RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE
DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Université Djllali Liabes
Sidi Bel Abbes

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématique

Analyse fonctionnelle

Isma YOUNES

Année 2019

Introduction

L'étude des équations différentielles ainsi que d'autres aspects mathématiques ont donnés naissance à l'analyse fonctionnelle : une branche des mathématiques qui a pour objet l'étude des espaces de fonctions. Le terme « fonctionnelle » désigne des fonctions dont les variables sont des fonctions. Son emploi a été généralisé à d'autres branches des mathématiques et de la physique par Vito Volterra. Stefan Banach est considéré comme le pionnier de l'analyse fonctionnelle moderne.

Les espaces de base de l'analyse fonctionnelle sont les espaces de Banach. C'est des espaces vectoriels normés complets réel ou complexe.

Les opérateurs linéaires continus définis sur les espaces de Banach constituent des objets d'étude importants en analyse fonctionnelle.

L'un des théorèmes clefs de l'analyse fonctionnelle est le théorème de Hahn-Banach qui permet le prolongement des formes linéaires définies sur un sous-espace d'un espace vectoriel réel à l'espace tout entier, tout en conservant une certaine contrainte. On n'a pas besoin de la complétude dans ce cas.

Quelques résultats importants d'analyse fonctionnelle : Le principe de la borne uniforme est un résultat sur des ensembles d'opérateurs bornés.

L'espace de Hilbert est un cas particulier important, dont la norme est issue d'un produit scalaire. Pour les espaces de Hilbert, ils sont classifiés selon différents cas : il existe un espace de Hilbert unique à un isomorphisme près pour chaque cardinal de la base hilbertienne. Les espaces de Hilbert dont la dimension est finie, sont entièrement connus en algèbre linéaire, et les espaces de Hilbert séparables sont isomorphes à l'espace de suites ℓ_2. Les espaces séparables sont importants pour les applications, l'analyse fonctionnelle des espaces de Hilbert traite surtout de ces espaces et de ses morphismes.

Les espaces de Banach sont beaucoup plus compliqués à étudier que les espaces de Hilbert. Par exemple, il existe diverses définitions de la notion de base.

Dans un espace vectoriel normé E, on considère le dual E', à savoir l'espace des fonctionnelles continues de E vers $\mathbb{K}$, mais surtout le dual du dual, c'est-à-dire le bidual E''. Un espace est toujours lié à son bidual via une application particulière que l'on appelle injection canonique, qui de plus est une isométrie. Cependant, il se peut que le bidual en question soit plus « gros » que l'espace initial. Les espaces vectoriels normés sont classés en deux catégories grâce à cette application : les espaces pour lesquels l'injection canonique n'est pas surjective (c'est le cas par exemple de l'espace c_0, son bidual étant ℓ_∞ qui est beaucoup plus « gros »), et ceux pour lesquels elle est surjective. On dira alors des espaces qui entrent dans cette deuxième catégorie qu'ils sont réflexifs.

Le polycopié se compose de six chapitres où on insiste sur les notions de bases de l'analyse fonctionnelle : Espace de Banach, théorème de Hahn-Banach, théorème de Baire et ses conséquences, séparabilité et dualité et enfin espace de Hilbert.

Ce polycopié peut être utilisé avec profil par les étudiants de Licence, Master, auxquels il pourra apporter, en particulier, illustrations et motivations pour des théories avancées. Des exercices, dont un grand nombre est puisé du site : http ://exo7.emath.fr/ficpdf/ficall.pdf, font partie de chaque chapitre.

Table des matières

q

Chapitre 1

Éléments de topologie

1.1 Espace topologique

1.1.1 Définitions et exemples

Définition 1

On appelle *espace topologique* un couple $(E, \mathscr{T})$ où E est un ensemble et $\mathscr{T}$ une famille de parties de E vérifiant :

($\mathscr{T}_1$) $\varnothing \in \mathscr{T}$, $E \in \mathscr{T}$,

($\mathscr{T}_2$) Une intersection **finie** d'éléments de $\mathscr{T}$ appartient à $\mathscr{T}$, i.e. si $O_1, ..., O_n$ sont des éléments de $\mathscr{T}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$), alors $O_1 \cap \ldots \cap O_n \in \mathscr{T}$.

($\mathscr{T}_3$) Une réunion **quelconque** d'éléments de $\mathscr{T}$ appartient à $\mathscr{T}$. i.e. si $(O_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{T}$, indexée par un ensemble I quelconque (pas nécessairement fini ni même dénombrable) alors $\bigcup\limits_{i\in I} O_i \in \mathscr{T}$.

On appelle $\mathscr{T}$ la topologie sur E.

Exemple 1

$E = \mathbb{R}^n$ avec $\mathscr{T}$ la famille des ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2

E avec $\mathscr{T} = \{\varnothing, E\}$. On appelle $\mathscr{T}$ la topologie grossière.

Exemple 3

E avec $\mathscr{T} = \mathscr{P}(E)$, la famille de toutes les parties de E. On appelle $\mathscr{T}$ la topologie discrète.

Les éléments de $\mathscr{T}$ sont appelés *ouverts* de l'espace topologique $(E, \mathscr{T})$.

Définition 2

Soit $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique. On dit que E est un espace *séparé*, si pour deux points x, y distincts de E il existe deux ouverts $U, V \in \mathscr{T}$, tel que $x \in U$, $y \in V$ avec $U \cap V = \varnothing$.

Exemple 4

Topologie grossière : Un ensemble E muni de la topologie $\mathscr{T} = \{\varnothing, E\}$, appelée *topologie grossière*. Le seul ouvert qui contient un point de E est E lui-même. Donc si E contient deux points, ces deux points ne peuvent pas être dans deux ouverts différents. Alors si E contient plus qu'un point il n'est pas séparé.

Définition 3

Soit $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique. Un ensemble $F \subset E$ est *fermé* si son complémentaire F^{c} est ouvert.

Exemple 5

$\varnothing$ et E sont à la fois ouverts et fermés.

1.1.2 Propriétés

Proposition 1

Dans un espace séparé E tout ensemble fini est fermé.

Démonstration:

Il suffit de montrer que $\{x\}$ est fermé, où $x \in E$. Soit $y \in \{x\}^{\mathsf{c}}$ (on suppose que E a plus qu'un point.) Alors on peut choisir un ouvert $V_y \subset E$ qui contient y mais pas x. Il s'ensuit que $\{x\}^{\mathsf{c}} = \bigcup_{y \in \{x\}^{\mathsf{c}}} V_y$ qui est alors réunion des ouverts, donc ouvert.

Proposition 2

Soit $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique. Alors

1. Une réunion **finie** de fermés est fermé.
2. Une intersection **quelconque** de fermés est fermé.

Démonstration:

1. Soient F_i, $i = 1, \ldots, n$ des fermés. Alors $U_i = F_i^{\mathsf{c}}$ sont ouverts. On a

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E \backslash U_i = E \backslash \bigcap_{i=1}^{n} U_i$$

ce qui est fermé car par $(\mathscr{T}_2)$ $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ est ouvert.

2. Soient F_i, $i \in I$ des fermés et $U_i = F_i^{\mathsf{c}}$. On a

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} E \backslash U_i = E \backslash \bigcup_{i \in I} U_i$$

ce qui est fermé car par $(\mathscr{T}_3)$ $\bigcup_{i \in I} U_i$ est ouvert.

1.1.3 Construction de topologie

Définition 4

Soit $A \subset E$ une partie d'un espace topologique $(E, \mathscr{T})$. On pose

$$\mathscr{T}_A = \{U \cap A \,|\, U \in \mathscr{T}\}$$

et on l'appelle la topologie *induite* sur A (ou la topologie *trace* sur A).

Lemme 1

$\mathscr{T}_A$ est une topologie sur A.

Démonstration:

($\mathscr{T}_1$) $\varnothing = \varnothing \cap A$ et $A = E \cap A$ donc $\varnothing, A \subset \mathscr{T}_A$.

($\mathscr{T}_2$) Soit I fini alors $\bigcap_{i \in I}(U_i \cap A) = (\bigcap_{i \in I} U_i) \cap A$. Alors une intersection finie d'ensembles de la forme $U_i \cap A$, U_i ouvert, est ouverte pour la topologie induite.

($\mathscr{T}_3$) Soit I quelconque alors $\bigcup_{i \in I}(U_i \cap A) = (\bigcup_{i \in I} U_i) \cap A$. Alors une réunion quelconque d'ensembles de la forme $U_i \cap A$, U_i ouvert, est ouverte pour la topologie induite.

1.1.4 Intérieur, adhérence

Définition 5

Soit $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique. Pour tout $A \subset E$, on définit

l'intérieur de A noté $\mathring{A}$, par

$$\mathring{A} = \bigcup_{U \text{ ouvert}, \ U \subset A} U.$$

C'est le plus grand ouvert contenu dans A.

l'adhérence de A noté $\overline{A}$, par

$$\overline{A} = \bigcap_{F \text{ fermé}, \ F \supset A} F.$$

Proposition 3

Soit A une partie d'un espace topologique.

1. $\mathring{A}$ est un ouvert contenu dans A.
2. Si U est un ouvert et $U \subset A$, alors $U \subset \mathring{A}$. Autrement dit, $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.
3. $\overline{A}$ est un fermé contenant A.
4. Si F est un fermé et $F \supset A$, alors $F \supset \overline{A}$. Autrement dit, $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Démonstration:

1- $\mathring{A}$ est une union d'ouverts contenus dans A, donc un ouvert contenu dans A.
2- Par définition.
La Preuve est identique pour 3. et 4.

1.1.5 Voisinage d'un point

Définition 6

Soit $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique. On appelle voisinage de $x \in E$ toute ensemble $V \subset E$ qui contient un ouvert U qui contient x. Un voisinage ouvert de $x \in E$ est un ouvert qui contient x. On note $\mathscr{V}_x$ la famille des voisinages de x.

Proposition 4

Soit A une partie d'un espace topologique.

1. $x \in \mathring{A}$ si et seulement si A contient un voisinage de x.
2. $x \in \overline{A}$ si et seulement si A rencontre tout voisinage de x.

Démonstration:

1. Soit $x \in \mathring{A}$. Alors $\mathring{A}$ est un voisinage de x qui est contenu dans A.
   On suppose que A contient un voisinage de x. Alors il existe un ouvert U tel que. $x \in U \subset A$. Donc par définition de l'intérieur $x \in U \subset \mathring{A}$.

2. $x \in \overline{A}$ si et seulement si $x \notin \overline{A}^{\mathsf{c}} = \mathring{A^{\mathsf{c}}}$ si et seulement si A^{c} ne contient pas de voisinage de x si et seulement si A rencontre tout voisinage de x.

1.1.6 Suites

Si (x_n) est une suite, on notera une suite extraite (=sous-suite) soit par (x_{n_k}), soit par $x_{\varphi(n)}$. Dans le premier cas, $n_0, n_1, \ldots$, est une suite strictement croissante d'entiers ; dans le second, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.
Par abus de notation, si tous les termes d'une suite (x_n) appartiennent à un ensemble E, on écrit $(x_n) \subset E$.

Définition 7

Soit $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique. Si $(x_n) \subset E$ et $x \in E$, alors, par définition, $x_n \to x$ ((x_n) **converge** vers x) si et seulement si tout voisinage de x contient presque tout point de la suite, c.-à.-d.

$$\forall V \in \mathscr{V}_x \; \exists N_V \in \mathbb{N} \quad \text{tel que.} \quad \forall n \geq N_V : x_n \in V.$$

Une suite (x_n) est convergente s'il existe un $x \in E$ tel que $x_n \to x$. On écrit alors $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Il est évident, à partir de la définition, que si $x_n \to x$ et si (x_{n_k}) est une sous-suite, alors $x_{n_k} \to x$.

Exemple 6

$(E, \mathscr{T})$ avec $\mathscr{T} = \{\varnothing, E\}$. Alors le seul voisinage d'un point est E. Il s'ensuit que chaque point de E est limite de chaque suite de E.

Exemple 7

$(E, \mathscr{T})$ avec $\mathscr{T} = \mathscr{P}(E)$. Alors $\{x\}$ est un ouvert donc un voisinage. Il s'ensuit qu'une suite (x_n) converge vers x si et seulement si
$\exists N \quad \forall n \geq N : x_n = x$.

Proposition 5

Si $(E, \mathscr{T})$ est un espace topologique séparé alors la limite d'une suite convergente est unique.

Démonstration:

Supposons que x et y sont limite d'une suite (x_n). Si $x \neq y$ il existe deux ouverts disjoints, U et V, $x \in U$, $y \in V$. Mais $U \cap V$ est un voisinage de x et contient donc presque tout point de la suite. Contradiction.

1.1.7 Comparaison des topologies sur un même espace

Définition 8

Soit E un ensemble et $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ deux topologies sur E. On dit que la topologie $\mathscr{T}_1$ est plus grossière que $\mathscr{T}_2$ (ou $\mathscr{T}_2$ est plus fine que $\mathscr{T}_1$) si $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$.

Remarque 1

Si une suite (x_n) converge vers x pour la topologie $\mathscr{T}_2$ (qui est plus fine que $\mathscr{T}_1$) alors elle converge aussi vers x pour la topologie $\mathscr{T}_1$.

1.1.8 Base d'un espace topologique

Soit E un ensemble et $\mathscr{S}$ une collection de parties de E.

Soit $\mathscr{B}$ l'ensemble de tous les intersections finies d'éléments de $\mathscr{S}$ et soit $\mathscr{T}$ l'ensemble constitué de tous les réunions d'éléments de $\mathscr{B}$;

Définition 9 (Base d'ouverts)

Soit $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique. On appelle *base* d'ouverts, ou encore base de la topologie $\mathscr{T}$, toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de $\mathscr{T}$ telle que tout ouvert U s'écrit comme la réunion d'éléments de $\mathscr{B}$. C'est-à-dire

$$U = \bigcup_{i\in J} U_i$$

Proposition 6

Soient E un ensemble et $\mathscr{B}$ un ensemble de parties de E. Il existe une topologie $\mathscr{T}$ sur E dont $\mathscr{B}$ est une base si et seulement si $\mathscr{B}$ vérifie les deux conditions suivantes :

1. E est une réunion d'éléments de $\mathscr{B}$.
2. l'intersection de deux éléments quelconques de $\mathscr{B}$ est une réunion d'éléments de $\mathscr{B}$.

Cette topologie $\mathscr{T}$ est alors unique : ses ouverts sont les réunions d'éléments de $\mathscr{B}$.

Démonstration:

Les deux conditions sont évidemment nécessaires et si elles sont vérifiées, l'ensemble $\mathscr{T}$ des réunions d'éléments de $\mathscr{B}$ est la seule possible. Vérifions qu'il s'agit bien d'une topologie.

— $E \in \mathscr{T}$.

— $\varnothing \in \mathscr{T}$ (c'est la réunion indexée par $\varnothing$).

— $\mathscr{T}$ est stable par réunions .

— Si $U, V \in \mathscr{T}$ alors $U \cap V \in \mathscr{T}$: $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ et $V = \bigcup_{j\in J} V_j$ avec $U_i, V_j \in \mathscr{B}$ donc $U \cap V = \bigcup_{i\in I, j\in J} (U_i \cap V_j) \in \mathscr{T}$, car chaque $U_i \cap V_j$ appartient à $\mathscr{T}$.

Définition 10 (Base de voisinages)

Soient $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique et x un point de E. On appelle *base de voisinages* de x tout ensemble $\mathscr{G}$ de voisinages de x tel que :
pour tout voisinage V de x, il existe $W \in \mathscr{G}$ tel que $W \subset V$.

Proposition 7

Soient $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique et $\mathscr{B}$ un ensemble de parties de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathscr{B}$ est une base d'ouverts de la topologie ;pour tout $x \in E$.
2. Les éléments de $\mathscr{B}$ qui contiennent x forment une base de voisinages de x.

Démonstration:

$1 \Rightarrow 2$: Soit V un voisinage de x. Il contient un ouvert contenant x et cet ouvert est, d'après l'hypothèse 1, union d'ouverts de $\mathscr{B}$. x appartient alors à l'un des ouverts de cette union et cet ouvert est inclus dans V.

$2 \Rightarrow 1$: Soit $O \in \mathscr{T}$. C'est un voisinage de tous ses points donc d'après l'hypothèse 2, $\forall x \in O \quad \exists U \in \mathscr{B} \quad x \in U \subset O$, donc $O = \cup_{U\in\mathscr{B},\, U\subset O} U$. De plus, tout élément de $\mathscr{B}$ est bien un ouvert car d'après l'hypothèse 2, il est voisinage de tous ses points.

Proposition 8

Soit $A \subset E$ une partie d'un espace topologique $(E, \mathscr{T})$ et $x \in A$. Alors V est un voisinage de x pour la topologie $\mathscr{T}_A$ si et seulement s'il existe un voisinage $W \subset E$ pour x (pour la topologie $\mathscr{T}$), tel que $V = W \cap A$.

Démonstration:

Condition nécessaire : Soit V un voisinage de x pour la topologie $\mathscr{T}_A$. Alors il existe $U \in \mathscr{T}_A$ tel que $x \in U \subset V$. Alors il existe $\tilde{U} \in \mathscr{T}$ tel que $U = \tilde{U} \cap A$. Posons $W = \tilde{U} \cup V$. Alors W est voisinage de x pour la topologie $\mathscr{T}$ et $V = W \cap A$.

Condition suffisante : Soit W voisinage de x pour la topologie $\mathscr{T}$. Alors il existe $\tilde{U} \in \mathscr{T}$ tel que. $x \in \tilde{U} \subset W$. Pose $V = W \cap A$. Alors $U = \tilde{U} \cap A$ est un ouvert de $\mathscr{T}_A$ qui contient x et est contenu dans V. Donc V est voisinage de x pour la topologie $\mathscr{T}_A$.

1.1.9 Produit d'espaces

Définition 11

Soient $(E_k, \mathscr{T}_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$ des espaces topologiques et $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ le produit Cartésien. La topologie **produit** est la famille $\mathscr{T}$ de parties de E qui sont réunion quelconque d'ensembles de la forme

$$U_1 \times \cdots \times U_n. \quad U_k \in \mathscr{T}_k.$$

Lemme 2

$\mathscr{T}$ est une topologie sur E.

Démonstration:

($\mathscr{T}_1$) $\varnothing = \varnothing \times \cdots \times \varnothing$ et $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ donc $\varnothing, E \subset \mathscr{T}_A$.

