que $P(f) = 0$. Le polynôme P est donc un polynôme annulateur de f et par conséquent c'est un multiple du polynôme minimal de f. Mais comme les valeurs propres de f sont racines du polynôme minimal d'après la propriété vue précédemment, le polynôme minimal de f est un multiple du polynôme P. Comme ils sont unitaires tous les deux, ils sont égaux et par conséquent $P_{min,f} = P$, polynôme qui n'a en effet que des racines simples.

- Réciproquement, supposons que $P_{min,f} : X \mapsto P_{min,f}(X) = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_r)$ où les α_i sont tous distincts. Les racines du polynôme minimal étant les valeurs propres de f, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ sont les valeurs propres de f. De plus comme $P_{min,f}(f) = 0$, alors $E = \ker(P_{min,f}(f))$, et d'après le lemme des noyaux (2.1), on a
$$\begin{aligned}E = \ker(P_{min,f}(f)) &= \ker(f - \alpha_1 \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \alpha_2 \mathrm{Id}_E) \oplus \cdots \oplus \ker(f - \alpha_r \mathrm{Id}_E) \\ &= E_{\alpha_1} \oplus E_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus E_{\alpha_r}.\end{aligned}$$
Donc f est diagonalisable.

□

Exemple 2.9 *Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2 et $\{e_1, e_2\}$ une base de E. Soient f, g et h des endomorphismes de E définis par :*
$f(e_1) = e_2, f(e_2) = 0, g(e_1) = e_2, g(e_2) = -e_1, h(e_1) = e_2, h(e_1) = e_2.$
Vérifier si ces endomorphismes sont diagonalisables ou non.

Solution :

- On considère l'endomorphisme f de E défini par $f(e_1) = e_2, f(e_2) = 0$. Il est alors immédiat que $f^2(e_1) = 0,\ f^2(e_2) = 0$, et par conséquent $f^2 = 0$. Le polynôme $P : X \mapsto P(X) = X^2$ est donc un polynôme annulateur de f ; c'est donc un multiple du polynôme minimal de f. Les diviseurs de P sont les polynômes : $P_1 : X \mapsto P_1(X) = 1,\ P_2 : X \mapsto P_2(X) = X$ et P. L'espace considéré n'est pas $\{0\}$, donc cela exclut P_1, l'endomorphisme f n'est pas nul donc P_2 n'est pas un polynôme annulateur de f. Par conséquent il reste P_3 et donc $P_{min,f} = P$. Ce polynôme est bien scindé dans $\mathbb{R}$, mais il n'a pas que des racines simples et donc f n'est pas diagonalisable.
- On considère l'endomorphisme g de E défini par $g(e_1) = e_2, g(e_2) = -e_1$. Il est alors immédiat que $g^2(e_1) = -e_1,\ g^2(e_2) = -e_2$, et par conséquent $f^2 = -\mathrm{Id}_E$, soit $g^2 + \mathrm{Id}_E = 0$. Le polynôme $P : X \mapsto P(X) = X^2 + 1$ est donc un polynôme annulateur de g ; c'est donc un multiple du polynôme minimal de g. Comme il est irréductible sur $\mathbb{R}$, il n'a pas de diviseur et c'est le polynôme minimal de g, donc $P_{min,g} = P$. Ce polynôme n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$, et donc g n'est pas diagonalisable.
- On considère l'endomorphisme h de E défini par $h(e_1) = e_2, h(e_2) = e_1$. Il est alors immédiat que $h^2(e_1) = e_1,\ h^2(e_2) = e_2$, et par conséquent $h^2 = \mathrm{Id}_E$, soit $h^2 - \mathrm{Id}_E = 0$. Le polynôme $P : X \mapsto P(X) = X^2 - 1$ est donc un polynôme annulateur de h, donc le polynôme minimal de h est un diviseur de P. Cela peut donc être : $P_1 : X \mapsto P_1(X) = X - 1$, $P_2 : X \mapsto P_2(X) = X + 1$ ou P. Or, ni P_1 ni P_2 ne sont des polynômes annulateurs de h puisque $h(e_1)$ est différent de e_1 et de $-e_1$. Donc le polynôme minimal de h est P. Il est scindé dans $\mathbb{R}$, et n'a que des racines simples ; donc h est diagonalisable.

Exemple 2.10 *Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et E l'espace vectoriel suivant :*

$$E = \{P \in \mathbb{K}[T];\ P = 0 \ \textit{ou}\ deg(P) \leq n\}.$$

Soit D l'endomorphisme de E défini par $D(P) = P'$ (polynôme dérivé du polynôme P). D est-il diagonalisable ?.

Solution :

On sait que E est de dimension $n + 1$. Une démonstration par récurrence prouve immédiatement que :

- pour tout entier k tel que $k \geq 1$, on a $D^k(P) = P^{(k)}, \forall P \in E$,

- pour tout entier k et r tels que $1 \leq k \leq r \leq n$, on a $D^k(T^r) = r(r-1)\cdots(r-k+1)T^{r-k}$.

Alors, pour tout $P : T \mapsto P(T) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_n T^n$, on a $D^n(P) = n!a_n$ et $D^{n+1} = 0$. Cela prouve que $D^{n+1} = 0$ et $D^n \neq 0$ (puisque par exemple $D^n(T^n) = n!$). Donc $Q : X \mapsto Q(X) = X^{n+1}$ est un polynôme annulateur de D, et comme $Q_1 : X \mapsto Q_1(X) = X^n$ n'est pas un polynôme annulateur de D, alors Q est le polynôme unitaire annulateur de D de plus bas degré, c'est-à-dire que $P_{min,D} = Q$. Ce polynôme est scindé dans $\mathbb{K}$ mais n'a pas que des racines simples, donc D n'est pas diagonalisable.

2.2 Questionnaire de compréhension immédiate

Question 17 *Soient E un espace vectoriel de type fini sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) et f un endomorphisme non nul de E, vérifiant l'égalité $f^2 = 4f$. Cocher tout polynôme pouvant être égal au polynôme minimal de f.*

☐	$P : X \mapsto P(X) = X$
☐	$P : X \mapsto P(X) = X - 2$
☐	$P : X \mapsto P(X) = X - 4$
☐	$P : X \mapsto P(X) = X(X-2)$
☐	$P : X \mapsto P(X) = X(X-4)$
☐	$P : X \mapsto P(X) = (X-2)(X-4)$

Question 18 *Soient E un espace vectoriel de type fini sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) et f un endomorphisme non nul de E, vérifiant l'égalité $f^2 = 4f$. Peut-on avoir $P_{min,f}(0) \neq 0$?*

☐	*Oui*
☐	*Non*

Question 19 *Soient E un espace vectoriel de type fini sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) et f un endomorphisme non nul de E. Pour que le scalaire λ soit une valeur propre de f, la propriété : ń λ est racine du polynôme minimal de f ż est une condition...*

☐	*nécessaire (uniquement)*
☐	*suffisante (uniquement)*
☐	*nécessaire et suffisante*

Question 20 *Soit E un espace vectoriel réel, de dimension 6, et f un endomorphisme de E, vérifiant l'égalité $P_{min,f}(X) = X^2 + 1$. L'endomorphisme $f - 9Id_E$ est-il inversible ?*

☐	*Oui*
☐	*Non*

Question 21 *Soit la matrice à coefficients dans* $\mathbb{C}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Cocher son polynôme minimal.

☐	$P : X \mapsto P(X) = (X-2)(X-3i)(X-7)$
☐	$P : X \mapsto P(X) = (X-2)(X-3i)(X-7)^2$
☐	$P : X \mapsto P(X) = (X-2)^2(X-3i)^2(X-7)^2$
☐	$P : X \mapsto P(X) = (X-2)(X-3i)^2(X-7)^3$
☐	$P : X \mapsto P(X) = (X-2)(X-3i)^2(X-7)$
☐	$P : X \mapsto P(X) = (X-2)(X-3i)(X-7)^3$
☐	$P : X \mapsto P(X) = (X-2)^2(X-3i)^2(X-7)^3$
☐	$P : X \mapsto P(X) = (X-2)^2(X-3i)(X-7)^3$
☐	$P : X \mapsto P(X) = (X-2)(X-3i)^2(X-7)^2$
☐	$P : X \mapsto P(X) = (X-2)^2(X-3i)^2(X-7)$

Question 22 *Soit une matrice carrée* A, *d'ordre* n, *à coefficients dans un corps* $\mathbb{K}$ *(* $\mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}$ *). La proposition ń* A *est diagonalisable* $\Longrightarrow P_{min,A}(X) = (-1)^n P_{car,A}(X)$ *ż est*

☐	*vraie*
☐	*fausse*

Question 23 *Soit une matrice carrée* A, *d'ordre* n, *à coefficients dans un corps* $\mathbb{K}$ *(* $\mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}$ *). La proposition ń* A *est diagonalisable* $\Longleftarrow P_{min,A}(X) = (-1)^n P_{car,A}(X)$ *ż est*

☐	*vraie*
☐	*fausse*

Question 24 *Soient* E *un espace vectoriel de type fini sur un corps* $\mathbb{K}$ *(* $\mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}$ *) et* f *un endomorphisme non nul de* E, *vérifiant l'égalité* $f^2 - 3f + 2Id_E = 0$. *L'endomorphisme* f *est-il diagonalisable ?*

☐	*Oui*
☐	*Non*

Question 25 *Soit* A *une matrice carrée, réelle, non diagonalisable, dont le polynôme caractéristique est défini par* $P_{car,A}(X) = (1+X)^2(1-X)$. *Son polynôme minimal est un*

des quatre polynômes proposés. Cochez-le.

☐	$P : X \mapsto P(X) = X - 1$
☐	$P : X \mapsto P(X) = (X+1)^2$
☐	$P : X \mapsto P(X) = (X-1)(X+1)$
☐	$P : X \mapsto P(X) = (X-1)(X+1)^2$

Question 26 *Soient les matrices* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ont-elles le même polynôme caractéristique ?

☐	*Oui*
☐	*Non*

Question 27 *Soient les matrices* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ont-elles le même polynôme minimal ?

☐	*Oui*
☐	*Non*

Question 28 *Soient les matrices* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sont-elles semblables ?

☐	*Oui*
☐	*Non*

2.3 Exercices simples avec solutions

2.3.1 Fiche 1

Cette ressource est composée de quatre exercices assez simples faisant intervenir le polynôme minimal.

Prérequis indispensables :

- Le cours sur le polynôme minimal d'un endomorphisme : polynôme annulateur, définition du polynôme minimal, la caractérisation des endomorphismes diagonalisables à l'aide du polynôme minimal.
- Le deuxième exercice utilise la notion de matrice inversible.

Temps de travail prévu : 50 minutes

Exercise 28 (10 minutes) *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On considère un endomorphisme f de E vérifiant les relations suivantes :*

1. $f^3 - 3f^2 + 2f = 0$,
2. $f^8 + 16f^4 = 0$.

Solution(28) :

L'endomorphisme f vérifie les relations $f^3 - 3f^2 + 2f = 0$ et $f^8 + 16f^4 = 0$. Les polynômes $P_1 : X \mapsto P_1(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$ et $P_2 : X \mapsto P_2(X) = X^8 + 16X^4$ sont donc des polynômes annulateurs de f et donc des multiples du polynôme minimal de f. Or, $P_1(X) = X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$ et $P_2(X) = X^8 + 16X^4 = X^4(X^4+1)$. Le polynôme $P : X \mapsto P(X) = X$ est le seul diviseur commun aux polynômes P_1 et P_2. C'est donc le polynôme minimal de f. Le polynôme minimal de f étant un polynôme annulateur de f, on a $f = 0$.

Exercise 29 (20 minutes) *Soit A la matrice élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer les puissances de la matrice $A - I_3$.*
2. *Déterminer le polynôme minimal de la matrice A.*
3. *Calculer A^n pour n élément de $\mathbb{N}$.*
4. *Après avoir justifié l'existence de A^{-1}, calculer A^n pour n élément de $\mathbb{Z}$.*

Solution(29) :

1. Calculons les puissances de la matrice $A - I_3$.
   On a
   $$A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, (A - I_3)^2 = 0,$$
   d'où pour tout entier $n \geq 2$, $(A - I_3)^n = 0$.

2. Déterminons le polynôme minimal de la matrice A.
   On a $(A - I_3)^2 = 0$, d'où le polynôme $P : X \mapsto P(X) = (X-1)^2$ est un polynôme annulateur de A. Le polynôme minimal de A est un diviseur de P. Or, $P_1 : X \mapsto P_1(X) = X - 1$ n'est pas un polynôme annulateur de A car on a $A - I_3 \neq 0$. Le polynôme minimal de A est donc P.
3. Calculons A^n pour n élément de $\mathbb{N}$.
   On a $(A - I_3)^2 = 0 \iff A^2 - 2A + I_3 = 0 \iff A^2 = 2A - I_3$.
   Alors $A^3 = AA^2 = A(2A - I_3) = 2A^2 - A = 2(2A - I_3) - A = 3A - 2I_3$.
   On se propose de démontrer par récurrence que pour tout entier n ; $n \geq 2$, $A^n = nA - (n-1)I_3$.
   On note $P(n)$ la propriété : $A^n = nA - (n-1)I_3$.
   - On a $A^2 = 2A - I_3$, d'où $P(2)$ est vraie.
   - On suppose que $P(n)$ est vraie jusqu'à k ; $k \geq 2$, c'est-à-dire $A^k = kA - (k-1)I_3$ pour tout entier $k \geq 2$, et montrons que $P(k+1)$ est vraie. En utilisant l'hypothèse $P(k)$, on trouve
     $A^{k+1} = AA^k = A(kA - (k-1)I_3) = kA^2 - (k-1)A = k(2A - I_3) - (k-1)A = (k+1)A - kI_3$.
     D'où $P(k+1)$ est vraie.

   Et par conséquent $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 2$, c'est-à-dire, pour tout entier n ; $n \geq 2$, $A^n = nA - (n-1)I_3$. Or, cette égalité est aussi vraie pour $n = 0$ car $A^0 = I_3$, et pour $n = 1$. Elle est donc vraie pour tout n élément de $\mathbb{N}$.
4. Justifions l'existence de A^{-1} et calculons A^n pour n élément de $\mathbb{Z}$.
   On a $A^2 = 2A - I_3 \iff 2A - A^2 = I_3 \iff A(2I_3 - A) = (2I_3 - A)A = I_3$. La matrice A est donc inversible et $A^{-1} = 2I_3 - A$. Cette égalité peut s'écrire sous la forme $A^n = nA - (n-1)I_3$ avec $n = -1$, ou $A^{-n} = -nA - (-n-1)I_3 = -nA + (n+1)I_3$ avec $n = 1$.
   Démontrons par récurrence, que pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $A^{-n} = -nA + (n+1)I_3$.
   On note $Q(n)$ la propriété : $A^{-n} = -nA + (n+1)I_3$.

   - On a $A^{-1} = -A + 2I_3$, d'où $Q(1)$ est vraie.
   - On suppose que $Q(n)$ est vraie jusqu'à k ; $k \geq 1$, c'est-à-dire $A^{-k} = -kA + (k+1)I_3$ pour tout entier $k \geq 1$, et montrons que $P(k+1)$ est vraie. En utilisant l'hypothèse $Q(k)$, on trouve

$A^{-(k+1)} = (A^{k+1})^{-1} = (A^k A)^{-1} = A^{-1}A^{-k} = (2I_3 - A)(-kA + (k+1)I_3) = -(3k+1)A + 2(k+1)I_3 + kA^2 = -(3k+1)A + 2(k+1)I_3 + k(2A - I_3) = -(k+1)A + (k+2)I_3$.

D'où $Q(k+1)$ est vraie.

On a donc démontré par récurrence que : pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $A^{-n} = -nA + (n+1)I_3$, c'est-à-dire $A^{-n} = -nA - (-n-1)I_3$. On a donc pour tout entier p négatif, $A^p = -nA - (p-1)I_3$. On a démontré à la question 2. que pour tout entier n ; $n \geq 2$, $A^n = nA - (n-1)I_3$. Donc, pour tout n élément de $\mathbb{Z}$, $A^n = nA - (n-1)I_3$.