($\mathscr{T}_2$) Un ouvert est de la forme $\bigcup_{i=(i_1,\cdots,i_n)\in I} U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_n}$ où I est une famille de multi-indices quelconque.

et $U_{i_k} \cap V_{j_k}$ sont des ouverts dans E_k.

($\mathscr{T}_3$) Par définition de la topologie produit.

Proposition 9

Soient $(E_k, \mathscr{T}_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$ des espaces topologiques et $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ avec topologie du produit. Alors une suite $(x^n)_n \subset E$ converge vers x si et seulement si toutes les suites données par les composantes $(x_k^n)_n \subset E_k$ convergent vers x_k, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Démonstration:

Soit $(x^n)_n$ une suite dans E. On suppose d'abord que la suite converge vers x dans E. Alors dans tout voisinage $V \in \mathscr{V}_x$ se trouve presque tout point de la suite. Soit V_i un voisinage de la composante x_i dans E_i. Alors V_i contient un ouvert U_i qui contient x_i. Comme $U_1 \times \cdots \times U_n$ est un voisinage de x il contient presque tout point de la suite $(x^n)_n$. Donc V_i contient presque tout point de la suite $(x_i^n)_n$. Donc $(x_i^n)_n$ tend vers x_i.

Supposons maintenant que les $(x_i^n)_n$ tend vers x_i. Soit V un voisinage de x. Or comme V contient un ouvert qui contient x il contient même un ouvert de la forme $U_1 \times \cdots \times U_n$, $U_i \in \mathscr{T}_i$, qui contient x. U_i est un voisinage de x_i et donc contient presque tout point de la suite $(x_i^n)_n$. Donc d'abord $U_1 \times \cdots \times U_n$ et en conséquence aussi V contient presque tout point de la suite $(x^n)_n$. Donc $(x^n)_n$ tend vers x.

1.1.10 Espace quotient

Définition 12

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un espace topologique $(E, \mathscr{T})$. On pose $\tilde{E} = E/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence de la relation et on note $[x] \in \tilde{E}$ la classe de x. Soit $q : E \to \tilde{E}$ la surjection canonique, $q(x) = [x]$. On pose

$$\mathscr{T}_{\tilde{E}} = \{U \subset \tilde{E} | \quad q^{-1}(U) \in \mathscr{T}\}$$

et on l'appelle la topologie **quotient** sur $\tilde{E}$.

Lemme 3

$\mathscr{T}_{\tilde{E}}$ est une topologie sur $\tilde{E}$.

Démonstration:

($\mathscr{T}_1$) $\varnothing = q^{-1}(\varnothing)$ et $E = q^{-1}(\tilde{E})$

($\mathscr{T}_2$) Pour n'importe quelle application $\varphi : E \to Y$ et $A, B \subset E$ on a $\varphi^{-1}(A \cap B) = \varphi^{-1}(A) \cap \varphi^{-1}(B)$. On applique celui à $\varphi = q$ et A, B deux ouverts de E.

($\mathscr{T}_3$) Avec la même notation comme dessus, si $\{A_i\}_{i\in I}$ est une famille quelconque de parties de E on a
$$\varphi^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} \varphi^{-1}(A_i).$$
On applique celui à $\varphi = q$ et A_i des ouverts de E.

Exemple 8

$E = \mathbb{R}$, $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Alors $\mathscr{T}_{\tilde{E}} = \{\varnothing, \tilde{E}\}$. En particulier $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas séparé pour la topologie quotient.

1.1.11 Continuité

Définition 13

Soient deux espaces topologiques $(E_1, \mathscr{T}_1)$, $(E_2, \mathscr{T}_2)$ et f une application de E_1 dans E_2 . Soit $a \in E_1$ et $b \in E_2$. On dit que $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a, écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, si pour tout voisinage V de b dans E_2 il existe un voisinage U de a dans E_1 tel que $f(U) \subset V$.

Définition 14

Soient deux espaces topologiques $(E_1, \mathscr{T}_1)$, $(E_2, \mathscr{T}_2)$ et f une application de E_1 dans E_2. On dit que f est *continue* au point $a \in E_1$ si $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a. On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A. On dit que f est continue si f est continue sur E.

Théorème 1

Soient deux espaces topologiques $(E_1, \mathscr{T}_1)$, $(E_2, \mathscr{T}_2)$ et f une application de E_1 dans E_2. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue.
2. Le pré-image $f^{-1}(U)$ d'un ouvert (de E_2) est ouvert (dans E_1).
3. Le pré-image $f^{-1}(F)$ d'un fermé (de E_2) est fermé (dans E_1).
4. Pour toute partie $A \subset E_1$ on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Démonstration:

($1 \Longrightarrow 4$) : Soit f continue et $a \in \overline{A}$. Soit W un voisinage de $f(a)$. Par continuité de f il existe un voisinage V de a tel que. $f(V) \subset W$. Comme $a \in \overline{A}$ on a $V \cap A \neq \varnothing$. Donc $\varnothing \neq f(V \cap A) \subset f(V) \cap f(A) \subset W \cap f(A)$. Il en suit que $f(a) \in \overline{f(A)}$.
($4 \Longrightarrow 3$) : Supposons (4). Soit $F \subset E_2$ fermé et $E = f^{-1}(F) \in E_1$. On a $f(E) = f(f^{-1}(F)) \subset F$. Donc $\overline{f(E)} \subset \overline{F} = F$. Soit $x \in \overline{E}$. Alors, par (4), $f(x) \in \overline{f(E)}$, donc $f(x) \in F$. Donc $x \in E$ ce qui montre $\overline{E} = E$ et E est fermé. ($3 \Longrightarrow 2$) : Supposons (3). Soit $U \subset E_2$ ouvert. $f^{-1}(U^c) = \{x \in E_1 | f(x) \notin U\} = E_1 \backslash f^{-1}(U)$. U^c est fermé donc par (3) aussi $f^{-1}(U^c)$ est fermé donc $f^{-1}(U)$ est ouvert.
($2 \Longrightarrow 1$) : Supposons (2). Soit $a \in E_1$. Soit V voisinage de $f(a)$. Il existe un ouvert W tel que. $f(a) \in W \subset V$. D'après (2) $f^{-1}(W)$ est ouvert et $a \in f^{-1}(W)$. Donc $U = f^{-1}(W)$ est un voisinage de a qui satisfait $f(U) \subset W \subset V$. Ceci montre que f est continue en a.

Corollaire 1

La composition de deux fonctions continues est continue.

Démonstration:

Soit $f : E \to Y$, $g : Y \to Z$ des fonctions continues. Soit $U \subset Z$ un ouvert. Alors $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. Par la continuité de g, $g^{-1}(U)$ est ouvert et par la continuité de f, $f^{-1}(g^{-1}(U))$ est ouvert.

Exemple 9

Soit $E = E_1 \times E_2$ avec topologie produit. Alors $\pi_j : E \to E_j$, $\pi(x_1, x_2) = x_j$ est continue.

Exemple 10

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E_1 et $E_2 = \tilde{E}_1$ avec la topologie quotient. Alors la surjection canonique q est continue.

1.1.12 Homéomorphismes

Définition 15

Une application $f : (E_1, \mathscr{T}_1) \to (E_2, \mathscr{T}_2)$ est un *homéomorphisme* si f est continue, bijective et sa réciproque f^{-1} est continue aussi.
On dit alors que $(E_1, \mathscr{T}_1)$ et $(E_2, \mathscr{T}_2)$ sont **homéomorphes**.

Propriétés

1) L'inverse d'un homéomorphisme est un homéomorphisme. Le composé de deux homéomorphismes est un homéomorphisme.
2) Les homéomorphismes conservent toutes les propriétés topologiques des espaces : si A est fermé (resp : ouvert, compact, connexe, etc.) dans E, il en est de même de $f(A)$.

Exemple 11

Soit $E_1 = E_2 = E$ et $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ deux topologies sur E. L'identité $\mathrm{id} : E \to E$, $\mathrm{id}(x) = x$ est un homéomorphisme si et seulement si $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$.

Le résultat suivant est immédiat

Proposition 10

La relation « $(E_1, \mathscr{T}_1)$ est homéomorphe avec $(E_2, \mathscr{T}_2)$ » est une relation d'équivalence.

1.2 Exercices

Exercice 1

Soit X un espace topologique et $f : X \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x \ ; \ f(x) < \lambda\}$ et $\{x \ ; \ f(x) > \lambda\}$ sont des ouverts de X.
2. Montrer que si f est continue, pour tout ω ouvert de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\omega)$ est un F_σ ouvert de X (F_σ= réunion dénombrable de fermés).

Indication:

1. Utiliser le fait que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est l'union dénombrable d'intervalles ouverts.
2. Écrire un intervalle fermé comme union dénombrable d'intervalles ouverts, puis utiliser la même remarque que ci-dessus.

Correction:

1. Sens direct. Si f est continue alors $\{x \mid f(x) < \lambda\} = f^{-1}(]-\infty, \lambda[)$ est un ouvert comme image réciproque par une application continue de l'intervalle ouvert $]-\infty, \lambda[$. De même avec $]\lambda, +\infty[$.
   Réciproque. Tout d'abord, tout intervalle ouvert $]a, b[$, $(a < b)$ peut s'écrire
   $$]a, b[=]-\infty, b[\cap]a, +\infty[.$$
   Donc
   $$f^{-1}(]a, b[) = f^{-1}(]-\infty, b[) \cap f^{-1}(]a, +\infty[)$$
   est une intersection de deux ouverts donc un ouvert de X. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, alors O peut s'écrire comme l'union dénombrables d'intervalles ouverts :
   $$O = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[.$$
   Donc
   $$f^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(]a_i, b_i[)$$
   est une union d'ouvert donc un ouvert de X .
2. Nous le faisons d'abord pour un intervalle ouvert $]a, b[$.
   $$]a, b[= \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}].$$
   Donc
   $$f^{-1}(]a, b[) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} f^{-1}([a + \frac{1}{j}, b - \frac{1}{j}]),$$
   est une union dénombrable de fermés. Maintenant comme pour la première question, tout ouvert O de $\mathbb{R}$ s'écrit $O = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[$, avec I dénombrable. Donc on peut écrire
   $$f^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} f^{-1}([a_i + \frac{1}{j}, b_i - \frac{1}{j}]),$$
   qui est une union dénombrable de fermés (mais c'est un ouvert !).

Exercice 2

Soit f, g deux applications continues de X dans Y, espaces topologiques, Y étant séparé. Montrer que $\{x \in X \ f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X ; en déduire que si f et g coïncident sur une partie dense de X, alors $f = g$.

Indication:

Montrer que le complémentaire est un ouvert. Si vous le souhaitez, placez-vous dans des espaces métriques.

Correction:

Soit $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$. Alors soit $C = X \setminus A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$. Soit $x \in C$ comme $f(x) \neq g(x)$ et que Y est séparé, il existe un voisinage ouvert V_1 de $f(x)$ et V_2 de $g(x)$ tel que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Notons $U = f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2)$. Alors U est un ouvert de X contenant x. Maintenant pour $x' \in U$, alors $f(x') \in V_1$, $g(x') \in V_2$ donc $f(x') \neq g(x')$, donc $x' \in C$.on en déduit que U est inclus dans C. Donc C est ouvert.

Application : si A est dense dans X alors $\bar{A} = X$, mais comme A est fermé $A = \bar{A}$. Donc $A = X$, c'est-à-dire f et g sont égales partout.

Exercice 3

Une application de X dans Y est dite *ouverte* si l'image de tout ouvert de X est un ouvert de Y ; *fermée* si l'image de tout fermé de X est un fermé de Y.

1. Montrer qu'une fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une application fermée.
2. Montrer que l'application $(x, y) \in X \times Y \to x \in X$ est ouverte mais pas nécessairement fermée (considérer l'hyperbole équilatère de $\mathbb{R}^2$).
3. Montrer que la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$, comme application de $\mathbb{R}$ dans $\{0, 1\}$, est surjective, ouverte, fermée, mais pas continue.
4. Montrer que toute application ouverte de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est monotone.

Indication:

1. Pour un polynôme P, la limite de $P(x)$ ne vaut $\pm\infty$ que lorsque x tend vers $\pm\infty$.

Correction:

1. Soit P un polynôme, et F un fermé de $\mathbb{R}$. Soit (y_n) une suite convergente d'éléments de $P(F)$, et $y \in \mathbb{R}$ sa limite. Il existe $x_n \in F$ tel que $y_n = P(x_n)$. Comme (y_n) est bornée (car convergente) alors (x_n) aussi est bornée, en effet un polynôme n'a une limite infini qu'en $\pm\infty$. Comme (x_n) est une suite bornée de $\mathbb{R}$ on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})$ de limite x. Comme F est fermé, $x \in F$. Comme P est continue (c'est un polynôme) alors $y_{\phi(n)} = P(x_{\phi(n)}) \to P(x)$, mais $(y_{\phi(n)})$ converge aussi vers y. Par unicité de la limite $y = P(x) \in P(F)$. Donc $P(F)$ est fermé.
2. Soit $X = Y = \mathbb{R}$ et $H = (xy = 1)$ est un fermé de $X \times Y$, mais si $\pi(x, y) = x$ alors $\pi(H) = \mathbb{R}^*$ n'est pas un fermé de $X = \mathbb{R}$.
3. A vérifier...

Exercice 4

1. Montrer que f est continue si et seulement si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour tout A dans X. Que peut-on dire alors de l'image par f d'un ensemble dense dans X ?
2. Montrer que f est fermée si et seulement si $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$, et que f est ouverte si et seulement si $f(\mathring{A}) \subset f(\mathring{A})$.

Indication:

1. Pour le sens direct utiliser la caractérisation de l'adhérence par les suites.
   Pour le sens réciproque, montrer que l'image réciproque d'un fermé est un fermé.

Correction:

1. $\Rightarrow$. Soit f continue et $y \in f(\bar{A})$. Il existe $x \in \bar{A}$ tel que $y = f(x)$. Soit $x_n \in A$ tel que (x_n) converge vers x. Alors $y_n = f(x_n) \in A$. Comme f est continue alors (y_n) converge vers $f(x) = y$. Donc y est adhérent à $f(A)$. Conclusion $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

$\Leftarrow$. Soit $f : X \to Y$ et soit F un fermé de Y. Notons $A = f^{-1}(F)$. Alors $f(A) \subset F$ donc l'équation $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ devient $f(\bar{A}) \subset \bar{F} = F$ car F est fermé. Donc $\bar{A} \subset f^{-1}(F) = A$. Donc $\bar{A} \subset A$, d'où $\bar{A} = A$. Donc A est fermé. Bilan l'image réciproque de tout fermé F est un fermé, donc f est continue.

Application : si A est dense, alors $\bar{A} = X$, et sous les hypothèses précédentes alors $f(A)$ est dense dans l'image de X par f : en effet $\overline{f(A)}$ contient $f(\bar{A}) = f(X)$

2. $\Rightarrow$. Soit f fermé et soit $A \subset X$. Alors $A \subset \bar{A}$ donc $f(A) \subset f(\bar{A})$, donc comme $\bar{A}$ est un fermé et f est fermée alors $f(\bar{A})$ est un fermé contenant $f(A)$. Mais comme $\overline{f(A)}$ est le plus petit fermé contenant $f(A)$ alors $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$.

   $\Leftarrow$. La relation pour un fermé F donne $\overline{f(F)} \subset f(\bar{F}) = f(F)$. Donc $\overline{f(F)} = f(F)$. Donc $f(F)$ est fermé. Donc f est fermée.

   Même type de raisonnement avec f ouverte.

1.3 Espace métrique

On peut construire des topologies à l'aide des *distances*.

1.3.1 Définitions et exemples

Définition 16

Soit E un ensemble non vide. Une *distance* sur E est une application $(x, y) \mapsto d(x, y)$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

($\mathscr{D}_1$) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$, (Axiome de séparation)

($\mathscr{D}_2$) $\forall x, y \in E \quad d(x, y) = d(y, x)$,(Symétrie)

($\mathscr{D}_3$) $\forall x, y, z \in E \quad d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (Inégalité triangulaire).

Exemple 12

$E = \mathbb{R}^n$ avec

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}, \quad \textit{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

C'est la distance Euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 13

Sur tout ensemble non vide E on peut définir une distance. En posant

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

qu'on appelle la *distance discrète* sur E.

Définition 17

Un *espace métrique* est un couple (E, d), où d est une distance sur E.

Définition 18

Soit (E, d) un espace métrique. Pour $x \in E$ et $r > 0$, on définit :

Boule ouverte : La boule ouverte de centre x et rayon r :

$$B(x, r) = \{y \in E \; ; \; d(y, x) < r\}$$

Boule fermée : La boule fermée de centre x et rayon r :

$$\overline{B(x, r)} = \{y \in E \; ; \; d(y, x) \leqslant r\}.$$

Sphère : La sphère de centre x et rayon r :

$$S(x, r) = \{y \in E \; ; \; d(y, x) = r\}.$$

Exemple 14

Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance Euclidienne, $B(1, 1) =]0, 2[$.

Définition 19

Soit (E, d) un espace métrique. Par définition, une partie non-vide U de E est un *ouvert* si, pour tout $x \in U$, il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Par définition $\varnothing$ **est un ouvert**.

Remarque 2

En général, r dépend de x.

Exemple 15

Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, $U =]0, 1[$ est un ouvert. En effet, si on pose, pour $x \in U$, $r = \min\{x, 1 - x\}$, on vérifie facilement que $B(x, r) \subset U$.(Faire un dessin).

1.3.2 topologies des espaces métrique

Proposition 11

Soit (E,d) un espace métrique.

1. Une intersection finie d'ouverts est ouverte.
2. Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte.

Démonstration:

1) Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. On a $x \in U_i$, $i=1,\ldots,n$. Chaque U_i étant ouvert, il existe un $r_i > 0$ tel que $B(x,r_i) \subset U_i$, $i=1,\ldots,n$. Soit $r = \min\{r_1,\ldots,r_n\}$. Alors $B(x,r) \subset B(x,r_i)$, $i=1,\ldots,n$, et donc $B(x,r) \subset U_i$, $i=1,\ldots,n$. Il s'ensuit que $B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$.

2) Soit $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$. Il existe un $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. U_{i_0} étant ouvert, il existe un $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U_{i_0}$. Pour ce même r, on a $B(x,r) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

Définition 20

Soit (E,d) un espace métrique. E est alors muni d'une structure d'espace topologique appelée La **topologie métrique** de (E,d) et est définit par

$$\mathscr{T} = \{U \subset E\,;\ U \text{ est un ouvert}\}.$$

Un espace métrique est considéré comme un cas particulier d'un espace topologique.

Proposition 12

Un espace métrique muni de la topologie métrique est un espace séparé.

Démonstration:

Soit (E,d) un espace métrique. Soient $x,y \in E$, $x \neq y$. Alors $\rho = \dfrac{d(x,y)}{2} > 0$. On pose $U = B(x,\rho)$ et $V = B(y,\rho)$. Supposons que $z \in U \cap V$. Alors

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) < \rho + \rho = d(x,y).$$

Ceci est une contradiction. Donc $U \cap V = \varnothing$ et E est séparé.

Proposition 13

Soit (E,d) un espace métrique.

1. Pour tout $x \in E$ et tout $r > 0$, $B(x,r)$ est un ouvert.
2. Pour tout $x \in E$ et tout $r > 0$, $\overline{B}(x,r)$ est un fermé.

Démonstration:

1. Soit $y \in B(x,r)$. On a $\rho = r - d(y,x) > 0$. On va prouver que $B(y,\rho) \subset B(x,r)$. En effet,

$$\begin{aligned} z \in B(\rho,y) &\Longrightarrow d(z,y) < \rho \\ &\Longrightarrow d(x,z) \leqslant d(z,y) + d(y,x) \\ &< \rho + d(y,x) = r \\ &\Longrightarrow z \in B(x,r). \end{aligned}$$

2. On doit montrer que $\overline{B}(x,r)^c$ est un ouvert.
   Soit $y \in \overline{B}(x,r)^c$; y satisfait donc $d(y,x) > r$. Soit $\rho = d(y,x) - r > 0$. On a

$$\begin{aligned} z \in B(y,\rho) &\Longrightarrow d(z,x) \\ &\geqslant d(y,x) - d(z,y) > d(y,x) - \rho \\ &= r \Longrightarrow z \in \overline{B}(x,r)^c; \end{aligned}$$

   autrement dit, on a $B(y,\rho) \subset B(x,r)^c$.

Exemple 16

On considère, dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, $A = [0,1[$. Alors $\overset{\circ}{A}=]0,1[$ et $\overline{A} = [0,1]$.

En effet, $]0,1[$ est un ouvert contenu dans A, $[0,1]$ est un fermé contenant A, et donc $]0,1[\subset\overset{\circ}{A}\subset A \subset \overline{A} \subset [0,1]$. On a donc soit $\overset{\circ}{A}= A$, soit $\overset{\circ}{A}=]0,1[$. Pour éliminer la première possibilité, on montre que A n'est pas un ouvert. Par l'absurde : sinon, il existe un $r > 0$ tel que $B(0,r) =]-r,r[\subset A$. Or, $-r/2 \in B(0,r)$, mais $-r/2 \notin A$. Contradiction. Pour $\overline{A}$, il y a aussi deux possibilités : $\overline{A} = [0,1]$ ou $\overline{A} = A$. On n'est pas dans le deuxième cas, car A n'est pas fermé. Ceci revient à montrer que $A^c =]-\infty,0[\cup[1,+\infty[$ n'est pas un ouvert et se démontre par l'absurde (il n'y a pas de $r > 0$ tel que $B(1,r) \subset A^c$).

Exemple 17

Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, tout intervalle ouvert est ouvert, tout intervalle fermé est fermé. Un intervalle de la forme $]-\infty,a]$ ou $[a,+\infty[$ est fermé.

En effet, $\mathbb{R}$ est ouvert. Un intervalle de la forme $]a,b[$, avec a, b finis, est une boule ouverte : $]a,b[= B(x,r)$, où $x = (a+b)/2$, $r = (b-a)/2$. De même, $[a,b]$ est une boule fermée. Par ailleurs, $]a,+\infty[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]a,a+n[$, et donc $]a,+\infty[$ est ouvert. Par le même raisonnement, $]-\infty,a[$ est ouvert. Il s'ensuit que $[a,+\infty[=]-\infty,a[^c$ est fermé, et, de même, $]-\infty,a]$ est fermé.

1.3.3 Suites dans un espace métrique

Proposition 14

Soit (E,d) un espace métrique. Alors (x_n) converge vers x si et seulement si $d(x_n,x) \to 0$ où encore

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tel que.} \quad \forall n \geq N_\varepsilon : d(x_n,x) < \varepsilon.$$

Démonstration:

$x = \lim_n x_n$ si et seulement si tout voisinage de x contient tous les points de (x_n), sauf un nombre fini.

Ceci est équivalent à dire que tout ouvert contenant x contient tous les points de (x_n), sauf un nombre fini.

Ceci est équivalent à dire que toute boule ouverte de centre x contient tous les points de (x_n),sauf un nombre fini.

Pour cette section on demande que (E,d) soit un espace métrique.

Définition 21

Soit (E,d) un espace topologique. Si $(x_n) \subset E$ et $x \in E$, alors, par définition, x est une *valeur d'adhérence* de la suite (x_n) si elle admet une sous-suite qui converge vers x.

Exemple 18

Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, soit $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Alors 1 est une valeur d'adhérence de (x_n), car $x_{2n} \to 1$.

Proposition 15

Si $x_n \to x$, alors x est la seule valeur d'adhérence de la suite (x_n). En particulier, la limite d'une suite convergente est unique.

Démonstration:

x est une valeur d'adhérence, car la suite extraite (x_n) converge vers x. Soit y une valeur d'adhérence de (x_n). Il existe une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \to y$. Par ailleurs, on a aussi $x_{n_k} \to x$. On suppose par l'absurde $y \neq x$. Alors $d(x,y) > 0$. Posons $\varepsilon =$

$d(x,y)/2 > 0$. Comme $x_{n_k} \to x$, il existe un k_1 tel que $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$ si $k \geqslant k_1$; de même, il existe un k_2 tel que $d(x_{n_k}, y) < \varepsilon$ si $k \geqslant k_2$. Alors, pour $k = \max\{k_1, k_2\}$, on a

$$d(x,y) \leqslant d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < 2\varepsilon = d(x,y),$$

ce qui est absurde.

Proposition 16

Soit (E,d) un espace métrique et $F \subset E$. Alors

$$\overline{F} = \{x \in E \ ; \ \exists \ (x_n) \subset F \text{ telle que } x_n \to x\}.$$

Démonstration:

Inclusion directe : On considère un x appartenant à l'ensemble de droite. Soit $r > 0$. Il existe n_0 tel que $d(x_n, x) < r$, $n \geqslant n_0$. En particulier, $x_{n_0} \in B(x,r) \cap F$, et donc $B(x,r) \cap F \neq \varnothing$, d'où $x \in \overline{F}$.
Inclusion indirecte : Soit $x \in \overline{F}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère un $x_n \in F \cap B(x, 1/(n+1))$. Alors $(x_n) \subset F$, $d(x_n, x) < 1/(n+1)$ et donc $x_n \to x$.

Corollaire 2

F est un fermé si et seulement si pour toute suite convergente $(x_n) \subset F$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in F$.

Démonstration:

Condition nécessaire : Si x est tel qu'il existe une suite $(x_n) \subset F$ telle que $x_n \to x$, alors $x \in \overline{F} = F$.

Condition suffisante : Si $x \in \overline{F}$, il existe une suite $(x_n) \subset F$ telle que $x_n \to x$. Par conséquent, $x \in F$, et donc $\overline{F} \subset F$. Comme on a toujours $F \subset \overline{F}$, on trouve $F = \overline{F}$, et donc F est fermé.

1.3.4 Distances équivalentes

Définition 22

Soit E un ensemble non vide. Deux distances d_1, d_2 sur E sont **équivalentes** $\iff$ $\exists \ C_1, C_2 > 0$ telles que $C_1 d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant C_2 d_1(x,y), \quad \forall \ x, y \in E$.

Il est facile de vérifier que l'équivalence des distances est, comme son nom l'indique, une relation d'équivalence.

Proposition 17

Si d_1, d_2 sont deux distances équivalentes sur l'ensemble E, Alors les deux topologies définies par d_1 et d_2 sont identiques. C'est-à-dire

1. $x_n \to x$ dans $(E, d_1) \iff x_n \to x$ dans (E, d_2) ;
2. les fermés de (E, d_1) et de (E, d_2) coïncident ;
3. les ouverts de (E, d_1) et de (E, d_2) coïncident.

Démonstration:

1) Exercice. 2) C'est une conséquence de 1) et de la caractérisation des fermés à l'aide des suites. 3) Par passage au complémentaire dans 2).

Proposition 18

Soient (E_k, d_k), $1 \leqslant k \leqslant n$ n espaces métriques et $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ leur produit cartésien. Soit l'application $D : E \times E \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$D(x,y) = \max_k d_k(x_k, y_k).$$

Alors (E, D) est un espace métrique et $\mathscr{T}$ est la topologie métrique de D.

Remarque 3
$D_p(x,y) = (\sum_k d_k\,(x_k, y_k)^p)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leqslant p < \infty$ définit une métrique équivalente à D.

Démonstration:
Soit $U \in \mathscr{T}$ et $x \in U$. Il existe donc $U_i \in \mathscr{T}_i$ tel que $x \in U_1 \times U_2$.

Comme $\mathscr{T}_i$ est métrique par rapport à d_i il existe r_i tel que $B_{d_i}(x_i, r_i) \subset U_i$. Soit $r = \min\{r_1, r_2\}$, alors $x = (x_1, x_2) \in B_{d_1}(x_1, r) \times B_{d_1}(x_2, r)$. Or $B_{d_1}(x_1, r) \times B_{d_1}(x_2, r) = B_D(x, r)$ ce qui montre que U est ouvert pour D. Ceci montre aussi qu'une boule ouverte pour D est produit des ouverts de E_i et donc appartient à $\mathscr{T}$.

1.3.5 Convergence uniforme

Définition 23
Soient $f_n : (E_1, \mathscr{T}_1) \to (E_2, \mathscr{T}_2)$ des fonctions entre deux espaces topologiques. La suite (f_n) **converge simplement** vers une fonction $f : E_1 \to E_2$ si $\forall x \in E$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$.

On dit aussi que $(f_n)_n$ converge point par point vers f. La limite d'une suite de fonctions continues qui converge point par point n'est pas forcément continue.

On rappelle que dans le cas où $\mathscr{T}_2$ est la topologie métrique par rapport à une métrique d, la convergence point par point de la suite $(f_n)_n$ vers f veut dire

$$\forall x \in E_1\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_{\varepsilon,x}\ \forall n \geq N_{\varepsilon,x} : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Définition 24
Soient $f_n, f : (E_1, \mathscr{T}) \to (E_2, d)$ des fonctions entre un espace topologique et un espace métrique. La suite (f_n) **converge uniformément** vers f si

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_\varepsilon\, \forall n \geq N_\varepsilon \forall x \in E_1 : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

On écrit alors $f_n \xrightarrow{u} f$.

Théorème 2
Soient $f_n : (E, \mathscr{T}) \to (Y, d)$ des fonctions continues entre un espace topologique et un espace métrique. Si $f_n \xrightarrow{u} f$, alors f est continue.

Démonstration:
Soient $a \in E$ et $\varepsilon > 0$. Comme $f_n \xrightarrow{u} f$ il existe un n_0 tel que $\forall x \in E : d(f_{n_0}(x), f(x)) < \varepsilon/3$. Par continuité de f_{n_0} il existe un voisinage $V \in \mathscr{V}_a$ tel que $f(V) \subset B_d(f(a), \varepsilon/3)$. Donc $\forall x \in V : d(f_{n_0}(x), f(x)) < \varepsilon/3$. En particulier, $\forall x \in V : d(f(x), f(a)) \leqslant d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) + d(f_{n_0}(a), f(a)) < \varepsilon$. Ceci montre qu'on a trouvé pour $\varepsilon > 0$ un voisinage V de a tel que. $f(V) \subset B_d(f(a), \varepsilon)$. Donc f est continue en a.

La convergence uniforme entraîne la convergence point par point.

1.3.6 Espace complet

Suites de Cauchy

Les notions de suite de Cauchy et de complétude dépendent d'une distance et donc s'appliquent aux espaces métriques.

Définition 25 (Suite de Cauchy)

Soit (E,d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est de Cauchy si

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N}, \forall(p,q)\in\mathbb{N}^2, p,q\geqslant N \Rightarrow d(x_p,x_q)\leqslant\varepsilon$$

Exemple 19

Une suite qui converge est de Cauchy. En effet, si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l$$

et si $\varepsilon>0$, soit $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant N$,

$$d(x_n,l)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2, d(x_p,l)+d(x_q,l) &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\ &=\varepsilon\end{aligned}$$

La réciproque est fausse : On muni $\mathbb{R}$ de la distance d définie par : $d(x,y) = |\mathrm{Arctg}(x)-\mathrm{Arctg}(y)|$.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $x_n=n$ n'est pas une suite convergente dans $(\mathbb{R},d)$.
   En effet, si $\lim x_n = x$, on aurait $|\mathrm{Arctg}(x_n)-\mathrm{Arctg}(x)|\to 0$, donc $|\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctg}(x)|=0$. Donc $\mathrm{Arctg}(x)=\frac{\pi}{2}$. Ce qui est impossible.
2. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R},d)$: soit $\varepsilon>0$. On sait que

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Arctg}(n)=\frac{\pi}{2}$$

Donc il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant N$, $|Arctg(n) = -\frac{\pi}{2}|$. Donc $\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2$,

$$|\mathrm{Arctg}(p)-\mathrm{Arctg}(q)|\leqslant\left|\mathrm{Arctg}(p)-\frac{\pi}{2}\right|+\left|\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctg}(q)\right|\leqslant\varepsilon$$

Proposition 19

Toute suite de Cauchy est bornée.

Démonstration:

Soit $\varepsilon=1$. $\exists N\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2, p,q\geqslant N, d(x_p,x_q)\leqslant 1.$$

Soit $R=d(x_p,x_N)$. $\quad 0\leqslant p\leqslant N$. Alors, $\forall n\in\mathbb{N}, x_n\in\mathbb{B}\left(x_N,R+1\right)$

Proposition 20

Une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente est convergente.

Démonstration:

Soit (x_n) une suite de Cauchy. On suppose que $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l\in E$.

Soit $\varepsilon>0$. Soit $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant N$, $d\left(x_{\varphi(n)},l\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.

$d\left(x_n,l\right)\leqslant d\left(x_n,x_{\varphi(n)}\right)+d\left(x_{\varphi(n)},l\right)\leqslant\varepsilon$

Définition 26

On dit qu'un espace métrique (E,d) est *complet* si toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ est convergente dans (E,d).

Cette propriété est fondamentale car elle permet de reconnaître si une suite converge sans connaître sa limite.

Attention, la notion d'espace complet est une notion métrique et non topologique (elle peut donc être vraie pour une métrique et fausse pour une autre).

Proposition 21

Les fermés emboîtés
Si (E,d) est un espace complet, si (F_n) est une suite décroissante de fermés non vides de E telle que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0 \; Alors \; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \text{ est un singleton}$$

$$\operatorname{diam}(F_n) = \sup_{(x,y)\in F_n\times F_n} d(x,y)$$

Définition 27

Soit (E,d) un espace métrique. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $x \in E$, alors, par définition, x est une *valeur d'adhérence* de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle admet une sous-suite qui converge vers x.

Exemple 20

Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, soit $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Alors 1 est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, car $x_{2n} \to 1$.

Proposition 22

Soit (E,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. Si $x_n \to x$, alors x est la seule valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En particulier, la limite d'une suite convergente est unique.

Démonstration:

x est une valeur d'adhérence, car la suite extraite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. Soit y une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \to y$. Par ailleurs, on a aussi $x_{n_k} \to x$. On suppose par l'absurde $y \neq x$. Alors $d(x,y) > 0$. Posons $\varepsilon = d(x,y)/2 > 0$. Comme $x_{n_k} \to x$, il existe un k_1 tel que $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$ si $k \geqslant k_1$; de même, il existe un k_2 tel que $d(x_{n_k}, y) < \varepsilon$ si $k \geqslant k_2$. Alors, pour $k = \max\{k_1, k_2\}$, on a $d(x,y) \leqslant d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < 2\varepsilon = d(x,y)$, ce qui est absurde.

Proposition 23

Soient (E_j, d_j), $j = 1, \ldots, k$, des espaces complets. Alors $E = \prod_{j=1}^{k} E_j$ muni d'une distance produit $D : E \times E \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$D(x,y) = \max\left(d_1(x,y), \cdots, d_k(x,y)\right) \quad \forall x,y \in E.$$

est complet.

Démonstration:

On muni E de la distance produit. Si (x^n) est une suite de Cauchy dans E, (x^n_j) l'est aussi dans E_j. Si $x^n_j \to x_j$ dans E_j, alors $x^n \to (x_1, \ldots, x_k)$ dans E.

Corollaire 3

$\mathbb{R}^n$ muni d'une norme produit est complet.

1.3.7 Relation entre complétude et fermeture

Soient (E, d) un espace métrique et $A \subset E$.

Proposition 24

a) Si (A, d) est complet, alors A est un fermé de E.
b) Si (E, d) est complet et A est un fermé de E, alors (A, d) est complet.

Démonstration:

a) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ et $a \in E$ tels que $x_n \to a$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc convergente (dans A) vers un $b \in A$. L'unicité de la limite (dans E) implique $a = b \in A$. Il s'ensuit que $\overline{A} \subset A$, d'où A fermé.
b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans A. Alors il existe un $a \in E$ tel que $x_n \to a$. Il s'ensuit que $a \in A$, et donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans A.

Corollaire 4

Dans un espace métrique complet, A complet$\Longleftrightarrow$ A fermé.

1.3.8 Théorème du point fixe

Définition 28

Une application $f : (E, d) \to (Y, D)$ est *contractante* s'il existe un $k < 1$ tel que f soit k-Lipschitzienne.

Définition 29

Si $f : E \to E$, un *point fixe* de f est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Théorème 3 (Théorème du point fixe de Picard)

Soient (E, d) un espace métrique *complet* et $f : (E, d) \to (E, d)$ *contractante*. Alors :
a) f a exactement un point fixe a.
b) pour tout $x_0 \in E$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}(x_0)$, converge vers a ;
c) de plus, si $k < 1$ est tel que f soit k-lipschitzienne, alors on a $d(x_n, a) \leqslant \dfrac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$.