Exercise 30 (10 minutes) *Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et g un endomorphisme diagonalisable de E. On suppose qu'il existe un entier m ; $m \geq 2$, tel que $g^{m+1} = g^m$. Montrer qu'un tel endomorphisme est un projecteur, c'est-à-dire vérifie la relation $g^2 = g$.*

Solution(30) :

L'endomorphisme g vérifie la relation $g^{m+1} = g^m$. Le polynôme $P : X \mapsto P(X) = X^{m+1} - X^m$ est donc un polynôme annulateur de g. Le polynôme minimal de g divise alors le polynôme P. Or, $P(X) = X^{m+1} - X^m = X^m(X-1)$.

L'endomorphisme g étant diagonalisable, son polynôme minimal est scindé dans $\mathbb{R}$ et n'a que des racines simples. Il peut donc être égal à $P_1 : X \mapsto P_1(X) = X$, $P_2 : X \mapsto P_2(X) = X - 1$ ou $P_3 : X \mapsto P_3(X) = X(X-1)$. Dans tous les cas le polynôme P_3 est un multiple du polynôme minimal de g et donc un polynôme annulateur de g. Alors, $P_3(g) = g \circ (g - \mathrm{Id}_E) = 0$, or $g \circ (g - \mathrm{Id}_E) = g^2 - g$ et g vérifie bien $g^2 = g$.

Exercise 31 (10 minutes) *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) et u un endomorphisme de E.*

1. *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que si u est diagonalisable, la restriction de u à F, notée $u_{/F}$, est un endomorphisme de F diagonalisable.*
2. *On suppose que E est somme directe de r sous-espaces vectoriels de E, $(F_i)_{1 \leq i \leq r}$, stables par u. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si les r restrictions de u aux sous-espaces F_i sont diagonalisables.*

Solution(31) :

1. Puisque le polynôme minimal de u est un polynôme annulateur de u, on a $\forall x \in E,\ (P_{min,u}(u))(x) = 0$, et en particulier $\forall x \in F,\ (P_{min,u}(u))(x) = 0$. Or, $\forall x \in F,\ (P_{min,u}(u))(x) = \left(P_{min,u_{/F}}(u)\right)(x)$. D'où, $\forall x \in F,\ \left(P_{min,u_{/F}}(u)\right)(x) = 0$, et donc $P_{min,u_{/F}} = 0$.

   Le polynôme minimal de u est un polynôme annulateur de $u_{/F}$. Le polynôme minimal de $u_{/F}$ divise donc le polynôme minimal de u. L'endomorphisme u étant diagonalisable, son polynôme minimal est scindé dans $\mathbb{K}$ et n'a que des racines simples. Il en est donc de même pour le polynôme minimal de $u_{/F}$, et l'endomorphisme $u_{/F}$ est un endomorphisme de F diagonalisable.
2. On a $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_r$ et les r sous-espaces vectoriels F_i sont stable par u.
   - D'après la première question, si l'endomorphisme u est diagonalisable alors les r restrictions de u aux sous-espaces F_i sont diagonalisables.
   - Etudions la réciproque, c'est-à-dire, montrons que si les r restrictions de u aux sous-espaces F_i sont diagonalisables, alors u est diagonalisable.

   Si pour tout i, $1 \leq i \leq r$, $u_{/F_i}$ est diagonalisable, alors, pour tout i, $1 \leq i \leq r$,, il existe une base $\mathcal{B}_i$ de F_i formée de vecteurs propres de $u_{/F_i}$. L'espace vectoriel E est somme directe des r sous-espaces vectoriels F_i. L'ensemble des vecteurs des bases $\mathcal{B}_i$ forme donc une base de E. Or, si ν est un vecteur propre de $u_{/F_i}$, il est aussi vecteur propre de l'endomorphisme u de E : en effet, c'est un vecteur non nul de F_i pour lequel il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que $u_{/F_i}(\nu) = \lambda\nu$, mais $u_{/F_i}(\nu) = u(\nu)$, c'est donc un vecteur non nul de E pour lequel il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que $u(\nu) = \lambda\nu$.

   Il existe donc une base de E formée de vecteurs propres de u, l'endomorphisme u de E est donc diagonalisable.

2.4 Exercices théoriques avec solutions

2.4.1 Fiche2

Cette ressource est composée de trois exercices.

Les deux premiers exercices proposent des démonstrations différentes d'une même propriété : une matrice carrée à coefficients réels admet le même polynôme minimal lorsqu'on la considère comme matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Cette propriété n'est pas aussi évidente que celle correspondante pour le polynôme caractéristique. La preuve proposée dans le premier exercice utilise comme outil essentiel la caractérisation du rang d'un

système de vecteurs à l'aide des déterminants. Celle proposée dans le deuxième exercice utilise principalement une bonne compréhension de la définition du polynôme minimal et le fait que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.
Le dernier exercice permet de répondre à la question suivante : si une puissance d'un endomorphisme inversible est diagonalisable, cet endomorphisme est-il diagonalisable ?
Prérequis indispensables :
Le cours sur le polynôme minimal d'un endomorphisme ou d'une matrice : polynôme annulateur, définition du polynôme minimal, le lien entre les racines du polynôme minimal et les valeurs propres, la caractérisation des endomorphismes diagonalisables à l'aide du polynôme minimal.
Prérequis utiles :

- La détermination du rang d'une matrice à l'aide des déterminants.
- Le cours sur les polynômes et les racines d'un nombre complexe.

Temps de travail prévu : 50 minutes

Exercise 32 (15 minutes) *1. Soient $n > 1$ un entier, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $P_{min,A} \in \mathbb{K}[X]$ son polynôme minimal. Montrer que si s est le plus grand entier tel que les matrices $I_n, A, \ldots, A^s$ forment un système libre, alors $deg\,(P_{min,A}) = s+1$.*

2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie m ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), et $v_1, v_2, \ldots, v_k$ des vecteurs de E.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le rang du système $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ traduisant que ce système est libre.

(b) Soit $\mathcal{B}$ une base de E, et $\begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \\ \vdots \\ x_{m,1} \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{m,k} \end{pmatrix}$ les coordonnées des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_k$ dans la base $\mathcal{B}$. Comment peut-on déterminer le rang du système de vecteurs $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ à l'aide des déterminants ?

3. Soient $n > 1$ un entier, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice d'ordre n à coefficients réels, et $P_{min,A} \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme minimal de A considérée comme matrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $Q_{min,A} \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme minimal de la matrice A considérée comme matrice du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) *En utilisant les questions précédentes montrer l'égalité :* $deg\,(P_{min,A}) = deg\,(Q_{min,A})$.

(b) *En déduire que les polynômes* $P_{min,A}$ *et* $Q_{min,A}$ *sont égaux.*

Solution(32) :

1. Le polynôme minimal de A est le polynôme unitaire annulateur de A de plus bas degré. Soit r le degré du polynôme minimal $P_{min,A}$.
   D'une part, comme $P_{min,A}(A) = 0$, les matrices $I_n, A, \ldots, A^r$ forment un système lié. Par conséquent pour tout entier m ; $m \geq r$, les matrices $I_n, A, \ldots, A^m$ forment un système lié. Or les matrices $I_n, A, \ldots, A^s$ forment un système libre donc $s < r$. D'autre part pour tout polynôme non nul P de degré strictement inférieur à r, $P(A) \neq 0$. Par conséquent pour tout entier m non nul, $m < r$, les matrices $I_n, A, \ldots, A^m$ forment un système libre, et par définition de s on obtient $r - 1 \leq s$. Les inégalités précédentes donnent $r - 1 \leq s < r$. Comme r et s sont des entiers on a $r - 1 = s$. Comme r désigne le degré du polynôme minimal de A, on a montré $deg\,(P_{min,A}) = s + 1$.

2. (a) Le rang d'un système de vecteurs est égal à la dimension du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent. Le système $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ est un système libre si et seulement si la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_k$ est égal à k. Par conséquent le système $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ est un système libre si et seulement si son rang est k.