Démonstration:

a) Soit $0 < k < 1$ tel que f soit k-lipschitzienne. f a au plus un point fixe : si, par l'absurde, a et b sont des points fixes et $a \neq b$, on aboutit à la contradiction $0 < d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leqslant kd(a, b) < d(a, b)$.
L'existence de a suit de b) : si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et si a est tel que $x_n \to a$, alors $x_{n+1} = f(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to f(a)$, d'où $f(a) = a$.
b) On a, pour tout n, $d(x_{n+1}, x_n) \leqslant k^n d(x_1, x_0)$ (par récurrence sur n). Par conséquent, si $m \geqslant n$, alors

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) = Ck^n. \end{aligned}$$

Comme $Ck^n \to 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un n_0 tel que $Ck^n < \varepsilon$ si $n \geqslant n_0$. Il s'ensuit que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ si $m, n \geqslant n_0$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, elle converge vers un $a \in E$. De ce qui précède, a est l'unique point fixe de f.
c) Comme $x_m \to a$, la conclusion s'obtient en faisant tendre $m \to \infty$ dans (1).

Exemple 21

Trouver le nombre des solutions de l'équation $\cos x = x$.

On a $\cos x = x \Longrightarrow x \in [-1, 1]$. Soit $f : E = [-1, 1] \to E$, $f(x) = \cos x$. $[-1, 1]$ est complet (avec la distance usuelle), car fermé dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, on a $|f'(x)| \leqslant \sin 1 < 1$, $x \in E$. Le théorème des accroissements finis implique $|f(x) - f(y)| \leqslant \sin 1 |x - y|$, $x, y \in E$. Il s'ensuit que l'équation $\cos x = x$ a exactement une solution.

1.4 Exercices

Exercice 1

Démontrer que l'application $d(u,v)=\frac{|u-v|}{1+|u-v|}$ définie une distance sur $\mathbb{R}$.

Indication:

Utiliser la croissance de $F : t \mapsto \frac{t}{1+t}$.

Correction:

On a clairement

$$d(x,y)=d(y,x)\,\text{et}\,d(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y.$$

La seule difficulté est de démontrer l'inégalité triangulaire. Prenons donc $u,v,w\in\mathbb{R}$. Le point de départ est de remarquer que la fonction $F:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ définie par $F(x)=\frac{x}{1+x}$ est croissante.
En particulier, en utilisant aussi l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue, on a

$$d(u,w)=F(|u-w|)\leqslant F(|u-v|+|v-w|).$$

Mais,

$$\begin{aligned}F(|u-v|+|v-w|)=&\frac{|u-v|}{1+|u-v|+|v-w|}+\frac{|v-w|}{1+|u-v|+|v-w|}\\ \leqslant&\frac{|u-v|}{1+|u-v|}+\frac{|v-w|}{1+|v-w|}\\ \leqslant& d(u,v)+d(v,w).\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien démontré que

$$d(u,w)\leqslant d(u,v)+d(v,w).$$

Exercice 2

Soient (X,d) un espace métrique et $A\subset X$, $A\neq\varnothing$. On pose :

$$d(x,A)=\inf\{d(x,a)\ ;\ a\in A\}.$$

Qu'on appelle la *distance du point x à l'ensemble A*. On remarque que $d(x,A)$ est bien définie et $\geqslant 0$. De plus, $d(x,A)=0$ si $x\in A$. Montrer que

1. $x\mapsto d(x,A)$ est 1-lipschitzienne.
2. $d(x,A)=d(x,\overline{A})$.
3. $d(x,A)=0\Longleftrightarrow x\in\overline{A}$.

Correction:

1. Soient $x,y\in A$. Pour tout $a\in A$ on a

$$-d(x,y)+d(y,a)\leqslant d(x,a)\leqslant d(y,a)+d(x,y).$$

   Par passage à l'inf, on trouve $-d(x,y)+d(y,A)\leqslant d(x,A)\leqslant d(y,A)+d(x,y)$, d'où $|d(x,A)-d(y,A)|\leqslant d(x,y)$.

2. Clairement, si $A\subset B$, alors $d(x,A)\geqslant d(x,B)$.
   En particulier, $d(x,A)\geqslant d(x,\overline{A})$. Soit $\varepsilon>0$.
   Il existe un $b\in\overline{A}$ tel que $d(x,b)<d(x,\overline{A})+\varepsilon/2$.
   Il existe une suite $(a_n)\subset A$ telle que $a_n\to b$. Comme $y\mapsto d(x,y)$ est continue sur

X, on trouve $d(x, a_n) \to d(x, b)$.
Il existe donc un n_0 tel que $d(a_{n_0}, b) < \varepsilon/2$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} d(x, A) &\leqslant d(x, a_{n_0}) \\ &\leqslant d(x, b) + d(b, a_{n_0}) \\ &< d(x, \overline{A}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

ε étant arbitraire, on a $d(x, A) \leqslant d(x, \overline{A})$.

3. Si $d(x, A) = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $a \in A$ tel que $d(x, a) < \varepsilon$. Pour $\varepsilon = 1/(n+1)$, on trouve une suite $(a_n) \subset A$ telle que $d(x, a_n) < \dfrac{1}{n+1}$. On a donc $a_n \to x$, et par conséquent $x \in \overline{A}$. Réciproquement, si $x \in \overline{A}$, alors $0 = d(x, \overline{A}) = d(x, A)$.

Exercice 3

Soit (E, d) un espace métrique. On dit que d est *ultramétrique* si elle vérifie :

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \qquad d(x, z) \leqslant \sup\left(d(x, y), d(y, z)\right).$$

Cette inégalité entraîne évidemment l'inégalité triangulaire.

1. Montrer que E muni de la distance d définie par

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y \qquad (d(x, x) = 0) \end{cases}$$

est un espace ultramétrique.
On suppose maintenant que (E, d) est ultramétrique.

2. Montrer que si $d(x, y) \neq d(y, z)$, on a $d(x, z) = \sup\left(d(x, y), d(y, z)\right)$.
3. Montrer qu'une boule ouverte (resp. fermée) est une partie à la fois ouverte et fermée.
4. Montrer que si deux boules ont un point commun l'une est contenue dans l'autre. Montrer de plus que si ces boules ont même rayon et sont toutes les deux des boules ouvertes (resp. fermées) elles sont confondues.
5. Montrer que si deux boules ouvertes distinctes B_1, B_2 de rayon r sont contenues dans une boule fermée de même rayon, alors leur distance est égale à r :

$$d(B_1, B_2) := \inf_{(a,b) \in B_1 \times B_2} d(a, b) = r.$$

Correction:

Soient $x, y, z \in E$, supposons $x = z$; ou bien $y = x$ ou bien y est distinct de x. Dans le premier cas, $d(x, z) = d(x, y) = d(y, z) = 0$ et $d(x, z) = \sup(d(x, y), d(y, z))$. Dans le second cas, $d(x, y) = 1$, d'où

$$0 = d(x, x) = d(x, z) < \sup(d(x, y), d(x, y)) = 1.$$

Supposons $x \neq z$; ou y est distinct de x et de z, ou alors on a l'une des possibilités : $y = x$ ou $y = z$. Si les trois éléments sont deux à deux distincts, l'inégalité est trivialement vérifiée ($1 = 1$!). Sinon, $d(x, y) = 1$ ou $d(y, z) = 1$, d'où

$$1 = d(x, z) \leqslant \sup(d(x, y), d(y, z)).$$

On suppose que $d(x,y) \neq d(y,z)$. Supposons alors que
$d(x,z) < \sup(d(x,y), d(y,z))$ et pour fixer les idées que

$$d(x,y) = \sup(d(x,y), d(y,z)).$$

Alors $d(y,z) < d(x,y)$ et $d(x,z) < d(x,y)$, d'où on déduit que

$$\sup(d(x,z), d(z,y)) < d(x,y).$$

Par ailleurs, $d(x,y) \leqslant \sup(d(x,z), d(z,y))$. Les deux dernières inégalités sont contradictoires.

2. Soit $B_d(a,r)$ une boule ouverte ; montrons qu'elle est fermée. Soit $y \in E \setminus B_d(a,r)$; montrons qu'il existe une boule ouverte $B_d(y,\eta)$, contenue dans $E \setminus B_d(a,r)$. Si on choisit $\eta = r/2$ ou plus généralement $\eta < r$, on obtient que, pour tout $z \in B_d(y,\eta)$,

$$d(a,z) \leqslant \sup(d(a,y), d(y,z)) \leqslant \sup(d(a,y), \eta)).$$

Comme $d(a,y) \geqslant r$ et $d(y,z) < \eta < r$, on a , (d'après la deuxième question), $d(a,z) = d(a,y) \geqslant r$. On en déduit que
$B_d(y,\eta) \subset E \setminus B_d(a,r)$ et par suite la boule ouverte $B_d(a,r)$ est aussi fermée.
La preuve du fait que la boule fermée $B'_d(a,r)$ est aussi ouverte est analogue.

3. Soient $B_d(a,r)$ et $B_d(b,s)$ deux boules ouvertes ayant une intersection non vide et soit $z_0 \in B_d(a,r) \cap B_d(b,s)$. supposons que $r \leqslant s$ et montrons qu'alors $B_d(a,r) \subset B_d(b,s)$. On regarde la distance à b de tout $z \in B_d(a,r)$:

$$d(b,z) \leqslant \sup(d(b,z_0), d(z_0,z)) < \sup(s, d(z_0,z))$$

puisque z_0 est dans $B_d(b,s)$. Par ailleurs, on a :

$$d(z_0,z) \leqslant \sup(d(z_0,a), d(a,z)) < r.$$

On obtient une majoration de $d(b,z)$: $d(b,z) < \sup(r,s) = s$, d'où une inclusion de $B_d(a,r)$ dans $B_d(b,s)$.
Conséquence : deux boules ouvertes de même rayon r qui se rencontrent sont confondues.

4. Soient $A = B_d(a,r)$ et $B = B_d(b,r)$ deux boules ouvertes de rayon r contenues dans une boule fermée $C = B'_d(c,r)$ de même rayon. Montrons que :

$$\forall x \in A, \quad \forall y \in B, \qquad r \leqslant d(a,b) \leqslant r.$$

L'inégalité ultramétrique montre que $d(x,y) \leqslant \sup(d(x,c), d(c,y))$ et ce sup est inférieure à r puisque chacune des boules A et B est incluse dans C. Donc $d(x,y) \leqslant r$.
Par ailleurs, introduisons dans l'estimation de $d(x,y)$ le centre des boules respectives auxquelles ils appartiennent :
$d(x,y) \leqslant \sup(d(x,a), d(a,y))$. Si $d(x,a) = d(a,y)$, on aurait $d(a,y) < r$ et y serait dans A, ce qui est impossible, A et B étant disjoints d'après la quatrième question. Donc $d(a,y) \neq d(x,a)$, et en fait $d(a,y) > d(x,a)$ et

$$d(x,y) = d(a,y).$$

On voit donc que dans le calcul de la distance $d(x,y)$ on peut remplacer x ou y par le centre de la boule ouverte à laquelle il appartient. Par suite

$$d(x,y) = d(a,b) \geqslant r, \quad \forall x \in A, \forall y \in B$$

Et finalement

$$r \leq d(x,y) \leq r, \quad \forall x \in A, \forall y \in B$$

d'où $d(A,B) = r$.

Exercice 4

Soit p un nombre premier. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit $\nu(n)$ comme étant l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers. Pour $x = \pm\frac{a}{b}$, $(a, b \in \mathbb{N}^*)$, on définit $\nu(x) = \nu(a) - \nu(b)$.

1. Montrer que $\nu(x)$ est indépendant du choix de la représentation $\pm\frac{a}{b}$.
2. Montrer que $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$, $x, y \in \mathbb{Q}$.
3. Montrer que $\nu(x+y) \geqslant \min(\nu(x), \nu(y))$ pour $x, y \in \mathbb{Z}$, puis pour $x, y \in \mathbb{Q}$.
4. Montrer que sur $\mathbb{Q}$, d définie par :

$$d(x,y) = p^{-\nu(x-y)} \text{ si } x \neq y, \qquad d(x,x) = 0$$

   est une distance ultramétrique.

Correction:

1. Soit $x = \pm\frac{a}{b} = \pm\frac{a'}{b'}$. On écrit $a = p^{\alpha}a_1$, $b = p^{\beta}b_1$,... Alors l'équation $ab' = a'b$ devient $p^{\alpha+\beta'}a_1b_1' = p^{\alpha'+\beta}a_1'b_1$. Donc $\alpha + \beta' = \alpha' + \beta$ ou encore $\alpha - \beta = \alpha' - \beta'$. Donc $\nu(\pm\frac{a}{b}) = \nu(\frac{a'}{b'})$.
2. Soit $x = p^{\alpha}x_1$, $y = p^{\beta}y_1$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ et les numérateurs et dénominateurs de $x_1, y_1 \in \mathbb{Q}$ non divisibles par p. Alors $xy = p^{\alpha+\beta}x_1y_1$. Donc $\nu(xy) = \alpha + \beta = \nu(x) + \nu(y)$.
3. Soit $x, y \in \mathbb{Z}$, $x = p^{\alpha}x_1$, $y = p^{\beta}y_1$. Supposons par exemple $\alpha \leq \beta$, alors $x + y = p^{\alpha}(x_1 + p^{\beta-\alpha}y_1)$, avec $x_1 + p^{\beta-\alpha}y_1 \in \mathbb{Z}$. Donc $\nu(x+y) \geqslant \alpha = \min(\nu(x), \nu(y))$.
   Soit maintenant $x = \frac{a}{b}, y = \frac{a'}{b'} \in \mathbb{Q}$. Alors

$$\begin{aligned}\nu(x+y) &= \nu(\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}) \\ &= \nu(\frac{ab' + a'b}{bb'}) \\ &= \nu(ab' + a'b) - \nu(bb') \\ &\geqslant \min(\nu(ab'), \nu(a'b)) - \nu(bb')\end{aligned}$$

   (grâce à l'inégalité sur les entiers)

   ,

$$\begin{aligned}&\geqslant \min(\nu(a) + \nu(b'), \nu(a') + \nu(b)) - \nu(b) - \nu(b') \\ &\geqslant \min(\nu(a) + \nu(b') - \nu(b) - \nu(b'), \nu(a') + \nu(b) - \nu(b) - \nu(b')) \\ &\geqslant \min(\nu(a) - \nu(b), \nu(a') - \nu(b')) \\ &\geqslant \min(\nu(x), \nu(y)).\end{aligned}$$

4. Il est clair que $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$ et que $d(x,y) = d(y,x)$. Pour un triplet (x, y, z) on a

$$\begin{aligned}d(x,z) &= p^{-\nu(x-z)} \\ &= p^{-\nu(x-y+y-z)} \\ &\leqslant p^{-\min(\nu(x-y),\nu(y-z))} \\ &\leqslant \max(p^{-\nu(x-y)}, p^{-\nu(y-z)}) \\ &\leqslant \max(d(x,y), d(y,z)).\end{aligned}$$

1.5 Espace compact

1.5.1 Notion de compacité

Définition 30

Soit $\mathscr{U}$ une famille de parties d'un espace topologique $(E, \mathscr{T})$. On dit que $\mathscr{U}$ est un *recouvrement ouvert* de E si $\mathscr{U} \subset \mathscr{T}$, c.-à.-d. les membres de $\mathscr{U}$ sont ouverts, et $E = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U$.

On dit que $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ est un *sous-recouvrement fini* si $\mathscr{V}$ est fini (contient un nombre fini de membres) et $E = \bigcup_{U \in \mathscr{V}} U$.

Définition 31

Un espace topologique E est compact s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Exemple 22

Soit E avec topologie discrète, $\mathscr{T} = \mathscr{P}(E)$. Alors E est compact si et seulement si E est fini.

Par passage au complémentaire, on trouve

Corollaire 5

Soit (E, d) un espace compact.

a) Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de fermés telle que $\bigcap_{i \in I} F_i = \varnothing$, alors il existe une famille **finie** $J \subset I$ telle que $\bigcap_{j \in J} F_j = \varnothing$.

b) Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de fermés telle que $\bigcap_{j \in J} F_j \neq \varnothing$ pour toute famille **finie** $J \subset I$, alors $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \varnothing$.

1.5.2 Fonctions continues sur un compact

Proposition 25

Soit $f : E \to F$ une fonction continue entre espaces topologiques. Si $A \subset E$ est un compact, alors $f(A)$ est un compact.

Démonstration:

Soit $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert de $f(A)$. Comme f est continue, $\mathscr{V} := \{f^{-1}(U) | U \in \mathscr{U}\}$ est un recouvrement ouvert de A. Comme A est compact, $\mathscr{V}$ admet un sous-recouvrement fini $\mathscr{V}'$.L'ensemble $\{f(V) | V \in \mathscr{V}'\}$ est un sous-recouvrement fini $\mathscr{U}$.

Proposition 26

Soit $f : E \to F$ une application continue et *bijective* entre deux espaces topologiques, E étant un *compact*. Alors f est un homéomorphisme.

Démonstration:

Il suffit de vérifier la continuité de f^{-1}. Soit F un fermé de E ; F est donc compact. Alors $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ est un compact de F, donc un fermé de F.

1.5.3 Compacité pour les espaces métriques

Définition 32

Un espace $(E, \mathscr{T})$ topologique est *séquentiellement compact* si toute suite $(x_n) \subset E$ admet une sous-suite convergente. Autrement dit, toute suite $(x_n) \subset E$ a au moins une valeur d'adhérence.

Dans cette section on montrera que pour un espace métrique être séquentiellement compacte est équivalent à être compact. On remarque que la propriété d'un espace d'être séquentiellement compact ne change pas si on remplace la distance par une distance équivalente.

Théorème 4 (Lebesgue)

Soit (E, d) séquentiellement compact. On suppose que $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de E. Alors il existe un $r > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $B(x, r)$ soit contenue dans U_i pour un certain i (dépendant de x, en principe).

(r est **la constante de Lebesgue** du recouvrement $(U_i)_{i\in I}$.)

Démonstration:

Par l'absurde : pour tout $r > 0$, il existe un $x \in E$ tel que $B(x, r)$ ne soit contenue dans aucun U_i. Pour $r = 1/(n + 1)$, on trouve un x_n tel que $B(x_n, 1/(n + 1))$ ne soit contenue dans aucun U_i. On considère une sous-suite (x_{n_k}) convergente vers un $x \in E$. Il existe un i tel que $x \in U_i$, et donc un $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U_i$. Il existe un k_0 tel que $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$ si $k \geqslant k_0$. Il existe un k_1 tel que $1/(n_k + 1) < \varepsilon/2$ si $k \geqslant k_1$. Si $k = \max\{k_0, k_1\}$, alors $z \in B(x_{n_k}, 1/(n_k + 1) \Longrightarrow d(z, x) \leqslant d(z, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$, et donc $B(x_{n_k}, 1/(n_k + 1)) \subset B(x, \varepsilon) \subset U_i$, contradiction.

Proposition 27

Soient (E, d) séquentiellement compact et $r > 0$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que $E = \bigcup\limits_{j=1}^{n} B(x_j, r)$.

Démonstration:

Par l'absurde : sinon, pour tout $x_1 \in E$ on a $B(x_1, r) \neq E$. Soit $x_2 \notin B(x_1, r)$. Alors $B(x_1, r) \cup B(x_2, r) \neq E$. Soit $x_3 \notin B(x_1, r) \cup B(x_2, r) \neq E$, etc. Par récurrence, on trouve une suite (x_n) telle que $x_n \notin \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} B(x_j, r)$. Il s'ensuit que $d(x_n, x_m) \geq r$, $\forall\, m, n$. Une telle suite ne peut pas avoir de sous-suite convergente (contradiction qui finit la preuve). En effet, si, par l'absurde, $x_{n_k} \to x$, alors $d(x_{n_k}, x_{n_l}) \geq r$ si $k \neq l$. En faisant d'abord $l \to \infty$, ensuite $k \to \infty$, on trouve $d(x, x) \geq r$, contradiction.

Proposition 28

Soit (x_n) une suite sans valeur d'adhérence de (E, d). Alors, pour tout $x \in E$, il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r)$ ne contienne qu'un nombre fini de termes de la suite.

Démonstration:

C'est une conséquence de la Proposition 19 du Chapitre 1, mais on présente une preuve directe. Par l'absurde : il existe $x \in E$ tel que, pour tout $r > 0$, $B(x, r)$ contienne une infinité de termes de la suite. On prend $r = 1$. Alors $B(x, 1)$ contient une infinité de termes de la suite ; en particulier, on trouve un n_0 tel que $d(x_{n_0}, x) < 1$. Par récurrence, en prenant $r = 1/(k + 1)$, on trouve un $n_k > n_{k-1}$ tel que $d(x_{n_k}, x) < 1/(k + 1)$. Il s'ensuit que (x_{n_k}) est une sous-suite de la suite initiale et que $x_{n_k} \to x$, contradiction.

Théorème 5 (Borel-Lebesgue)

Un espace métrique est séquentiellement compact si et seulement s'il est compact.

Démonstration:

Condition Nécessaire : Soit r la constante de Lebesgue d'un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$. Il existe $x_1, \ldots, x_n \in E$ tels que $E = \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r)$. Pour $j = 1, \ldots, n$, il existe un $i_j \in I$ tel que $B(x_j, r) \subset U_{i_j}$. Alors $E = \bigcup_{k\in J} U_k$, où $J = \{i_j \ ; \ j = 1, \ldots, n\}$.

Condition suffisante : si (E, d) n'est pas compact, il existe une suite $(x_n) \subset E$ sans valeur d'adhérence. Pour tout $x \in E$, il existe un $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x)$ ne contienne qu'un nombre fini de termes de la suite. Clairement, $(B(x, r_x))_{x\in E}$ est un recouvrement ouvert de E. Si on considère une famille finie $J \subset E$, alors l'union de la famille $(B(x, r_x))_{x\in J}$ ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite. En particulier, cette famille ne couvre ni la suite (x_n), ni E.

Proposition 29

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un espace topologique E *compact*. Alors $\sup f$ et $\inf f$ sont finis et il existe $a, b \in E$ tels que $f(a) = \inf f$ et $f(b) = \sup f$. C'est-à-dire Une fonction continue réelle sur un compact est bornée et ses bornes sont atteintes.

Démonstration:

$A := f(E)$ est un compact dans $\mathbb{R}$. On considère le sup ; le raisonnement est similaire pour l'inf. $M = \sup A$ est fini, car sinon, il existe une suite croissante dans A qui diverge et une telle suite n'admet pas de sous-suite convergente. Il existe alors une suite $(t_n) \subset A$ telle que $t_n \to M$. Chaque sous-suite (t_{n_k}) convergente converge aussi vers M. Donc $M \in A$ par compacité de A. Donc $\sup f = M = f(b)$ pour un $b \in E$.

Proposition 30

Tout espace métrique *compact* est *borné*.

Démonstration:

Soit (E, d) compact. On fixe un $a \in E$ et on considère la fonction continue $f : (E, d) \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, a)$. Alors f est bornée ; en particulier, il existe un $r > 0$ tel que $f(x) \leqslant r$, $x \in E$, ou encore $E = \overline{B}(a, r)$.

Proposition 31

Soient (E, d) un espace métrique **compact** et $A \subset E$. Alors A compact $\Longleftrightarrow$ A fermé dans E.

Démonstration:

Si A est compact, alors A est complet, donc fermé dans E. Réciproquement, si (x_n) est une suite de A, alors (x_n) a une valeur d'adhérence dans E ; A étant fermé, cette valeur d'adhérence appartient à A, et donc (x_n) a une valeur d'adhérence dans A.

Théorème 6 (Théorème de Heine)

Soit $f \in C((E, d), (F, D))$, avec (E, d) **compact**. Alors f est uniformément continue.

Démonstration:

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $a \in E$, il existe un $\delta_a > 0$ tel que $D(f(x), f(a)) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ si $d(x, a) < \varepsilon$. Clairement, $(B(a, \delta_a))_{a\in E}$ est un recouvrement ouvert de E.
Soit δ la constante de Lebesgue de ce recouvrement. Si $x, y \in E$ et $d(x, y) < \delta$, alors $x, y \in B(x, \delta) \subset B(a, \delta_a)$ pour un $a \in E$, d'où $D(f(x), f(y)) \leqslant d(f(x), f(a)) + d(f(a), f(y)) < \varepsilon$.

Théorème 7 (Bolzano-Weierstrass)

Un intervalle **fermé** et **borné** de $\mathbb{R}$ est compact.

Démonstration:

Soit $I = [a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. On définit une suite d'intervalles de la manière suivante : on pose $I_0 = I$. Si I_k a été construit tel qu'il contienne une infinité de termes de la suite, on divise I_k en deux intervalles fermés de longueur égale à la moitié de la longueur de I_k, J et K. I_{k+1} est alors un de ces deux intervalles ; on lui demande de contenir une infinité de termes de la suite. On note que c'est toujours possible de construire I_{k+1}, car au moins l'un des J ou K contient une infinité de termes de la suite. On construit ensuite, par récurrence, une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \in I_k$, $k \in \mathbb{N}$. On choisit $x_{n_0} = x_0 \in I_0$. En supposant $x_{n_0} < x_{n_1} < \ldots < x_{n_{k-1}}$ construits, on note que, par construction, I_k contient des termes x_n avec $n > n_{k-1}$. On choisit alors un $n_k > n_{k-1}$ tel que $x_{n_k} \in I_k$. La suite (x_{n_k}) est de Cauchy. En effet, si $l \geqslant k$, alors $x_{n_l}, x_{n_k} \in I_k$ (car $I_l \subset I_k$) et donc $|x_{n_l} - x_{n_k}| \leqslant (b-a)/2^k$. Comme $(b-a)/2^k \to 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un k_0 tel que $(b-a)/2^k < \varepsilon$ si $k \geqslant k_0$; il s'ensuit que $|x_{n_l} - x_{n_k}| < \varepsilon$ si $k, l \geqslant k_0$.
$[a, b]$ étant complet (car fermé dans $\mathbb{R}$), on trouve que (x_{n_k}) converge dans $[a, b]$, et donc (x_n) a une valeur d'adhérence.

1.6 Exercices :

Exercice 1

Montrer qu'une suite convergente et sa limite forment un ensemble compact.

Indication:

Utiliser qu'un ensemble K est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de K on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K.

Correction:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente et soit ℓ sa limite. Notons

$$K = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}.$$

Soit (v_n) une suite d'éléments de K. Si (v_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, on peut extraire une sous-suite constante, donc convergente.
Sinon (v_n) prend une infinité de valeurs. Nous allons construire une suite convergente(w_n) extraite de (v_n). Soit w_0 le premier des $(v_0, v_1, v_2, \dots)$ qui appartient à $\{u_0, u_1, \dots\}$. Soit w_1 le premier des $(v_1, v_2, \dots)$ qui appartient à $\{u_1, u_2, \dots\}$... Soit w_n le premier des $(v_n, v_{n+1}, \dots)$ qui appartient à $\{u_n, u_{n+1}, \dots\}$. Alors (w_n) est une suite-extraite de (v_n) et par construction (w_n) converge vers la limite de (u_n), donc vers $\ell \in K$.

Exercice 2

Soient $K, F \subset \mathbb{R}^n$ des parties non vides, K compact et F fermé. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tel que $\|a - b\| = \mathrm{dist}(K, F)$.

Indication:

Extraire des sous-suites...

Correction:

1. Notons $\ell = \mathrm{dist}(K, F)$. Alors il existe (x_n) suite d'éléments de K et (y_n) suite d'éléments de F telles que $\|x_n - y_n\| \to \ell$. Comme K est compact alors on peut extraire de (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge dans K. Notons $a \in K$ cette limite Alors la suite extraite $(y_{\varphi(n)})$ est bornée car

$$\|y_{\varphi(n)}\| \leqslant \|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\| + \|x_{\varphi(n)}\|.$$

La suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge est donc bornée, et la suite $(\|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\|)$ qui converge dans $\mathbb{R}$ (vers ℓ) est bornée également. Donc la suite $(y_{\varphi(n)})$ est bornée on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(y_{\varphi\circ\psi(n)})$. De plus comme F est fermé alors cette suite converge vers $b \in F$. La suite $(x_{\varphi\circ\psi(n)})$ extraite de $(x_{\varphi(n)})$ converge vers $a \in K$. Et comme nous avons extrait deux suites (x_n) et (y_n) on a toujours $\|x_{\varphi\circ\psi(n)} - y_{\varphi\circ\psi(n)}\| \to \ell$. A la limite nous obtenons $\|a - b\| = \ell$ avec $a \in K$ et $b \in F$.

2. Remarque : si K était supposé fermé mais pas compact alors le résultat précédent pourrait être faux. Par exemple pour $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 1 \text{ et } y \geqslant 0\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant 0\}$ nous avons $d(K, F) = 0$ mais $K \cap F = \varnothing$.

Exercice 3

Soit E un espace compact et soit (F, d) un espace métrique. Soit $f : E \to F$ une application localement bornée, ce qui signifie que, pour tout $y \in E$, il existe un voisinage V_y de y sur lequel f est bornée. Montrer que f est bornée sur E.

Correction:

Comme E est compact et $E \subset \bigcup_{y \in E} V_y$ il existe un ensemble fini $\mathcal{Y} \subset E$ tel que $E \subset \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} V_y$. Sur chaque voisinage V_y, f est bornée par une constante M_y. Notons $M = \max_{y \in \mathcal{Y}} M_y$. Alors f est bornée sur E par M. En effet pour un élément quelconque $x \in E$, il existe $y \in \mathcal{Y}$ tel que $y \subset V_y$ donc $f(x)$ est bornée par M_y donc par M.

Exercice 4

Soit X un espace métrique.

1. Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés de X et soit $(x_n)_n$ une suite convergente telle que $x_n \in F_n$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que
$$\lim_{n \to \infty} x_n \in \bigcap_{n \geq 0} F_n \quad .$$
Donner un exemple pour lequel $\bigcap_{n \geq 0} F_n = \varnothing$.
2. Soit maintenant $(K_n)_n$ une suite décroissante de *compacts* non vides de X. Vérifier que $K = \bigcap_{n \geq 0} K_n$ est non vide et que tout ouvert Ω qui contient K contient tous les K_n à partir d'un certain rang.

Correction:

1. Soit $x = \lim x_n$. Soit $N \in \mathbb{N}$; montrons que x est dans F_N. On a $x_N \in F_N$, $x_{N+1} \in F_{N+1} \subset F_N$, $x_{N+2} \in F_{N+2} \subset F_{N+1} \subset F_N$, etc. Donc pour tout $n \geqslant N$ alors $x_n \in F_N$. Comme F_N est fermé, alors la limite x est aussi dans F_N. Ceci étant vrai quelque soit N, alors $x \in \bigcap_N F_N$.
Pour construire un exemple comme demandé il est nécessaire que de toute suite on ne puisse pas extraire de sous-suite convergente. Prenons par exemple dans $\mathbb{R}$, $F_n = [n, +\infty[$, alors $\bigcap_n F_n = \varnothing$.
2. (a) Pour chaque n on prend $x_n \in K_n$, alors pour tout n, $x_n \in K_0$ qui est compact donc on peut extraire une sous-suite convergente. Si x est la limite de cette sous-suite alors $x \in K$. Donc K est non vide.
   (b) Par l'absurde supposons que c'est faux, alors
$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geqslant N \quad \exists x_n \in K_n \text{ tel que } x_n \notin \Omega.$$
De la suite (x_n), on peut extraire une sous-suite $x_{\varphi(n)}$ qui converge vers $x \in K$. Or $x_n \in X \setminus \Omega$ qui est fermé donc $x \in X \setminus \Omega$. Comme $K \subset \Omega$ alors $x \notin K$ ce qui est contradictoire.

Exercice 5

Soit X un espace topologique et $f : X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'application $g : x \in X \to \int_0^1 f(x,y)\,dy$ est continue.

Correction:

Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$.

1. Pour tout $y \in [0,1]$ f est continue en (x,y) donc il existe un $U(y)$ voisinage de x et $[a(y), b(y)]$ voisinage de y tel que pour $(x', y') \in U(y) \times [a(y), b(y)]$ on ait $|f(x,y) - f(x',y')| \leqslant \varepsilon$.
2. Comme $[0,1] \subset \bigcup_{y \in [0,1]} [a(y), b(y)]$ et que $[0,1]$ est un compact de $\mathbb{R}$ il existe un ensemble fini $\mathcal{Y}$ tel que $[0,1] \subset \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} [a(y), b(y)]$. De plus quitte à réduire les intervalles ont peut supposer qu'il sont disjoints et quitte à les réordonner on peut supposer que ce recouvrement s'écrit :
$$[0,1] = [0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \ldots [t_k, 1].$$

3. Notons $U = \bigcap_{y \in \mathcal{Y}} U(y)$, c'est un voisinage de x car l'intersection est finie. Pour $x' \in U$ nous avons

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(x')| =& \left| \int_0^1 f(x,y)dy - \int_0^1 f(x',y)dy \right| \\
\leqslant & \int_0^1 |f(x,y) - f(x',y)|dy \\
\leqslant & \int_0^{t_1} |f(x,y) - f(x',y)|dy + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \cdots + \int_{t_k}^1 |f(x,y) - f(x',y)|dy \\
\leqslant & \varepsilon(t_1 - 0) + \varepsilon(t_2 - t_1) + \cdots + \varepsilon(1 - t_k) \\
\leqslant & \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc g est continue.

Exercice 6

Soit E un espace normé. Si A et B sont deux parties de E, on note $A + B$ l'ensemble $\{a + b\ ;\ a \in A \text{ et } b \in B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $A + B$ est fermé.
2. Donner un exemple de deux fermés de $\mathbb{R}^2$ dont la somme n'est pas fermé.

Indication:

On pourra utiliser la caractérisation de la fermeture par des suites.

Correction:

1. Pour montrer que $A + B$ est fermé, nous allons montrer que toute suite de $A + B$ qui converge, converge vers un élément de $A + B$. Soit (x_n) un suite de $A + B$ qui converge vers $x \in E$. Alors il existe $a_n \in A$ et $b_n \in B$ tel que $x_n = a_n + b_n$. Comme A est compact on peut extraire une sous-suite $(a_{\varphi(n)})$ qui converge vers $a \in A$. Alors $b_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)}$ est convergente vers $x - a$. Notons $b = x - a$ comme B est fermé alors $b \in B$. Maintenant $x = a + b$ donc $x \in A + B$.
2. Soit

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 1 \text{ et } x \geqslant 0\},$$

soit

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant 0 \text{ et } x \geqslant 0\}.$$

Alors

$$F + G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\} \cup \{0\} \times [0, +\infty[$$

qui n'est pas un fermé (ni un ouvert).

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Elle est dite *propre* si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, l'image réciproque $f^{-1}(K)$ est compact.

1. Montrer que, si f est propre, alors l'image par f de tout fermé de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.
2. Établir l'équivalence suivante : l'application f est propre si et seulement si elle a la propriété :

$$\|f(x)\| \to \infty \quad \text{quand} \quad \|x\| \to \infty\ .$$

Indication:

1. Utiliser la caractérisation de la fermeture par des suites.
2. Remarquer que « $\|f(x)\| \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$ » est équivalent à

$$\forall M > 0 \quad \exists m > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad (x \notin B(0,m) \Rightarrow f(x) \notin B(0,M)).$$

Correction:

1. Supposons f propre et soit F un fermé. Montrons que $f(F)$ est un fermé. Soit (y_n) une suite de $f(F)$ qui converge vers $y \in \mathbb{R}^n$. Notons K l'union de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et de $\{y\}$. Alors K est compact. Comme $y_n \in f(F)$, il existe $x_n \in F$ tel que $f(x_n) = y_n$. En fait $x_n \in f^{-1}(K)$ qui est compact car f est propre. Donc de (x_n) on peut extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$, on note x la limite de cette sous-suite. Comme $x_{\varphi(n)} \in F$ et que F est fermé alors $x \in F$. Comme f est continue alors $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)})$ tend vers $f(x)$, or $y_{\varphi(n)}$ tend aussi vers y. Par unicité de la limite $y = f(x)$. Donc $y \in f(F)$ et $f(F)$ est fermé.
2. Dire $\|f(x)\| \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$ est équivalent à

$$\forall M > 0 \quad \exists m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (x \notin B(0,m) \Rightarrow f(x) \notin B(0,M)).$$

   (a) Supposons f propre, soit $M > 0$. Alors $B(0,M)$ est un compact (nous sommes dans $\mathbb{R}^n$) donc $f^{-1}(B(0,M))$ est compact donc borné, c'est-à-dire qu'il existe $m > 0$ tel que $f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$. Donc si $x \notin B(0,m)$ alors $f(x) \notin B(0,M)$.