   (b) Le rang du système de vecteurs $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ est aussi égal au rang de la matrice
   $$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,k} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,k} \end{pmatrix}$$
   dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_k$ dans une base de E. Or le rang d'une matrice peut être défini comme l'ordre du plus grand mineur non nul que l'on peut extraire de cette matrice. Le calcul des déterminants extraits de la matrice
   $$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,k} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,k} \end{pmatrix}$$
   donne donc le rang du système de vecteurs $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.

3. (a) Soit $s \geq 1$ un entier. Le système $\{I_n, A, \dots, A^s\}$ est un système libre si et seulement si son rang est $s+1$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}$ est aussi la base canonique du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et les matrices $I_n, A, \dots, A^s$ considérées comme matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ont les mêmes coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. D'après la question 2. on en déduit que le rang du système $\{I_n, A, \dots, A^s\}$ est le même lorsqu'on le considère comme un système de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par conséquent les matrices $I_n, A, \dots, A^s$ sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendantes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elles sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ceci prouve que le polynôme minimal de la matrice A considérée comme matrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a le même degré que le polynôme minimal de la matrice A considérée comme matrice du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire $deg\,(P_{min,A}) = deg\,(Q_{min,A})$.

   (b) Le polynôme $Q_{min,A}$ est l'unique polynôme unitaire de $\mathbb{C}[X]$ annulateur de A de plus bas degré. Comme tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est aussi un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, $P_{min,A}$ est un polynôme unitaire de $\mathbb{C}[X]$ annulateur de A de plus bas degré, donc les polynômes $P_{min,A}$ et $Q_{min,A}$ sont égaux.

Exercise 33 (15 minutes) *Soient $n > 1$ un entier, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice d'ordre n à coefficients réels, et $P_{min,A} \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme minimal de A considérée comme matrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $Q_{min,A} \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme minimal de la matrice A considérée comme matrice du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

1. *Montrer que dans l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $Q_{min,A}$ divise le polynôme $P_{min,A}$.*
2. *On note R et S les polynômes de $\mathbb{R}[X]$, tels que $Q_{min,A}(X) = R(X) + iS(X)$. Montrer que R et S sont des multiples du polynôme $P_{min,A}$.*
3. *En déduire que les polynômes $P_{min,A}$ et $Q_{min,A}$ sont égaux.*

Solution(33) :

1. Montrons que dans l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $Q_{min,A}$ divise le polynôme $P_{min,A}$.
   Le polynôme $P_{min,A}$ étant à coefficients réels, il peut être considéré comme un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Comme $P_{min,A}$ est un polynôme annulateur de A, il est dans l'idéal de $\mathbb{C}[X]$ engendré par le polynôme $Q_{min,A}$, il existe donc un polynôme T de

$\mathbb{C}[X]$, tel que $P_{min,A}(X) = T(X)Q_{min,A}(X)$ Cette égalité signifie que dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $Q_{min,A}$ divise le polynôme $P_{min,A}$.

2. On note R et S les polynômes de $\mathbb{R}[X]$, tels que $Q_{min,A}(X) = R(X) + iS(X)$. Montrons que R et S sont des multiples du polynôme $P_{min,A}$.
   Comme $Q_{min,A}$ est un polynôme annulateur de A, $Q_{min,A}(A) = 0$. On a noté R et S les polynômes de $\mathbb{R}[X]$, tels que $Q_{min,A}(X) = R(X) + iS(X)$. Par conséquent on a $Q_{min,A}(A) = R(A) + iS(A)$ et $R(A) + iS(A) = 0$, où 0 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Or les polynômes R et S ainsi que la matrice A sont à coefficients réels, par conséquent les matrices $R(A)$ et $S(A)$ sont à coefficients réels. Comme $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 dont une base est $\{1, i\}$, l'égalité $R(A)+iS(A) = 0$ n'est réalisée que si $R(A) = S(A) = 0$. Les polynômes à coefficients réels R et S sont des annulateurs de la matrice A, par conséquent ils sont dans l'idéal de $\mathbb{R}[X]$ engendré par le polynôme $P_{min,A}$. Autrement dit, dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes R et S sont des multiples du polynôme $P_{min,A}$.

3. En déduisons que les polynômes $P_{min,A}$ et $Q_{min,A}$ sont égaux.
   Nous avons montré dans la question précédente, l'existence de deux polynômes U, V de $\mathbb{R}[X]$, tels que $R(X) = P_{min,A}(X)U(X)$ et $S(X) = P_{min,A}(X)V(X)$ Comme $Q_{min,A}(X) = R(X) + iS(X)$, nous obtenons $Q_{min,A}(X) = P_{min,A}(X)(U(X) + iV(X))$. Cette égalité prouve que, dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $P_{min,A}$ divise le polynôme $Q_{min,A}$. Or nous avons montré dans la question 1. que, dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $Q_{min,A}$ divise le polynôme $P_{min,A}$, comme ces polynômes sont unitaires ils sont égaux.

Exercise 34 (20 minutes)

Partie A :

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. *On suppose f diagonalisable. Montrer que pour tout entier $m \in \mathbb{N}*$, f^m est diagonalisable.*

2. *On suppose dans cette question que E est de dimension supérieure ou égale à 2. On note n la dimension de E, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E et f l'endomorphisme de E défini par $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_{n-1}) = 0$ et $f(e_n) = e_1$. Vérifier que f^2 est diagonalisable. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? L'endomorphisme f est-il inversible ?*

3. *On suppose que f est inversible et qu'il existe un entier $k \geq 2$, tel que f^k soit diagonalisable. On note $P_{min,f}$ le polynôme minimal de f et P_{min,f^k} le polynôme minimal de f^k.*
   (a) *Montrer que f^k est inversible. En déduire que $P_{min,f^k}(0) \neq 0$.*
   (b) *On considère le polynôme Q défini par $Q(X) = P_{min,f^k}(X^k)$. Montrer que les racines du polynôme Q sont simples.*
   (c) *Montrer que le polynôme $P_{min,f}$ divise le polynôme Q. En déduire que f est diagonalisable.*

Partie B : Application

1. *Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 4, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une base de E et f l'endomorphisme de E défini par $f(e_1) = e_4, f(e_2) = 3e_3, f(e_3) = 3e_2, f(e_4) = 9e_1$. Calculer f^2. Montrer que f est diagonalisable et déterminer son polynôme minimal.*
2. *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, $\{e_1, e_2\}$ une base de E et f l'endomorphisme de E défini par $f(e_1) = e_2, f(e_2) = -e_1$. Calculer f^2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?*

Solution(34) :

Partie A :

1. On suppose f diagonalisable. Montrer que pour tout entier $m \in \mathbb{N}*$, f^m est diagonalisable.
   L'endomorphisme f du $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie E étant diagonalisable il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de f. Si e_i est un vecteur de cette base, il existe un scalaire λ_i, tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Par conséquent, si l'entier m est supérieur ou égal à 1, on a $f^m(e_i) = \lambda_i^m e_i$ et $\mathcal{B}$ est une base de E formée de vecteurs propres de f^m. D'où l'endomorphisme f^m est diagonalisable.
2. Comme l'endomorphisme f de E est défini sur la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ par $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_{n-1}) = 0$ et $f(e_n) = e_1$, on a $f^2(e_1) = f^2(e_2) = \cdots = f^2(e_{n-1}) = f^2(e_n) = 0$ et f^2 est l'endomorphisme nul de E. La matrice de f^2 dans n'importe quelle base de E est la matrice nulle, donc f^2 est diagonalisable.
   Le polynôme $P : X \mapsto P(X) = X^2$ est un polynôme annulateur de f^2, donc son polynôme minimal est un diviseur de P. On a donc $P_{min,f} = X$ ou $P_{min,f} = X^2$. Comme f n'est pas l'endomorphisme nul on obtient $P_{min,f} = X^2$.
   Le polynôme minimal de f admet 0 pour racine double donc f n'est pas diagonalisable.