   (b) Réciproquement, soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Comme f est continue et que K est fermé alors $f^{-1}(K)$ est un fermé. Reste à montrer que $f^{-1}(K)$ est borné. Comme K est compact alors il existe $M > 0$ tel que $K \subset B(0,M)$, par hypothèse il existe $m > 0$ tel que si $x \notin B(0,m)$ alors $f(x) \notin B(0,M)$, ce qui s'écrit aussi par contraposition : "si $f(x) \in B(0,M)$ alors $x \in B(0,m)$", donc $f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$. Or $K \subset B(0,M)$ donc $f^{-1}(K) \subset f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$. Donc $f^{-1}(K)$ est borné donc compact.

Exercice 8

Soit $E = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$. On munit E de la métrique $d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$. Montrer que la boule unité fermée de E n'est pas compact (on pourra construire une suite dont aucune sous suite n'est de Cauchy).

Que peut-on dire de la boule unité fermée de l^∞ (l'espace des suites bornées muni de la norme sup) ?

Correction:

1. Soit f_n la fonction affine suivante $f_n(t) = 0$ pour $t \in [0, \frac{1}{n+1}]$ et pour $t \in [\frac{1}{n}, 1]$. Sur $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ on définit une "dent" qui vaut 0 aux extrémités et 1 au milieu du segment. Alors si B dénote la boule unité fermée (centrée en la fonction nulle), nous avons $d_\infty(f_n, 0) = \sup |f_n(t)| = 1$ donc $f_n \in B$. Par contre si $p \neq q$ alors $d(f_p, f_q) = 1$ donc la suite (f_n) et toute sous-suite ne sont pas de Cauchy. Si B était compact alors on pourrait extraire une sous-suite convergente donc de Cauchy. Contradiction.
2. Notons $x^n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$ la suite de l^∞ (le 1 est à la n-ième place). Alors x^n est dans la boule unité fermée B centrée en 0. De plus si $p \neq q$, alors $d_\infty(x^p, x^q) = 1$. Donc toute sous-suite extraite de (x_n) n'est pas de Cauchy donc ne peut pas converger. Donc B n'est pas compact.

Exercice 9

Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in X\ , x \neq y\ .$$

Le but ici est de montrer que f a un unique point fixe $p \in X$.

1. Justifier que f peut avoir au plus un point fixe.
2. Montrer que les ensembles $X_n = f^n(X)$, $n \in \mathbb{N}$, forment une suite décroissante de compacts et que $Y = \bigcap_{n \geq 0} X_n$ n'est pas vide.
3. Montrer que Y est un ensemble invariant, i.e. $f(Y) = Y$, et en déduire que le diamètre de cet ensemble est zéro.
4. Conclure que f a un unique point fixe $p \in X$ et que pour tout $x_0 \in X$ la suite $x_n = f^n(x_0) \to p$, lorsque $n \to \infty$.

Indication:

1. ...
2. ......
3. Montrer $f(Y) \subset Y$ puis $Y \subset f(Y)$.
4. Diamètre zéro implique ensemble réduit à un singleton.

Correction:

1. Si f a deux points fixes $x \neq y$, alors $d(x, y) = d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Ce qui est absurde. Donc f a au plus un point fixe.
2. f est continue et X compact donc $X_1 = f(X)$ est compact, par récurrence si X_{n-1} est compact alors $X_n = f(X_{n-1})$ est compact.
   De plus $f : X \to X$, donc $f(X) \subset X$ soit $X_1 \subset X$, puis $f(X_1) \subset f(X)$ soit $X_2 \subset X_1$, etc. Par récurrence $X_n \subset X_{n-1} \subset \cdots \subset X_1 \subset X$. Comme chaque X_n est non vide alors Y n'est pas vide.
3. Montrons d'abord que $f(Y) \subset Y$. Si $y \in Y$, alors pour tout $n \geqslant 0$ on a $y \in X_n$ donc $f(y) \in f(X_n) = X_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$. Donc pour tout $n > 0$, $f(y) \in X_n$, or $f(y) \in X_0 = X$. Donc $f(y) \in Y$.
   Réciproquement montrons $Y \subset f(Y)$. Soit $y \in Y$, pour chaque $n \geqslant 0$, $y \in X_{n+1} = f(X_n)$. Donc il existe $x_n \in X_n$ tel que $y = f(x_n)$. Nous avons construit (x_n) une suite d'élément de X compact, on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$. Notons x la limite. Alors $y = f(x_{\varphi(n)})$ pour tout n et f est continue donc à la limite $y = f(x)$. Donc $y \in f(Y)$.
   Soit $y \neq y' \in Y$ tel que $d(y, y') = \operatorname{diam} Y > 0$. Comme $Y = f(Y)$ alors il existe $x, x' \in Y$ tel que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Or $d(y, y') = d(f(x), f(x')) < d(x, x')$. On a trouvé deux éléments de Y tel $d(x, x')$ est strictement plus grand que le diamètre de Y ce qui est absurde. Donc $y = y'$ et le diamètre est zéro.
4. Comme le diamètre est zéro alors Y est composé d'un seul point $\{p\}$ et comme $f(Y) = Y$ alors $f(p) = p$. Donc p a un point fixe et nous savons que c'est le seul. Par la construction de Y pour tout point $x_0 \in X$ la suite $x_n = f^n(x_0)$ converge vers p.

Exercice 10

Soient (E, d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) \geq d(x, y) \quad \text{pour tout } \ x, y \in E\ .$$

On se propose de montrer que f est une isométrie surjective. Soient $a, b \in E$ et posons, pour $n \geq 1$, $a_n = f^n(a) = f \circ f^{n-1}(a)$ et $b_n = f^n(b)$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \geq 1$ tel que $d(a, a_k) < \varepsilon$ et $d(b, b_k) < \varepsilon$ (Considérer une valeur d'adhérence de la suite $z_n = (a_n, b_n)$).
2. En déduire que $f(E)$ est dense dans E et que $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$ (Considérer la suite $u_n = d(a_n, b_n)$).

Correction:

1. Comme $E \times E$ est compact alors de la suite (a_n, b_n) on peut extraire une sous-suite $(a_{\varphi(n)}, b_{\varphi(n)})$ qui converge vers (a_∞, b_∞). Soit $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geqslant n$ alors
$$d(a_{\varphi(k)}, a_\infty) < \frac{\varepsilon}{2}$$
et
$$d(b_{\varphi(k)}, b_\infty) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Donc en particulier
$$\begin{aligned} d(a_{\varphi(n+1)}, a_{\varphi(n)}) \leqslant & d(a_{\varphi(n+1)}, a_\infty) \\ & + d(a_\infty, a_{\varphi(n)}) < \varepsilon. \end{aligned}$$
La propriété pour f s'écrit ici $d(a_k, b_{k'}) \leqslant d(a_{k+1}, b_{k'+1}) \geqslant$. Donc $d(a_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}, a_0) \leqslant d(a_{\varphi(n+1)-\varphi(n)+1}, a_1) \leqslant \ldots \leqslant d(a_{\varphi(n+1)-1}, a_{\varphi(n)-1}) \leqslant d(a_{\varphi(n+1)}, a_{\varphi(n)}) < \varepsilon$. Donc pour $k = \varphi(n+1) - \varphi(n)$, sachant que $a_0 = a$ alors $d(a_k, a) < \varepsilon$. Même chose avec (b_n).
2. (a) Soit $a \in E$ et $\varepsilon > 0$ alors il existe $k \geqslant 1$ tel que $a_k = f^k(a) \in f(E)$ avec $d(a, a_k) < \varepsilon$. Donc $f(E)$ est dense dans E.

   (b) Soit $u_n = d(a_n, b_n)$. Alors par la propriété pour f, (u_n) est une suite croissante de $\mathbb{R}$. Comme E est compact alors son diamètre est borné, donc (u_n) est majorée. La suite (u_n) est croissante et majorée donc converge vers u.

   Maintenant $u_n - u_0 \geq 0$ et
$$\begin{aligned} 0 \leqslant & u_n - u_0 = d(a_n, b_n) - d(a, b) \\ \leqslant & d(a_n, a) + d(a, b) + d(b, b_n) - d(a, b) = d(a_n, a) + d(b_n, b). \end{aligned}$$
   Donc u_n tend vers u_0. Comme (u_n) est croissante alors $u_n = u_0$ pour tout n. En particulier $u_1 = u_0$ donc $d(a_1, b_1) = d(a_0, b_0)$ soit $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$. Donc f est une isométrie.

   (c) f est une isométrie donc continue (elle est 1 lipschitziènne !). E est compact donc $f(E)$ est compact donc fermé or $f(E)$ est dense donc $f(E) = E$. Donc f est surjective

1.7 Espace connexe

Notion de connexité

Définition 33

Un espace topologique $(E, \mathscr{T})$ est *connexe* si les seules parties à la fois ouvertes et fermées de E sont $\varnothing$ et E.
Une partie $A \subset E$ est connexe si $(A, \mathscr{T}_A)$ est connexe où $\mathscr{T}_A$ est la topologie induite sur A.

Proposition 32

Les propriétés suivantes sont équivalentes :
a) $(E, \mathscr{T})$ est connexe ;
b) Si $E = F_1 \cup F_2$, avec F_1, F_2 fermés disjoints, alors $F_1 = \varnothing$ ou $F_2 = \varnothing$;
c) Si $E = U_1 \cup U_2$, avec U_1, U_2 ouverts disjoints, alors $U_1 = \varnothing$ ou $U_2 = \varnothing$;
d) Si $f \in C((E, d), \{0, 1\})$, alors f est constante.

Ici, $\{0, 1\}$ est muni de la topologie discrète.

Démonstration:

a)$\Longrightarrow$b) On a $F_1 = (F_2)^c$; par conséquent, F_1 est à la fois ouvert et fermé. On a donc $F_1 = \varnothing$ ou $F_1 = E$ (et alors $F_2 = \varnothing$).
b)$\Longrightarrow$c) On a $E = (U_1)^c \cup (U_2)^c$, d'où $(U_1)^c = \varnothing$ ou $(U_2)^c = \varnothing$, ce qui revient à $U_2 = \varnothing$, respectivement $U_1 = \varnothing$.
c)$\Longrightarrow$d) $\{0\}$ et $\{1\}$ sont des ouverts de $\{0, 1\}$, et donc $U_1 = f^{-1}(\{0\})$ et $U_2 = f^{-1}(\{1\})$ sont des ouverts de E. Clairement, ces deux ouverts sont disjoints et $E = U_1 \cup U_2$. Il s'ensuit que $U_1 = \varnothing$ (et alors $f \equiv 1$) ou $U_2 = \varnothing$ (et alors $f \equiv 0$).
d)$\Longrightarrow$a) Si A est une partie à la fois ouverte et fermée de E, soit $f = 1_A$. Alors $f \in C(E, \{0, 1\})$, car les ouverts de $\{0, 1\}$ sont $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$ et $\{0, 1\}$, et on vérifie aisément que les images réciproques de ces ensembles sont des ouverts de E. On a donc $f \equiv 0$ ou $f \equiv 1$ (et alors $A = \varnothing$ ou $A = E$).

Proposition 33

Soient $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique et $A \subset E$. Si A est connexe et $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.

Démonstration:

Soit $F : B \to \{0, 1\}$ continue. Alors sa restriction $f|_A : A \to \{0, 1\}$ est continue et donc constant par la connexité de A. Soit $b = f(x)$ pour $x \in A$. Comme f est continue, $f^{-1}(\{b\})$ est un fermé pour la topologie $\mathscr{T}_B$. il existe donc une fermé F dans E tel que. $f^{-1}(\{b\}) = B \cap F$. On a $A = f|_A{}^{-1}(\{b\}) \subset f^{-1}(\{b\}) \subset F$. Donc $B \subset \overline{A} \subset \overline{F} = F$. Donc $f^{-1}(\{b\}) = B \cap F = B$ ce qui implique que f est constant sur B. Donc B est connexe.

Proposition 34

Soient $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. On suppose que :
(i) chaque A_i est connexe ;
(ii) il existe un $i_0 \in I$ tel que $A_i \cap A_{i_0} \neq \varnothing$, $\forall\ i \in I$.
Alors $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ est connexe.

Démonstration:

Soit $f \in C(\bigcup\limits_{i \in I} A_i; \{0, 1\})$. Alors, pour chaque i, $f_{|A_i}$ est constante ; soit c_i la valeur de cette constante. Si $x \in A_i \cap A_{i_0}$, on trouve $c_i = f(x) = c_{i_0}$, d'où f est constante.

Corollaire 6

Soient $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de E telle que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$. Alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.

Corollaire 7

Soient A, B deux parties connexes de E telles que $A\cap B \neq \varnothing$. Alors $A\cup B$ est connexe.

Un résultat plus fort que le corollaire précédent est :

Proposition 35

Soient A, B deux parties connexes de E telles que $\overline{A}\cap B \neq \varnothing$. Alors $A\cup B$ est connexe.

Démonstration:

On pose $C = A \cup (\overline{A} \cap B)$. Donc $A \subset C \subset \overline{A}$ et alors C est connexe et $C \cap B \neq \varnothing$. D'après le corollaire $C \cup B$ est connexe. Mais $C \cup B = A \cup B \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$.

Définition 34

Soit $x \in E$, point d'un espace topologique. La *composante connexe de x* est $\mathscr{C}_x = \cup\{A\ ; A \text{ connexe, } A \text{ contient } x\}$.
Une partie A de E est une *composante connexe* s'il existe un x tel que $A = \mathscr{C}_x$.

Proposition 36

a) $\mathscr{C}_x$ est la plus grande partie connexe de E contenant x (en particulier, $x \in \mathscr{C}_x$) ;
b) deux composantes connexes sont soit égales, soit disjointes ; l'union des composantes connexes est E (autrement dit, les composantes connexes forment une partition de E) ;
c) chaque composante connexe est fermée dans E ;
d) Si les composantes connexes sont *en nombre fini*, alors chaque composante connexe est ouverte dans E.

Démonstration:

a) On doit montrer que : *(i)* $\mathscr{C}_x$ est connexe, *(ii)* $x \in \mathscr{C}_x$, *(iii)* si A est connexe et $x \in A$, alors $A \subset \mathscr{C}_x$. La dernière propriété est claire grâce à la définition de $\mathscr{C}_x$. Pour les deux premières, notons que $\{x\}$ est connexe (pourquoi ?) ; en particulier, $x \in \mathscr{C}_x$. On peut écrire $\mathscr{C}_x = \cup\{A\ ;\ A \text{ connexe et } A \cap \{x\} \neq \varnothing\}$, ce qui montre que $\mathscr{C}_x$ est connexe.
b) Si $\mathscr{C}_x \cap \mathscr{C}_y \neq \varnothing$, alors $\mathscr{C}_x \cup \mathscr{C}_y$ est connexe et contient x. On trouve $\mathscr{C}_x \cup \mathscr{C}_y \subset \mathscr{C}_x$, d'où $\mathscr{C}_y \subset \mathscr{C}_x$; de même, on a $\mathscr{C}_x \subset \mathscr{C}_y$, d'où $\mathscr{C}_y = \mathscr{C}_x$. Par ailleurs, on a $E = \bigcup_{x\in E} \{x\} \subset \bigcup_{x\in E} \mathscr{C}_x \subset E$, d'où $\bigcup_{x\in E} \mathscr{C}_x = E$.
c) $\mathscr{C}_x$ étant connexe, $\overline{\mathscr{C}_x}$ (qui contient x) l'est aussi. Il s'ensuit que $\overline{\mathscr{C}_x} \subset \mathscr{C}_x$, d'où $\overline{\mathscr{C}_x} = \mathscr{C}_x$. On trouve que $\mathscr{C}_x$ est un fermé.
d) On a $E \setminus \mathscr{C}_x = \cup\{\mathscr{C}_y\ ;\ \mathscr{C}_x \cap \mathscr{C}_y = \varnothing\}$. C'est une union finie de fermés, donc un fermé. Il s'ensuit que $\mathscr{C}_x$ est un ouvert.

Le résultat suivant est immédiat.

Proposition 37

La relation $x \sim y \iff x$ et y appartiennent à la même composante connexe est une relation d'équivalence.

Proposition 38

Soient E, Y des espaces topologiques et $f : E \to Y$ une fonction continue. Si E est *connexe*, alors $f(E)$ est connexe.

Démonstration:

Soit $g \in C(f(E), \{0,1\})$. Alors $g \circ f \in C(E, \{0,1\})$. Il s'ensuit que $g \circ f$ est constante ; par exemple, $g \circ f \equiv 0$. Si $y \in f(E)$, il existe un $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On trouve $g(y) = g(f(x)) = 0$, et donc g est constante.

Proposition 39

Soient $E_1, \ldots, E_k$, k espaces connexes. Alors $E = \prod_{j=1}^{k} E_j$ est connexe.

Démonstration:

Il suffit de prouver le résultat si $k = 2$; le cas général s'obtient immédiatement par récurrence sur k. On fixe $x_1 \in E_1$. Soient $A = \{x_1\} \times E_2$, $A_y = E_1 \times \{y\}$, $y \in E_2$. Alors $E_1 \times E_2 = A \cup \bigcup_{y \in E_2} A_y$. Par ailleurs, on a $A_y \cap A \neq \varnothing$, $\forall\ y \in E_2$. Il suffit de montrer que A et A_y sont connexes. On prouve que A est connexe ; l'argument est le même pour A_y. Soit $f : E_2 \to E$, $f(x_2) = (x_1, x_2)$. Alors f est continue, car ses coordonnées sont continues. E_2 étant connexe, $A = f(E_2)$ l'est aussi.

Théorème 8

a) Une partie A de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si A est un intervalle.
b) Si $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in A$, alors la composante connexe de x dans A est le plus grand intervalle contenant x et contenu dans A.
c) Tout ouvert U de $\mathbb{R}$ est une union *au plus dénombrable* d'intervalles ouverts *disjoints*.

La partie c) est une *caractérisation* des ouverts de $\mathbb{R}$, car, réciproquement, toute union d'intervalles ouverts est un ouvert.