(On peut montrer que f n'est pas diagonalisable sans utiliser le polynôme minimal. En effet la matrice de f dans la base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et son polynôme caractéristique est le polynôme $P_1 : X \mapsto P(X) = (-1)^n X^n$. Ce polynôme n'admet qu'une seule valeur propre qui est 0. Si f était diagonalisable sa matrice dans une base de vecteurs propres serait la matrice nulle et, par conséquent, f serait l'endomorphisme nul. Ceci n'est pas le cas donc f n'est pas diagonalisable. Comme 0 est une valeur propre de f, l'endomorphisme f n'est pas injectif donc il n'est pas inversible.)

Remarque : on a dans cette question un endomorphisme dont une puissance est diagonalisable mais qui n'est pas diagonalisble. On peut constater que cet endomorphisme n'est pas inversible.

3. (a) Montrons que f^k est inversible et en déduisons que $P_{min,f^k}(0) \neq 0$.

   D'après les propriétés des déterminants on a $\det(f^k) = (\det(f))^k$. Comme f est inversible son déterminant n'est pas nul. Par conséquent le déterminant de f^k n'est pas nul et f^k est inversible.

   L'endomorphisme f^k étant inversible, 0 n'est pas valeur propre et n'est pas racine de son polynôme minimal, c'est-à-dire $P_{min,f^k}(0) = 0$.

   (b) On considère le polynôme Q défini par $Q(X) = P_{min,f^k}(X^k)$. Montrons que les racines du polynôme Q sont simples.

   On a supposé que l'endomorphisme f^k est diagonalisable, par conséquent son polynôme minimal est scindé (ce qui est toujours le cas dans $\mathbb{C}[X]$) et ses racines sont simples. Comme de plus 0 n'est pas racine de son polynôme minimal, il existe des nombres complexes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ distincts deux à deux et non nuls tels que $P_{min,f^k}(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_r)$. Comme $Q(X) = P_{min,f^k}(X^k)$, on a $Q(X) = (X^k - \lambda_1)(X^k - \lambda_2) \cdots (X^k - \lambda_r)$. Les racines du polynôme Q sont les racines k-ièmes des nombres complexes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$. Comme ces nombres sont non nuls, ils admettent chacun k racines k-ièmes distinctes, et comme ils sont distincts ces racines sont distinctes deux à deux. Cela signifie que le polynôme Q, qui est de degré rk admet rk racines distinctes et ces racines sont simples.

(c) Montrons que le polynôme $P_{min,f}$ divise le polynôme Q et en déduisons que f est diagonalisable.

Comme P_{min,f^k} est le polynôme minimal de f^k, c'est un polynôme annulateur de f^k, et par conséquent $P_{min,f^k}(f^k) = 0$. Comme $Q(X) = P_{min,f^k}(X^k)$, on obtient $Q(f) = P_{min,f^k}(f^k) = 0$, c'est-à-dire que Q est un polynôme annulateur de f. Les polynômes annulateurs de f sont les multiples de son polynôme minimal, par conséquent le polynôme $P_{min,f}$ divise le polynôme Q.

Comme le polynôme Q est scindé et à racines simples, ses diviseurs, en particulier $P_{min,f}$, sont des polynômes scindés et à racines simples. Ceci prouve que l'endomorphisme f est diagonalisable.

Partie B :

1. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 4, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une base de E et f l'endomorphisme de E défini par $f(e_1) = e_4, f(e_2) = 3e_3, f(e_3) = 3e_2, f(e_4) = 9e_1$. Calculons f^2. Montrons que f est diagonalisable et déterminons son polynôme minimal.

   Comme l'endomorphisme f de E est défini sur la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ par $f(e_1) = e_4, f(e_2) = 3e_3, f(e_3) = 3e_2, f(e_4) = 9e_1$, l'endomorphisme f^2 de E est défini sur la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ par $f^2(e_1) = 9e_1, f^2(e_2) = 9e_2, f^2(e_3) = 9e_3, f^2(e_4) = 9e_4$. Ceci prouve que $f^2 = 9\mathrm{Id}_E$, et f^2 est diagonalisable.

   Comme $\det(f^2) = (\det(f))^2$ et que $\det(f^2) = \det(9\mathrm{Id}_E) = 9^4$, le déterminant de f est non nul et f est inversible. L'endomorphisme f, du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, est inversible et une de ses puissances est diagonalisable. La partie A de l'exercice prouve que f est aussi diagonalisable.

   Le polynôme $P : X \mapsto P(X) = X^2 - 9$ est un polynôme annulateur de f, donc son polynôme minimal est un diviseur de P. On a donc $P_{min,f} = X - 3$ ou $P_{min,f} = X + 3$ ou $P_{min,f} = X^2 - 9$. Comme f n'est ni l'homothétie $3\mathrm{Id}_E$ ni l'homothétie $-3\mathrm{Id}_E$, les polynômes $P_1 : X \mapsto P_1(X) = X - 3$ et $P_2 : X \mapsto P_2(X) = X + 3$ ne sont pas des polynômes annulateurs de f, par conséquent on obtient $P_{min,f} = X^2 - 9 = P(X)$.

2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, $\{e_1, e_2\}$ une base de E et f l'endomorphisme de E défini par $f(e_1) = e_2, f(e_2) = -e_1$. Calculons f^2 et vérifions si l'endomorphisme f est diagonalisable ou non.

   Comme l'endomorphisme f de E est défini sur la base $\{e_1, e_2\}$ par $f(e_1) = e_2, f(e_2) =$

$-e_1$, l'endomorphisme f^2 de E est défini sur la base $\{e_1, e_2\}$ par $f^2(e_1) = -e_1, f^2(e_2) = -e_2$. Ceci prouve que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.
Comme $f^2 + \mathrm{Id}_E = 0$, le polynôme $P : X \mapsto P(X) = X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de f. Ce polynôme étant unitaire et irréductible sur $\mathbb{R}$, c'est le polynôme minimal de f. Le polynôme minimal de f n'étant pas scindé sur $\mathbb{R}$, f n'est pas diagonalisable.

Remarque : cet exemple montre que le corps de base joue un rôle important dans le résultat obtenu dans la partie A : un endomorphisme inversible d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie dont une puissance est diagonalisable est diagonalisable. Ce résultat peut être faux dans le cas d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2.4.2 Test 1

Prérequis indispensables : Le cours sur le polynôme minimal d'un endomorphisme : polynôme annulateur, définition du polynôme minimal, le lien entre les racines du polynôme minimal et les valeurs propres, la caractérisation des endomorphismes diagonalisables à l'aide du polynôme minimal.
Temps de travail prévu : 45 minutes

Exercise 35 *Étant donnés a, b et c trois éléments distincts de $\mathbb{C}$, déterminer le polynôme minimal des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ suivantes :*

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Exercise 36 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de type fini, de polynôme minimal défini par $P_{min,f}(X) = X^5 - X^2 - X + 2$. Justifier l'existence de deux polynômes A et B de degrés au plus 1 tels que $f^5 = A(f) \circ B(f)$.*

Exercise 37 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et g un endomorphisme diagonalisable de E. On suppose qu'il existe un entier m supérieur ou égal à 3, tel que $g^m = Id_E$. Démontrer l'égalité $g^2 = Id_E$.*

Solution du test

Solution(35) :

$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale donc évidemment diagonalisable, ses valeurs propres sont les trois éléments distincts de la diagonale ; le polynôme minimal de A_1 a pour racines les réels a, b et c , et ce sont des racines simples. On en déduit que $P_{min,A_1}(X) = (X-a)(X-b)(X-c)$.

$A_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale donc évidemment diagonalisable, ses valeurs propres sont a (simple) et b (double) ; le polynôme minimal de A_2 a pour racines les réels a et b, et ce sont des racines simples. On en déduit que $P_{min,A_2}(X) = (X-a)(X-b)$.

Remarque : *Pour les deux matrices A_1 et A_2 on pouvait également les décomposer en blocs dont les polynômes minimaux sont triviaux et obtenir ensuite le polynôme minimal comme PPCM des polynômes minimaux de chacun des blocs ; par exemple $M_1 = (a)$ a pour polynôme minimal $P_{min,M_1}(X) = (X-a)$ et $M_2 = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ a pour polynôme minimal $P_{min,M_2}(X) = (X-b)$, les complexes a et b étant distincts, on en déduit que $P_{min,A_2}(X) = (X-a)(X-b)$.*

$A_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont a (simple) et b (double) ; les réels a et b sont les racines du polynôme minimal mais ici, ne sachant pas si cette matrice est diagonalisable, on ne sait pas si ces racines sont simples ou non. Le plus rapide est de décomposer cette matrice en blocs :

- $M_1 = (a)$ dont le polynôme minimal $P_{min,M_1}(X) = (X-a)$,
- $M_2 = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ dont le polynôme minimal est de la forme $P_{min,M_2}(X) = (X-b)^k$ où k est le plus petit entier tel que $(M_2 - bI_2)^k = 0$; il est facile de vérifier que $(M_2 - bI_2)^k \neq 0$ et $(M_2 - bI_2)^2 = 0$, donc $P_{min,M_2}(X) = (X-b)^2$.

Le polynôme minimal de A_3 est le PPCM de P_{min,M_1} et P_{min,M_2} , donc $P_{min,A_3}(X) =$

$(X-a)(X-b)^2$.

$A_4 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale égale à aI_3, on a donc $A_4 - aI_3 = 0$, d'où $P_{min,A_4}(X) = (X-a)$.

$A_5 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire, son unique valeur propre est a (triple) ; le réel a est la racine du polynôme minimal, celui-ci est donc de la forme $P_{min,A_5}(X) = (X-a)^k$ où k est le plus petit entier tel que $(A_5 - aI_3)^k = 0$; il est facile de vérifier que

$$A_5 - aI_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_5 - aI_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_5 - aI_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. Donc $P_{min,A_5}(X) = (X-a)^3$.

$A_6 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire, son unique valeur propre est a (triple).

Pour calculer le polynôme minimal, le plus simple est de décomposer cette matrice en blocs comme pour la matrice A3 :

- $M_1 = (a)$ dont le polynôme minimal $P_{min,M_1}(X) = (X-a)$,
- $M_2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ dont le polynôme minimal est de la forme $P_{min,M_2}(X) = (X-a)^k$ où k est le plus petit entier tel que $(M_2 - aI_2)^k = 0$; il est facile de vérifier que $(M_2 - aI_2)^k \neq 0$ et $(M_2 - aI_2)^2 = 0$, donc $P_{min,M_2}(X) = (X-a)^2$.

Le polynôme minimal de A_6 est le PPCM de P_{min,M_1} et P_{min,M_2} , donc $P_{min,A_6}(X) = (X-a)^2$.

<u>Solution</u>(36) :

Le polynôme $P : X \mapsto P(X) = X^5 - X^2 - X + 2$ est le polynôme minimal de f, c'est donc un polynôme annulateur de f. On a donc $f^5 - f^2 - X + 2\mathrm{Id}_E = 0$. D'où la relation $f^5 = f^2 + X - 2\mathrm{Id}_E$. On considère le polynôme $Q : X \mapsto Q(X) = X^2 + X - 2$. La relation précédente s'écrit donc $f^5 = Q(f)$. Or les racines de Q sont 1 et -2, ce qui donne la factorisation de Q : $Q(X) = A(X)B(X)$ avec $A(X) = X - 1$ et $B(X) = X + 2$. D'où

$f^5 = A(f) \circ B(f) = (f - \mathrm{Id}_E)(f + 2\mathrm{Id}_E)$.

Solution(37) :

La relation $g^m = \mathrm{Id}_E$ (m entier supérieur ou égal à 3) peut aussi s'écrire $g^m - \mathrm{Id}_E = 0$, on en déduit donc que $P : X \mapsto P(X) = X^m - 1$ est un polynôme annulateur de g, donc P est un multiple du polynôme minimal de g. On sait de plus que g est un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel réel. Le polynôme minimal de g est donc scindé dans $\mathbb{R}$ et ses racines sont simples. Les racines de $P_{min,g}$ sont aussi des racines de P ; ce sont des racines m-ièmes de l'unité. Les seules racines réelles sont 1 et -1 si m est pair et seulement 1 si m est impair. Les seules possibilités pour $P_{min,g}$ sont donc $X \mapsto X - 1$, $X \mapsto X + 1$ ou $X \mapsto X^2 - 1$. Ce qui donne $g = \mathrm{Id}_E$, $g = -\mathrm{Id}_E$ ou $g^2 = \mathrm{Id}_E$. On a donc dans tous les cas $g^2 = \mathrm{Id}_E$, g est donc un endomorphisme involutif.

2.4.3 Test 2

Prérequis indispensables : Le cours sur le polynôme minimal d'un endomorphisme : polynôme annulateur, définition du polynôme minimal, le lien entre les racines du polynôme minimal et les valeurs propres, la caractérisation des endomorphismes diagonalisables à l'aide du polynôme minimal.
Temps de travail prévu : 60 minutes

Exercise 38

1. *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie n , $n \geq 1$. On suppose qu'il existe un entier k, $k \geq 1$, tel que $f^k = Id_E$. Montrer que f est diagonalisable.*
2. *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n , $n \geq 1$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tel que $f^2 = -Id_E$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? (On pourra étudier successivement les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).*

Exercise 39 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n , $n \geq 1$. Soient f un endomorphisme de E et $P_{min,f}$ le polynôme minimal de f.*

1. *On suppose que le degré de $P_{min,f}$ est égal à 1. Que peut-on dire de f ?*
2. *On suppose que le degré de $P_{min,f}$ est supérieur ou égal à 2. Il existe donc un polynôme de $P : X \mapsto P(X) = X^2 + aX + b$ de $\mathbb{R}[X]$, qui divise $P_{min,f}$. Soit Q le polynôme de $\mathbb{R}[X]$, tel que $P_{min,f}(X) = P(X)Q(X)$.*

(a) *Montrer qu'il existe un vecteur u de E tel que $(Q(f))(u)$ soit non nul.*

(b) *Soit u un élément de E tel que $v = (Q(f))(u)$ soit non nul. Montrer que le sous-espace vectoriel F engendré par v et $f(v)$ est stable par f.*

3. *En déduire qu'il existe un sous-espace vectoriel de E stable par f, de dimension inférieure ou égale à 2.*

Exercise 40 *Soient n un entier strictement positif et E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n suivant :*

$$E = \{P \in \mathbb{R}[T] \ ; \ P = 0 \ ou \ \deg(P) \leq n\}.$$

1. *Soit $P : T \mapsto P(T) = a_0 + a_1T + \cdots + a_nT^n$ un polynôme de E. Vérifier que $Q : T \mapsto Q(T) = T^n P\left(\frac{1}{T}\right)$ est un polynôme de E.*

2. *Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(P(T)) = T^n P\left(\frac{1}{T}\right)$. Calculer f^2. En déduire que f est inversible et qu'il est diagonalisable. Quel est le polynôme minimal de f ?*

3. *Soit D l'endomorphisme de E défini par $D(P) = P'$, où P' est le polynôme dérivé de P. Montrer que D n'est pas diagonalisable.*
   Le but des deux questions suivantes est de prouver dans deux cas particuliers que l'endomorphisme $D \circ f$ est diagonalisable.

4. *On considère le cas $n = 3$. Calculer le polynôme caractéristique de $D \circ f$. En déduire que $D \circ f$ est diagonalisable ; quel est son polynôme minimal ?*

5. *On considère le cas $n = 4$. En cherchant des vecteurs propres de $D \circ f$, montrer que $D \circ f$ est diagonalisable, et déterminer son polynôme minimal.*

6. *A l'aide des endomorphismes précédents, construire deux endomorphismes diagonalisables dont le produit n'est pas diagonalisable.*

Solution du test

Solution(38) :

1. D'après l'hypothèse, le polynôme $P; X \mapsto P(X) = X^k - 1$ est un polynôme annulateur de f, donc est divisible par le polynôme minimal de f. Dans $\mathbb{C}$, corps algébriquement clos, le polynôme P est scindé et n'a que des racines simples (les k racines k-ièmes de l'unité) et il en est de même de tout polynôme qui le divise. Donc,

d'après le théorème sur la caractérisation des endomorphismes diagonalisables à l'aide du polynôme minimal, f est diagonalisable. Ce qu'il faut particulièrement remarquer dans cet exemple, c'est que l'on ne connaît ni le polynôme minimal de f, ni son polynôme caractéristique ni ses valeurs propres et évidemment encore moins ses sous-espaces propres, mais que l'on a su justifier qu'il était diagonalisable.