Démonstration:

a) Si A n'est pas un intervalle, alors il existe $x < y < z$ tels que $x, z \in A$, mais $z \notin A$. Alors $U = A \cap]-\infty, z[$, $V = A \cap]z, +\infty[$ sont des ouverts non vides et disjoints de A tels que $A = U \cup V$, et donc A n'est pas connexe. Réciproquement, supposons A intervalle et soit $f \in C(A, \{0, 1\})$. Si, par l'absurde, f n'est pas constante, alors il existe $x, y \in A$ tels que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$. De par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un z compris entre x et y (donc appartenant à A) tel que $f(z) = 1/2$, contradiction.
b) Posons $J = \cup\{I \text{ intervalle } \subset A\ ;\ x \in I\}$. J est un intervalle, car une union d'intervalles dont l'intersection est non vide (ce qui est le cas ici, car x est dans chaque intervalle) est un intervalle. Par définition de J, c'est le plus grand intervalle de A contenant x. De a), J est connexe et donc $J \subset \mathscr{C}_x$. Par ailleurs, $\mathscr{C}_x$ est un intervalle contenant x, d'où $\mathscr{C}_x \subset J$. Finalement, $\mathscr{C}_x = J$.
c) On commence par montrer qu'une composante connexe est un intervalle *ouvert*. Soient J une composante connexe de U et $x \in J$. Comme $x \in U$, il existe un $r > 0$ tel que $]x-r, x+r[\subset U$. Alors J et $]x-r, x+r[$ sont des parties connexes de U d'intersection non vide. On trouve que $J \cup]x-r, x+r[$ est une partie connexe de U contenant x, et donc $J \cup]x-r, x+r[\subset \mathscr{C}_x = J$. Finalement, $]x-r, x+r[\subset J$, et donc J est un ouvert. On a $U = \bigcup_{i \in I} J_i$, avec chaque J_i composante connexe (donc intervalle ouvert) ; on suppose qu'il n'y a pas de répétition dans cette liste, ce qui implique $J_i \cap J_k = \varnothing$ si $i \neq k$. Chaque J_i contient un nombre rationnel q_i. L'application $g : I \to \mathbb{Q}$, $g(i) = q_i$, est injective (car les intervalles sont disjoints). On trouve que I est au plus dénombrable.

Exemple 23

Si $E = \mathbb{Q}$, alors $\mathscr{C}_x = \{x\}$, $x \in \mathbb{Q}$.

En effet, $\mathbb{Q}$ ne contient pas d'intervalle non trivial, car entre deux rationnels il existe toujours un irrationnel.

1.8 Exercices :

Exercice 1

Soit A et B des parties de X. On suppose B connexe et que $B \cap A$ et $B \cap \complement A$ sont non vides. Montrer que B coupe la frontière de A.

Indication:

Utiliser la partition $X = \mathring{A} \cup \operatorname{Fr} A \cup (X \setminus \bar{A})$ où $\operatorname{Fr} A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$ est la frontière de A.

Correction:

Notons la frontière $\operatorname{Fr} A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$. Nous avons la partition $X = \mathring{A} \cup \operatorname{Fr} A \cup (X \setminus \bar{A})$. Si $B \cap \operatorname{Fr} A = \varnothing$ alors $B \subset \mathring{A} \cup (X \setminus \bar{A})$.

De plus, par hypothèses, $B \cap A \neq \varnothing$ et $B \cap \operatorname{Fr} A = \varnothing$ or $\mathring{A} = A \setminus \operatorname{Fr} A$ donc $B \cap \mathring{A} \neq \varnothing$. Comme $\operatorname{Fr} A = \operatorname{Fr}(X \setminus A)$ on a $B \cap \operatorname{Fr}(X \setminus A) = \varnothing$. Par hypothèse $B \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$ donc $B \cap (X \setminus \bar{A}) = (B \cap (X \setminus A)) \setminus (B \cap \operatorname{Fr}(X \setminus A)) \neq \varnothing$.

Nous avons montrer que B est inclus dans l'union de deux ouverts disjoints $\mathring{A}$ et $X \setminus \bar{A}$, d'intersection non vide avec B, donc B n'est pas connexe. Par contraposition, si B est connexe alors B ne rencontre pas la frontière de A.

Exercice 2

Notons $T = \{0\} \times [-1, 1] \cup [-1, 1] \times \{0\}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que T est compact et connexe et que $f(T)$ est un segment si $f : T \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
2. Déterminer les points $x \in T$ pour lesquels $T \setminus \{x\}$ est connexe.
3. Montrer que T n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

Correction:

1. T est compact car c'est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

   Soit $g : T \longrightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Par connexité du segment $[-1, 1]$, g est constante sur $\{0\} \times [-1, 1]$ (et vaut v) ; g est aussi constante sur $[-1, 1] \times \{0\}$ et vaut v'. Mais alors $v = g(0, 0) = v'$ donc g est constante sur T. Donc T est connexe.

   Pour $f : T \to \mathbb{R}$ une fonction continue. T est compact donc $f(T)$ est compact. T est connexe donc $f(T)$ est connexe. Donc $f(T)$ est un compact connexe de $\mathbb{R}$ c'est donc un segment compact.
2. Ce sont les quatre points cardinaux $N = (0, 1)$, $S = (0, -1)$, $E = (1, 0)$, $W = (-1, 0)$.
3. Par l'absurde, supposons que T soit homéomorphe à une partie I de $\mathbb{R}$, alors il existe un homéomorphisme $f : T \longrightarrow I$. Par le premier point I est un segment compact $I = [a, b]$. $T \setminus \{N\}$ est connexe donc sont image par f, $f(T \setminus \{N\})$ est connexe, mais c'est aussi le segment I privé d'un point. I privé d'un point étant connexe, le point retiré est nécessairement une extrémité. Donc $f(N) = a$ ou $f(N) = b$. Supposons par exemple $f(N) = a$. On refait le même raisonnement avec S, qui s'envoie aussi sur une extrémité, comme f est bijective cela ne peut être a, donc $f(S) = b$. Maintenant $f(E)$ est aussi une extrémité donc $f(E) \in \{a, b\}$. Mais alors f n'est plus injective car on a $f(E) = f(N)$ ou $f(E) = f(S)$. Contradiction.

Exercice 3

1. Montrer qu'il existe une surjection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| = 1\}$ et qu'il n'existe pas d'injection continue de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas d'injection continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Indication:

1. Pour la surjection, pensez à l'exponentielle ou aux sinus et cosinus... Pour l'injection, raisonner par l'absurde et utiliser la connexité du cercle privé d'un point.
2. Raisonner par l'absurde et utiliser la connexité de $\mathbb{R}^2$ privé d'un point.

Correction:

1. (a) $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ définie par $\phi(t) = e^{it}$ est une surjection continue.

   (b) $\mathbb{S}^1$ est un compact connexe donc, par l'absurde, si $\psi : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une injection continue alors $\psi(\mathbb{S}^1)$ est un compact connexe de $\mathbb{R}$ donc un segment compact I. Soit $y \in \mathring{I}$, comme I est l'image de $\mathbb{S}^1$ alors il existe un unique $x \in \mathbb{S}^1$ tel que $f(x) = y$. L'application f induit alors une bijection continue $f : \mathbb{S}^1 \setminus \{x\} \longrightarrow I \setminus \{y\}$. Mais $\mathbb{S}^1 \setminus \{x\}$ est connexe alors que son image par f, qui est $I \setminus \{y\}$ ne l'est pas (car $y \in \mathring{I}$). L'image d'un connexe par une application continue doit être un connexe, donc nous avons une contradiction.
2. Si $\chi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une injection continue. Comme $\mathbb{R}^2$ est connexe $f(\mathbb{R}^2) = I$ est un connexe de $\mathbb{R}$ donc un segment (non réduit à un point !). Prenons y un élément de $\mathring{I}$, soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = y$. Alors $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ est connexe, $I \setminus \{y\}$ ne l'est pas, et f est une bijection continue entre ces deux ensembles, d'où une contradiction.

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^2$, soit B_a l'ensemble $\{a\}\times]0,1]$ si a est rationnel et $B_a = \{a\} \times [-1,0]$ si a est irrationnel. Montrer que $B = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} B_a$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.

Indication:

Définir $g : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ tel que $g(x)$ prend la valeur qu'a f sur B_x. Montrer pour chaque points de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, g est constante dans un voisinage de ce point, puis faire la même chose pour un point de $\mathbb{Q}$. Conclure.

Correction:

L'ensemble B est connexe si et seulement si toute fonction continue $f : B \to \{0,1\}$ est constante. Soit alors $f : B \to \{0,1\}$ une fonction continue et montrons qu'elle est constante. Remarquons que la restriction de f à tout ensemble B_a est constante (B_a est connexe).

On définit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ tel que $g(x)$ prend la valeur qu'a f sur B_x. Nous allons montrer que g est localement constante (on ne sait pas si g est continue).

— Soit $a \notin \mathbb{Q}$ alors on a $(a,0) \in B$, f est une fonction continue et $\{f(a,0)\}$ est un ouvert de $\{0,1\}$, donc $f^{-1}(\{f(a,0)\})$ est un ouvert de B. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $(x,y) \in (]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\times]-\varepsilon,\varepsilon[) \times B$ alors $f(x,y) = f(a,0)$. Alors pour $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ on a $g(x) = g(a)$: si $x \notin \mathbb{Q}$ alors $g(x) = f(x,0) = f(a,0) = g(a)$; et si $x \in \mathbb{Q}$ alors $g(x) = f(x, \frac{\varepsilon}{2}) = f(a,0) = g(a)$. Donc g est localement constante au voisinage des point irrationnels.

— Si $a \in \mathbb{Q}$ et soit $b \in]0,1]$ alors f est continue en (a,b) donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap\mathbb{Q}$, $g(x) = f(x,b) = f(a,b) = g(a)$. Si maintenant $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, on prend une suite (x_n) de rationnels qui tendent vers x. Comme f est continue alors $g(a) = g(x_n) = f(x_n, b)$ tend vers $f(x,b) = g(x)$. Donc $g(a) = g(x)$. Nous avons montrer que g est localement constante au voisinage des point rationnels.

— Bilan : g est localement constante sur $\mathbb{R}$.

Comme $\mathbb{R}$ est connexe, alors g est constante sur $\mathbb{R}$. Donc f est constante sur $\mathbb{R}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Chapitre 2

Espace vectoriel normé

2.1 Norme et exemples

2.1.1 Définitions

La notion de norme généralise la notion de longueur dans le plan.

Définition 35

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.) On appelle *norme* sur E toute application $\|\cdot\|$ définie dans E vérifiant les conditions suivantes :

($\mathscr{N}_1$) $\forall x \in \mathbb{K} : \|x\| \geqslant 0$ (Positivité),

($\mathscr{N}_2$) $\|0\| = 0$ (Nullité à l'origine)

($\mathscr{N}_3$) $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$ (Séparation)

($\mathscr{N}_4$) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$. (Homogénéité)

($\mathscr{N}_6$) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ pour tout x et tout y de E. (Inégalité de convexité).

Définition 36

Un *espace vectoriel normé* est le couple $(E, \|\cdot\|)$.(en abrégé : « EVN »).

Remarque 4

Dans ($\mathbb{N}_4$), $|\lambda|$ désigne la valeur absolue de λ dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $|\lambda|$ désigne le module de λ.

Exemple 24

a) L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}$ muni de l'application « valeur absolue » $x \mapsto |x|$.

b) L'espace vectoriel $E = \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ muni de l'application « module » $x \mapsto |x|$.

c) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^\infty([a, b])$ muni de la norme :

$$\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x \in [a,b]} \|f(x)\|,$$

ou

$$\|f\|_2 \coloneqq \sqrt{\int_a^b f(x)^2 \, dx}$$

ou encore de la norme :

$$\|f\|_1 \coloneqq \int_a^b \|f(x)\|\, dx$$

est un espace vectoriel normé.

2.1.2 Les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &\coloneqq |x_1| + \cdots + |x_n| \\ \|x\|_2 &\coloneqq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \\ \|x\|_\infty &\coloneqq \max(|x_1|, \cdots, |x_n|). \end{aligned}$$

Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 37

Deux normes N_1 et N_2 sur E sont appelées normes équivalentes s'il existe deux constantes $a, b > 0$ telles que, pour tout $x \in E$,

$$aN_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant bN_1(x).$$

Remarque 5

L'équivalence des normes est une relation d'équivalence.

Proposition 40

Sur $\mathbb{R}^n$ les trois normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

Démonstration:

Démontrons que $\forall x \in E$,

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty. \tag{2.1}$$

1.

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \max(|x_1|, \cdots, |x_n|) \\ &= |x_j| (\text{où } j \text{est tel que } |x_j| = \|x\|_\infty) \\ &\leqslant \sqrt{((x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2} = \|x\|_2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \|x\|_2^2 &= (x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2 \\ &\leqslant (x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j \\ &= (|x_1| + \cdots + |x_n|)^2 = \|x\|_1^2. \end{aligned}$$

Donc $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$

3.

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + \cdots + |x_n| \\ &\leqslant n\max(|x_1|, \cdots, |x_n|) \\ &\leqslant n\|x\|_\infty. \end{aligned}$$

2.1.3 Distance associée à une norme

Définition 38

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, l'application :

$$\begin{aligned} d : E \times E &\to \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\to (x, y) = \|x - y\| . \end{aligned}$$

vérifie les propriétés suivantes :

Séparation $\forall (x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Symétrie $\forall (x, y) \in E^2$, $d(x, y) = d(y, x)$.

Inégalité du triangle $\forall (x, y, z) \in E^3$, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Invariance par translation $d(x + a, y + a) = d(x, y)$.

On dit que d est la *distance* associée à la norme $\|\cdot\|$ sur E.

Remarque 6

Tout espace vectoriel normé est donc un espace métrique (avec la distance issue de sa norme). De plus :

— la distance est invariante par translation :

$$d(x - a, y - a) = d(x, y).$$

— une homothétie de rapport λ multiplie la distance par $|\lambda|$:

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y).$$

Définition 39

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, on appelle

1. *boule ouverte* de centre $a \in E$ et de rayon $r \geqslant 0$ l'ensemble

$$B(a, r) = \{x \in E;\ \|x - a\| < r\}.$$

2. *Boule fermée* de centre $a \in E$ et de rayon $r \geqslant 0$ l'ensemble

$$\bar{B}(a, r) = \{x \in E;\ \|x - a\| \leqslant r\}.$$

3. *Sphère* de centre $a \in E$ et de rayon $r \geqslant 0$ l'ensemble

$$S(a, r) = \{x \in E;\ \|x - a\| = r\}.$$

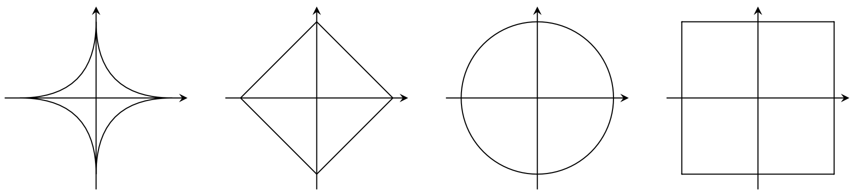
Exercice 5

Dessiner les boules ouverte correspondantes à la norme $\|\cdot\|_p$ pour $p = \frac{1}{2}$, $p = 1$, $p = 2, p = \infty$

Correction:

Par symétrie, on se rapporte au premier cadran.

1. Pour $p = \frac{1}{2}$; on trace la courbe $y = (1 - \sqrt{x})^2$.
2. Pour $p = 1$; on se ramène à la droite d'équation $y = 1 - x$.
3. Pour $p = 2$; on reconnaît le cercle unité.
4. Pour $p = \infty$; par symétrie par rapport à la première bissectrices ; on arrive à deux cas de figure.



$p = \frac{1}{2}$ $p = 1$ $p = 2$ $p = \infty$

Remarque 7

Pour tout sous-ensemble B de E et pour tout $a \in E$ on note $a + B \coloneqq \{a + x | x \in B\}$. Alors on a $B(a, r) = a + B(0, r)$ et $\bar{B}(a, r) = a + \bar{B}(0, r)$. De plus on a toujours $B(a, r) \subset \bar{B}(a, r)$.

Définition 40

On dit qu'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est *de Banach* si E est complet pour la distance associée à $\|\cdot\|$.

Exemple 25

$\mathbb{Q}$ muni de la distance usuelle dans $\mathbb{R}$ n'est pas complet, car il existe dans $\mathbb{Q}$ une suite de Cauchy non convergente.

Théorème 9

$\mathbb{R}$ est complet.

Remarque 8

On admet qu'il existe un ensemble $\mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés algébriques usuelles et l'axiome de la borne sup.

Démonstration:

Soient $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots,\}$, $a_n = \inf A_n$, $b_n = \sup A_n$. On a $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, car A_n est borné.
Clairement, $a_n \leqslant b_n$, (a_n) est croissante, (b_n) décroissante.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un n_0 tel que $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ si $n, m \geqslant n_0$. Pour $n \geqslant n_0$, on a donc $A_n \subset [x_{n_0} - \varepsilon/2, x_{n_0} + \varepsilon/2]$, ce qui implique $x_{n_0} - \varepsilon/2 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant x_{n_0} + \varepsilon/2$; d'où $b_n - a_n \leqslant \varepsilon$. Il s'ensuit que les suites (a_n), (b_n) sont adjacentes. Par conséquent, il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \to a$, $b_n \to a$. Comme $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$, on trouve $x_n \to a$.

Exemples de boules

— Dans $\mathbb{R}$ on a

$$B(a, r) =]a - r, a + r[\text{et} \qquad \bar{B}(a, r) = [a - r, a + r]$$

— Dans $\mathbb{R}^n$, comme $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant n \|x\|_\infty$, on a :

$$B_\infty(a, \frac{r}{n}) \subset B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r)$$

(on a mêmes inclusions pour les boules fermées).

Proposition 41

Les boules d'un espace vectoriel normé sont *convexes* : si $a \in E$ et $r \geqslant 0$,

$$\forall (x, y) \in B(a, r),\ \forall \lambda \in [0, 1],\ \lambda x + (1 - \lambda) y \in B(a, r).$$

Définition 41

Une partie A de l'espace vectoriel normé E est dite *bornée* s'il existe $M \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in A$, $\|x\| \leqslant M$. Une fonction $f : X \to E$ est dite *bornée* si son image $f(X)$

est bornée dans $(E, \|\cdot\|)$. Si $(E_1, N_1), \ldots, (E_p, N_p)$ sont des p espaces vectoriels normés, on définit une norme sur $E_1 \times \cdots \times E_p$ en posant

$$N\big((x_1, \ldots, x_p)\big) = \max\big(N_1(x_1), \ldots, N_p(x_p)\big).$$

Elle est appelée la *norme produit.*

2.2 Suites dans un espace vectoriel normé

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition 42

1. Une suite (u_n) de $(E, \|\cdot\|)$ est dite bornée s'il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leqslant M$.
2. Une suite (u_n) de $(E, \|\cdot\|)$ est dite convergente vers $\ell \in E$ si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$
3. Une suite qui n'est convergente vers aucun $\ell \in E$ est dite divergente.