2. L'hypothèse $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ peut s'écrire $f^2 + \mathrm{Id}_E = 0$, ce qui prouve que le polynôme $Q; X \mapsto Q(X) = X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de f. Donc le polynôme minimal de f, noté $P_{min,f}$, divise Q.
   - Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ce polynôme unitaire est irréductible et par conséquent $P_{min,f}(X) = X^2 + 1$. Ce polynôme n'a pas de racines, donc f n'a pas de valeurs propres et n'est donc pas diagonalisable.
   - Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le polynôme Q s'écrit $Q(X) = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ et n'a que des racines simples. Il en est donc de même de tout polynôme diviseur et donc en particulier du polynôme minimal de f. L'endomorphisme f est donc diagonalisable.

Solution(39) :

1. On suppose que le degré de $P_{min,f}$ est égal à 1. Comme le polynôme minimal d'un endomorphisme est un polynôme unitaire, il existe un réel α tel que $P_{min,f}(X) = X - \alpha$, et comme le polynôme minimal de f est un polynôme annulateur de f, $P_{min,f}(f) = 0$, on en déduit $f = \alpha\mathrm{Id}_E$, (en notant par Id_E l'application identique de E) : l'endomorphisme f de E est une homothétie.
2. On suppose que le degré de $P_{min,f}$ est supérieur ou égal à 2. Comme tout polynôme à coefficients réels se décompose en produit de polynômes de degré 1 ou 2, il existe un polynôme de degré 2 (pas forcément irréductible), noté $P; X \mapsto P(X) = X^2 + aX + b$, qui divise $P_{min,f}$. Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, tel que $P_{min,f}(X) = P(X)Q(X)$.
   - Pour démontrer l'existence d'un vecteur u de E, tel que $(Q(f))(u)$ soit non nul, on fait un raisonnement par l'absurde :
     si pour tout vecteur u de E, $(Q(f))(u)$ est nul, alors on a $Q(f) = 0$ et le polynôme Q est un polynôme annulateur de f. Or le polynôme minimal $P_{min,f}$ est le polynôme annulateur de f de plus bas degré, et d'après la relation $P_{min,f}(X) = P(X)Q(X)$, le degré de Q est strictement inférieur à celui de

$P_{min,f}$, ce qui est absurde. Donc il existe un vecteur u de E, tel que $(Q(f))(u)$ soit non nul.

- Soit u un élément de E, tel que $v = (Q(f))(u)$ soit non nul. On considère $F = Vect(\{v, f(v)\})$ le sous-espace vectoriel de E engendré par v et $f(v)$. Soit $w \in F$. Alors, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, tel que $w = \alpha v + \beta f(v)$. Comme $f(w) = \alpha f(v) + \beta f^2(v)$, $f(w)$ appartient à F si et seulement si $f^2(v)$ appartient à F. Donc F est stable par f si et seulement si $f^2(v)$ appartient à F. Or $(P_{min,f}(f))(u) = (f^2 + af + b\mathrm{Id}_E)(v) = f^2(v) + af(v) + bv$, et comme $P_{min,f}(f) = 0$, on en déduit $(P_{min,f}(f))(u) = 0$, donc $f^2(v) = -af(v) - bv$. Ceci démontre que le vecteur $f^2(v)$ appartient à F. Le sous-espace vectoriel F engendré par $\{v, f(v)\}$ est stable par f.

3. Si $P_{min,f}$ est un polynôme de degré 1, il existe un réel α, tel que $P_{min,f}(X) = X - \alpha$. Donc $f = \alpha \mathrm{Id}_E$ (voir la question 1.).
   Soit w un vecteur non nul de E. Comme $f(w) = \alpha w$, le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{w\}$ est stable par f, et est de dimension 1.
   Si $P_{min,f}$ est un polynôme de degré supérieur ou égal à 2, on déduit de la question précédente l'existence d'un sous-espace vectoriel de E stable par f, et de dimension 2. Dans les deux cas, il existe un sous-espace vectoriel de E stable par f, et de dimension inférieure ou égale à 2.

Solution(39) :

1. Soit $P : T \mapsto P(T) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_n T^n$ un polynôme de E. Vérifions que $Q : T \mapsto Q(T) = T^n P\left(\frac{1}{T}\right)$ est un polynôme de E. On a

$$Q(T) = T^n P\left(\frac{1}{T}\right) = T^n \left(a_0 + a_1 \frac{1}{T} + \cdots + a_n (\frac{1}{T})^n\right) = a_0 T^n + a_1 T^{n-1} + \cdots + a_n.$$

   Ce qui prouve que $Q \in E$.

2. Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(P(T)) = T^n P\left(\frac{1}{T}\right)$, pour tout $P \in E$.
   Calculons f^2. Soit $P : T \mapsto P(T) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_n T^n$ un polynôme de E. Alors,

$$\begin{aligned} f^2(P(T)) = f(f(P(T))) &= f\left(T^n P\left(\frac{1}{T}\right)\right) \\ &= f(a_0T^n + a_1T^{n-1} + \cdots + a_n) \\ &= a_0 + a_1T + \cdots + a_nT^n = P(T). \end{aligned}$$

Donc $f^2 = \mathrm{Id}_E$, (en notant par Id_E l'application identique de E). Comme $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, f est inversible et $f^{-1} = f$ (on dit que f est une involution). Comme $f^2 = \mathrm{Id}_E$, le polynôme $Q; X \mapsto Q(X) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de f. Or le polynôme minimal divise tout polynôme annulateur de f. Le polynôme Q est scindé et n'a que des racines simples dans $\mathbb{R}$, par conséquent le polynôme minimal de f, qui le divise, est scindé dans $\mathbb{R}$ et n'a que des racines simples dans $\mathbb{R}$, donc l'endomorphisme f est diagonalisable. Le polynôme minimal de f est un diviseur de Q : ce n'est pas le polynôme $Q_1; X \mapsto Q_1(X) = X - 1$ car $f \neq \mathrm{Id}_E$, et ce n'est pas $Q_2; X \mapsto Q_2(X) = X+1$ car $f \neq -\mathrm{Id}_E$ (en effet $f(1) = T^n$ et n est strictement positif), donc le polynôme minimal de f est Q.

3. Soit D l'endomorphisme de E défini par $D(P) = P'$, où P' est le polynôme dérivé de P. Montrons que D n'est pas diagonalisable.
Soit r un entier compris entre 1 et n. On peut montrer par récurrence que pour tout entier k strictement positif on a :
$$\begin{cases} D^k(T^r) = r(r-1)\cdots(r-k+1)T^{r-k} & , \ \forall k, 0 < k \leq r \\ D^k(T^r) = 0 & , \ \forall k, k > r. \end{cases}$$
Comme tout polynôme non nul P de E est de degré inférieur ou égal à n, on en déduit : $\forall P \in E, D^{n+1}(P) = 0$. Ceci entraîne que le polynôme $Q_3; X \mapsto Q_3(X) = X^{n+1}$ est un polynôme annulateur de f. Mais le polynôme $Q_4; X \mapsto Q_3(X) = X^n$ n'est pas un polynôme annulateur de f, puisque $D^n(T^n) = n!$. On en déduit que le polynôme minimal de D est Q_3. Comme 0 est une racine multiple de Q_3, D n'est pas diagonalisable.

4. On considère le cas $n = 3$. Calculons le polynôme caractéristique de $D \circ f$. On a $(D \circ f) = a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3 = D(a_0T^3 + a_1T^2 + a_2T + a_3) = a_2 + 2a_1T + 3a_0T^2$. Donc $(D \circ f)(1) = 3T^2$, $(D \circ f)(T^2) = 1$, $(D \circ f)(T^3) = 0$. On en déduit le polynôme caractéristique de $D \circ f$:

$$\begin{aligned} P_{car,D\circ f}(X) &= \begin{vmatrix} -X & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-X & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -X \end{vmatrix} \\ &= -X(2-X)\begin{vmatrix} -X & 1 \\ 3 & -X \end{vmatrix} = X(X-2)(X^2-3). \end{aligned}$$

Donc $P_{car,D\circ f}(X) = X(X-2)(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$. Ce polynôme étant scindé dans $\mathbb{R}$ et n'ayant que des racines simples, on en conclut que $D\circ f$ est diagonalisable et que son polynôme minimal est égal à son polynôme caractéristique : $P_{min,D\circ f}(X) = P_{car,D\circ f}(X) = X(X-2)(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$.

Cette méthode est aussi valable pour $n=1$ et $n=2$ car les polynômes caractéristiques sont simples à calculer, ce qui n'est pas le cas pour n plus grand ; on utilise alors une autre méthode.

5. On considère le cas $n=4$. En cherchant des vecteurs propres de $D\circ f$, montrons que $D\circ f$ est diagonalisable, et déterminons son polynôme minimal.
   Un polynôme P non nul est un vecteur propre de $D\circ f$ si et seulement si il existe un réel λ tel que $(D\circ f)(P) = \lambda P$. Ce réel λ est alors une valeur propre de $D\circ f$.
   L'image par $D\circ f$ du polynôme $P : T \mapsto P(T) = a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3 + a_4T^4$ est
   $(D\circ f)(a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3 + a_4T^4) = D(a_0T^4 + a_1T^3 + a_2T^2 + a_3T + a_4) = a_3 + 2a_2T + 3a_1T^2 + 4a_0T^3$.
   L'égalité $(D\circ f)(P) = \lambda P$ est réalisée si et seulement si les coefficients du polynôme P vérifient les systèmes équivalents suivants :

$$\left\{\begin{array}{rl} a_3 & = \lambda a_0 \\ 2a_2 & = \lambda a_1 \\ 3a_1 & = \lambda a_2 \\ 4a_0 & = \lambda a_3 \\ 0 & = \lambda a_4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{llllll} \lambda a_4 & & & & & = 0 \\ & a_3 & & & -\lambda a_0 & = 0 \\ & & 2a_2 & -\lambda a_1 & & = 0 \\ & & & (\lambda^2-6)a_1 & & = 0 \\ & & & & (\lambda^2-4)a_0 & = 0 \end{array}\right.$$

   Si λ est différent de 0, de 2, de -2, de $\sqrt{6}$ et de $-\sqrt{6}$, ces systèmes ont pour seule solution $(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4) = (0,0,0,0)$. Pour de telles valeurs de λ, seul le polynôme nul vérifie $(D\circ f)(P) = \lambda P$, donc ces valeurs de λ ne sont pas des valeurs propres de $D\circ f$.

   Mais les valeurs $\lambda = 0$, $\lambda = 2$, $\lambda = -2$, $\lambda = \sqrt{6}$ et $\lambda = -\sqrt{6}$ sont des valeurs propres de $D\circ f$ car ces systèmes ont des solutions (a_0,a_1,a_2,a_3,a_4) non nulles. En effet

- Si $\lambda = 2$, les solutions des systèmes sont
  $\{(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^5 \ / \ \exists a \in \mathbb{R}; (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (a, 0, 0, 2a, 0)\}$.
  Par exemple le polynôme $P : T \mapsto P(T) = 1 + 2T^3$ est un vecteur propre de $D \circ f$ associé à la valeur propre 2.
- Si $\lambda = -2$, les solutions des systèmes sont
  $\{(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^5 \ / \ \exists a \in \mathbb{R}; (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (a, 0, 0, -2a, 0)\}$.
  Par exemple le polynôme $P : T \mapsto P(T) = 1 - 2T^3$ est un vecteur propre de $D \circ f$ associé à la valeur propre -2.
- Si $\lambda = \sqrt{6}$, les solutions des systèmes sont
  $\{(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^5 \ / \ \exists a \in \mathbb{R}; (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, a, \frac{\sqrt{6}}{2}, 0, 0)\}$.
  Par exemple le polynôme $P : T \mapsto P(T) = T + \frac{\sqrt{6}}{2}T^2$ est un vecteur propre de $D \circ f$ associé à la valeur propre $\sqrt{6}$.
- Si $\lambda = -\sqrt{6}$, les solutions des systèmes sont
  $\{(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^5 \ / \ \exists a \in \mathbb{R}; (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, a, -\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, 0)\}$.
  Par exemple le polynôme $P : T \mapsto P(T) = T - \frac{\sqrt{6}}{2}T^2$ est un vecteur propre de $D \circ f$ associé à la valeur propre $-\sqrt{6}$.
- Si $\lambda = 0$, les solutions des systèmes sont
  $\{(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^5 \ / \ \exists a \in \mathbb{R}; (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 0, 0, a)\}$.
  Par exemple le polynôme $P : T \mapsto P(T) = T^4$ est un vecteur propre de $D \circ f$ associé à la valeur propre 0.

On remarque ainsi que l'endomorphisme $D \circ f$ a 5 valeurs propres distinctes dans un espace vectoriel de dimension 5, donc cet endomorphisme est diagonalisable et son polynôme minimal est
$P_{min, D\circ f}(X) = X(X-2)(X+2)(X-\sqrt{6})(X+\sqrt{6}) = X^5 - 10X^3 + 24X$.
Cette méthode se généralise pour montrer que $D \circ f$ est diagonalisable quelque soit l'entier n.

6. A l'aide des endomorphismes précédents, construisons deux endomorphismes diagonalisables dont le produit n'est pas diagonalisable.
   Dans les questions précédentes, on a montré que les endomorphismes f et $D \circ f$ étaient diagonalisables, mais que D ne l'était pas. Comme $f^2 = \mathrm{Id}_E$, on a $D =$

$(D \circ f) \circ f$. L'endomorphisme D est le produit de deux endomorphismes diagonalisables et pourtant D n'est pas diagonalisable.

Bibliographie

[1] El-Haj Laamari, Philippe Chateaux, Gérard Eguether, alain Mansoux, Marc Rezzouk, David Rupprecht et Laurent Schwald. : *Tous les exercices d'algèbre et de géométrie MP.* Dunod, Paris, 2008 ISBN 978-2-10-053965-9.

[2] Daniel Fredon, Myriam Maumy-Bertrand et Frédéric Bertrand. : *Mathématiques Algèbre et géométrie en 30 fiches.* Dunod, Paris, 2009 ISBN 978-2-10-053932-1.

[3] Roger Mansuy, Rached Mneimné. : *Algèbre linéaire : Réduction des endomorphismes.* Éditeur : De Boeck Superieur, 2016. - 208 p.. ISBN 2311404059, 9782311404050.

[4] Dany-Jack Mercier. : *Réduction des Endomorphismes Volume 8 de Dossiers Mathématiques Series.* Éditeur : CreateSpace Independent Publishing Platform, 2014. - 162 p.. ISBN 149528509X, 9781495285097

[5] Gérard Debeaumarché, Francis Dorra, Max Hochart. : *Mathématiques PSI-PSI* : Cours complet avec tests, exercices et problèmes corrigés.* Éditeur : Pearson Education France, 2010.-760 p.. ISBN 2744074349, 9782744074349

[6] Daniel Guinin, Bernard Joppin. : *Algèbre et géométrie PSI. Les Nouveaux précis Bréal, ISSN 1296-1655.* Éditeur : Editions Bréal, 2004. -334 p.. ISBN 2749503930, 9782749503936

[7] Daniel Guinin, Bernard Joppin. : *Algèbre et géométrie PC. Les Nouveaux précis Bréal, ISSN 1296-1655.* Éditeur : Editions Bréal, 2004.- 271 p.. ISBN 2749503906, 9782749503905

[8] Damien Etienne. : *Exercices corrigés d'algèbre linéaire : Tome 2 Volume 2 de Exercices corrigés d'algèbre linéaire.* Éditeur : De Boeck Supérieur, 2006. - 360 p.. ISBN 280415033X, 9782804150334