On a les propriétés classiques suivantes :

Proposition 42

1. Si (u_n) est une suite convergente vers ℓ et vers ℓ', alors $\ell = \ell'$. On appelle cet élément de E la limite de la suite (u_n). (unicité de la limite).
2. Toute suite convergente est bornée.
3. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites de E convergeant respectivement vers ℓ et vers ℓ', alors pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^2$, $(\alpha u_n + \beta v_n)$ converge vers $\alpha\ell + \beta\ell'$.
4. Soient $(E_1, N_1), \ldots, (E_p, N_p)$ des espaces vectoriels normés et soit N la norme produit sur $E = E_1 \times \cdots \times E_p$. Soit $(u_n) = (u_n^1, \ldots, u_n^p)$ une suite de E. Alors (u_n) converge dans E pour la norme N si et seulement si, pour chaque $i = 1, \ldots, p$, (u_n^i) converge dans E_i pour la norme N_i.

Soit (u_n) une suite de E et soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. La suite $(u_{\varphi(n)})$ s'appelle *suite extraite* de (u_n).

Proposition 43

Soit (u_n) une suite de E.

1. Toute suite extraite d'une suite extraite de (u_n) est une suite extraite de (u_n).
2. Si (u_n) converge vers ℓ, toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.
3. Si (u_n) admet une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers ℓ_1 et une suite extraite $(u_{\psi(n)})$ qui converge vers ℓ_2 avec $\ell_1 \neq \ell_2$, alors (u_n) est divergente.
4. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers le même $\ell \in E$, alors (u_n) converge vers ℓ.

Définition 43

On dit que ℓ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) s'il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers ℓ

2.3 Séries dans un espace vectoriel normé

Soit $(E, ||\cdot||_E)$ un `espace vectoriel normé` (EVN).

Définition 44

On appelle Série de terme général $u_n \in E$ la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de E tel que.

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

La série est Convergente dans $(E, ||\cdot||_E)$ si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans E : S c'est la somme de la série.

Définition 45

Une série $\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)$ est dite absolument convergente (AC) si la série $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_E$ est convergente dans $\mathbb{R}^+$.

Théorème 10

Si E est `complet` (espace de Banach), alors toute série AC est convergente et

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|.$$

Démonstration:

On a $S_N = \sum_{n=0}^{N} \|u_n\|$ est convergente $\Rightarrow (S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\forall\varepsilon > 0\ \exists K$ tel que.

$\forall N > P \geqslant K\ |S_k - S_p| \leqslant \varepsilon \Rightarrow \sum_{j=p+1}^{K} ||u_j|| \leqslant \varepsilon.$

Mais $\|S_N - S_p\| = \left\|\sum_{j=p+1}^{N} u_j\right\| \leqslant \sum_{j=p+1}^{N} \|u_j\|$ inégalité triangulaire.

$\Rightarrow N > P \geqslant K$: $\|S_N - S_P\| \leqslant \varepsilon \Rightarrow (S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E et donc convergente.

D'autre part $\|S_n\| = \left\|\sum_{j=0}^{n} u_j\right\| \leqslant \sum_{j=0}^{n} \|u_j\| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \|u_j\| \Rightarrow \left\|\sum_{j=0}^{\infty} u_j\right\| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \|u_j\|.$

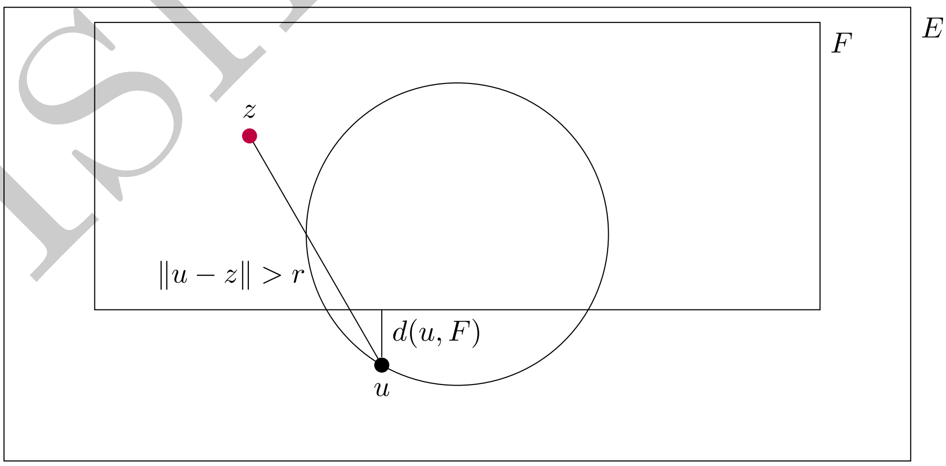
2.4 Espace vectoriel normé de dimension finie

Théorème 11 (Riesz)

Si dans un espace vectoriel normé la boule unité fermée est compacte, alors E est de dimension finie.

Lemme 4

Soit F un sous-espace fermé de E, différent de E. Alors pour tout réel $r \in]0, 1[$, il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $d(u, F) \geqslant r$.



Démonstration:

Soit $x \in E \setminus F$. On a $r \in]0,1[$ donc $\frac{1}{r}d(x,F) > d(x,F)$. Alors $\exists\, y \in F$ tel que $\|x-y\| \leq \frac{d(x,F)}{r}$. Posons $u = \frac{1}{\|x-y\|}(x-y)$. On a bien $\|u\| = 1$ et $d(u,F) \geqslant r$ car pour tout $z \in F$:

$$\begin{aligned} \|u-z\| &= \left\| \frac{1}{\|x-y\|}(x-y) - z \right\| \\ &= \frac{1}{\|x-y\|} \left\| x - y - \|x-y\|z \right\| \\ &\geq \frac{1}{\|x-y\|} d(x,F) \quad \text{puisque } y + \|x-y\|z \in F \end{aligned}$$

Donc $\|u-z\| \geqslant r$.

Démonstration:

(du théorème de Riesz) Par contraposition, supposons E de dimension infinie. On cherche à construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bornée, sans valeur d'adhérence. On en déduira le théorème. On construit (u_n) telle que :

1. $\forall n, \quad \|u_n\| = 1$
2. $\forall n, m,\ n \neq m \Rightarrow \|u_n - u_m\| \geq \frac{1}{2}$

On choisit u_0 de norme 1, puis par récurrence on définit u_{n+1} grâce au lemme appliqué à F_n le sous espace vectoriel engendré par $u_0 \cdots, u_n$.

2.5 Espaces de suites ℓ^p

Définition 46

Soit $1 \leqslant p < \infty$ un réel. On appelle ℓ^p (noté aussi $\ell^p(\mathbb{N})$)l'ensemble de suites suivant :

$$\left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{K} \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\right\}$$

On définit l'application $\|.\|_p : \ell^p \to [0, +\infty[$ par

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p, \|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$$

Il n'est pas clair à première vue que ℓ^p est un espace vectoriel, lorsque $p > 1$. Efforçons de montrer des résultats permettant une preuve courte de cela, tout en délivrant des résultats simplifiant la démonstration du fait que l'application $\|.\|_p$ définit une norme sur ℓ^p. Nous aurons besoin d'une première inégalité célèbre afin de prouver ce résultat.

2.5.1 Inégalités usuelles dans un EVN

Inégalité de Hölder

Théorème 12 (Inégalité de Hölder)

Soient $n \geq 1$ un nombre naturel, $p, q > 1$ deux réels conjugués, c'est-à-dire vérifiant l'égalité :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k \cdot y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Démonstration:

Elle s'effectue en deux étapes

Étape 1 **:** Pour tous réels $a, b > 0$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$a \cdot b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{2.2}$$

Il est aisé de vérifier, à l'aide de la dérivation, que la fonction ln : $]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ est concave, c'est-à-dire :

$$\forall t \in [0, 1], \forall x, y > 0, \ln(tx + (1-t)y) \geq t\ln(x) + (1-t)\ln(y)$$

Puisque $p, q > 1$, on a :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) &\geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)\\ &= \ln(a) + \ln(b)\\ &= \ln(a \cdot b)\end{aligned}$$

Étant donné que la fonction exponentielle est croissante, on a bien l'inégalité 2.2.

Étape 2 : Soient $x = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}, y = (y_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$. Supposons que tous les deux non nuls, puisque dans ce cas, l'inégalité du théorème est claire.

On pose, pour $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{cases} A_j = & \frac{|x_j|}{\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \\ B_j = & \frac{|y_j|}{\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \end{cases}$$

Ces quotients sont bien définis car x et y sont non nuls. Par l'inégalité (2.2), on a que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n \frac{|x_j|}{\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|y_j|}{\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right) &= \sum_{j=1}^n A_j \cdot B_j \\ &\leqslant \frac{1}{p}\sum_{j=1}^n A_j^p + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^n B_j^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

Ce qui implique le résultat.

Introduisons maintenant une autre inégalité célèbre qui nous permettra de montrer que ℓ^p est un espace vectoriel.

Théorème 13 (Inégalité de Minkowski (dimension finie))

Soient $n \geq 1$ un nombre naturel, $p \in [1, +\infty[$ un nombre réel, $x = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}, y = (y_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$.
L'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

Démonstration:

Supposons x, y non nuls, sinon le résultat est clair.

Si $p = 1$, il suffit d'itérer l'inégalité triangulaire pour le module afin de prouver l'assertion. Supposons par conséquent que $p > 1$.

Remarque : Cette preuve est fort calculatoire. Elle n'a pas vraiment d'intérêt au niveau des idées.

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \\ &\leqslant \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1}(|x_k| + |y_k|) \\ &= \sum_{k=1}^n |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k||x_k + y_k|^{p-1} \end{aligned}$$

Soit q le réel conjugué de p. En appliquant l'inégalité de Hölder au dernier terme de l'inégalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p^p &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}(\|x\|_p+\|y\|_p)\\ &=\left(\|x+y\|_p^p\right)^{\frac{1}{q}}(\|x\|_p+\|y\|_p)\end{aligned}$$

Ceci implique l'inégalité nous permettant de conclure :

$$\begin{aligned}\|x\|_p+\|y\|_p &\geq \left(\|x+y\|_p^p\right)^{1-\frac{1}{q}}\\ &=\|x+y\|_p.\end{aligned}$$

Le résultat se généralise facilement aux espaces ℓ^p, et nous avons donc en même temps l'argument le plus important de la preuve que ℓ^p est un espace vectoriel, mais également l'inégalité triangulaire pour la norme $\|.\|_p$.

Théorème 14 (Inégalité de Minkowski (Généralisation à ℓ^p))

Soient $p \in [1,+\infty[$ un nombre réel, $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$.
On a : $\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p+\|y\|_p$

Démonstration:

Étant donné qu'on a le résultat pour toutes les suites de sommes partielles, il suffit de passer à la limite pour conclure.

Exercice 6

Rédiger en détail la preuve des affirmations suivantes :

— L'ensemble ℓ^p est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

— L'application $\|.\|_p$ définit bien une norme sur ℓ^p.

Proposition 44

Soit $p>1$ un nombre réel. L'espace vectoriel normé $(\ell^p, \|.\|_p)$ est un espace de Banach.

Exercice 7

Effectuer la preuve de la proposition 44

Nous n'effectuerons pas la preuve dans cette section, elle est laissée à titre d'exercice. Nous allons toutefois montrer le cas $p=1$. Les idées mises en oeuvre dans cette preuve sont intéressantes et il est conseillé de les revoir.

Proposition 45

L'espace vectoriel normé $(\ell^1, \|.\|_1)$ est un espace de Banach.

Démonstration:

Soit $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\left(x_k^{(n)}\right)_k\right)_n$ [1] une suite de Cauchy dans $(\ell^1, \|.\|_1)$. Montrons qu'elle est convergente au sens de la norme $\|.\|_1$.

En traduisant l'hypothèse sur la suite, il est aisé de déduire que pour tout $k\in\mathbb{N}$, la suite $(x_k^{(n)})_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ qui est complet. Soit $x_k\in\mathbb{K}$ la limite de cette suite dans $\mathbb{K}$.

Nous avons ainsi obtenu un candidat limite $x=(x_k)_k$. Nous devons montrer qu'il s'agit bien d'un élément de ℓ^1 et qu'il s'agit de la limite de la suite $(x^{(n)})_n$.

1. On note en indice la "composante" dans ℓ^1 et en exposant l'indice de la suite

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(x^{(n)})$ est de Cauchy, il est vrai que :

$$\exists N \geq 0, \forall p, q \geq N, \forall n \geq 0, \sum_{k=0}^{n} |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| \leqslant \varepsilon$$

En faisant tendre $q \to +\infty$, on en déduit que :

$$\exists N \geq 0, \forall p \geq N, \forall n \geq 0, \sum_{k=0}^{n} |x_k^{(p)} - x_k| \leqslant \varepsilon$$

Ce qui permet facilement de conclure que $x^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|_1} x$

Pour montrer que $x \in \ell^1$, il suffit d'observer l'inégalité suivante, valable pour tous naturels n, N considérés.

$$\sum_{k=0}^{N} |x_k| \leqslant \sum_{k=0}^{N} |x_k - x_k^{(n)}| + \sum_{k=0}^{N} |x_k^{(n)}| \leqslant \|x - x^{(n)}\|_1 + \|x^{(n)}\|_1$$

Au vu de la convergence que nous venons d'établir, le premier terme du membre de droite converge vers 0. Le second quant à lui est borné par une constante indépendante de n car il s'agit d'un élément d'une suite de Cauchy. Ceci implique que la série définissant $\|x\|_1$ est bien convergente.

Il reste encore un espace lié aux espaces ℓ^p que nous n'avons pas introduit : l'espace des suites ℓ^∞.

Définition 47

L'espace des suites bornées, noté ℓ^∞ correspond à l'ensemble suivant :

$$\ell^\infty = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$$

Remarque 9

Il est utile de remarquer que 1 et ∞ sont conjugués.

Exercice 8

Montrer que l'application suivante définit bien une norme sur ℓ^∞ :

$$: (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

Il s'agit bien d'un espace de Banach. Cela fait l'objet du résultat suivant :

Proposition 46

L'espace vectoriel $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

La preuve est fortement similaire à celle pour l'espace de suites ℓ^1. Elle sera tout de même explicitée afin de permettre la lecture d'une version adaptée de la preuve ci-dessus.

Démonstration:

Soit $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(x_k^{(n)}\right)_k\right)_n$ une suite de Cauchy dans $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$. Montrons qu'elle est convergente au sens de la norme $\|.\|_\infty$.

En traduisant l'hypothèse sur la suite, il est aisé de déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(x_k^{(n)})_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ qui est complet. Soit $x_k \in \mathbb{K}$ la limite de cette suite dans $\mathbb{K}$.

Nous avons ainsi obtenu un candidat limite $x = (x_k)_k$. Nous devons montrer qu'il s'agit bien d'un élément de ℓ^∞ et qu'il s'agit de la limite de la suite $(x^{(n)})_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(x^{(n)})$ est de Cauchy, il est vrai que :

$$\exists N \geq 0, \forall p, q \geq N, \forall k \geq 0, |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| \leqslant \varepsilon$$

En faisant tendre $q \to +\infty$, on en déduit que :

$$\exists N \geq 0, \forall p \geq N, \forall k \geq 0, |x_k^{(p)} - x_k| \leqslant \varepsilon$$

Ce qui permet facilement de conclure que $x^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|_\infty} x$

Pour montrer que $x \in \ell^\infty$, il suffit d'observer l'inégalité suivante, valable pour tous naturels n, k considérés.

$$|x_k| \leqslant |x_k - x_k^{(n)}| + |x_k^{(n)}| \leqslant \|x - x^{(n)}\|_\infty + \|x^{(n)}\|_\infty$$

Au vu de la convergence que nous venons d'établir, le premier terme du membre de droite converge vers 0. Le second quant à lui est borné par une constante indépendante de n car il s'agit d'un élément d'une suite de Cauchy. Ceci implique que la suite des $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc que $x \in \ell^\infty$.

2.6 Espace fonctionnel

2.6.1 Définitions et propriétés

Un autre exemple d'espace de Banach dont nous avons les outils pour montrer la complétude est l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$. Tout ce qui suit dans cette section peut être généralisé aux fonctions définie sur un intervalle fermé borné quelconque.

Définition 48

On note

$$\mathscr{C}([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{K} \text{ continue}\}$$

l'espace vectoriel de fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$. On le munit de la norme $\|.\|_\infty$ définie par :

$$\|.\|_\infty : \mathscr{C}([0,1]) \to [0, +\infty[\; : f \mapsto \|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

Le maximum apparaissant dans la norme est bien défini, car les fonctions considérées sont continues sur un compact et atteignent donc leurs bornes.

Proposition 47

L'espace $\mathscr{C}([0,1])$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$ est complet au sens de la norme $\|.\|_\infty$.

Démonstration:

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{C}([0,1])$. En retraduisant cette hypothèse en remplaçant le maximum définissant $\|.\|_\infty$ par un quantificateur universel, on obtient la phrase quantifiée suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \forall x \in [0,1], |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon \tag{2.3}$$

On remarque que pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ qui est complet. Il existe donc f limite ponctuelle de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour conclure, il suffit de montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de $\|.\|_\infty$ vers f. Cela garantira la continuité de f, car f sera la limite uniforme de la suite.

En faisant $q \to \infty$ dans la phrase quantifiée 2.3, on a le résultat.

2.7 Exercices :

Exercice 1

Soient E, F des espaces normés et $A_n, A \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer l'équivalence entre :

1. $A_n \to A$ dans $\mathcal{L}(E, F)$.
2. Pour toute partie bornée $M \subset E$, la suite $A_n x$ converge uniformément vers Ax, $x \in M$.

Correction:

1. (1) $\Rightarrow$ (2). Supposons que A_n converge vers A dans $\mathcal{L}(E, F)$. Soit $M \subset E$ une partie bornée, notons M sa borne (c'est-à-dire pour tout $x \in M$, $\|x\| \leqslant B$). Alors

$$\begin{array}{ll} & \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \|A_n - A\| \leqslant \dfrac{\epsilon}{B} \\ \Rightarrow & \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in M \quad \|A_n(x) - A(x)\| \leqslant \dfrac{\epsilon\|x\|}{B} \\ \Rightarrow & \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in M \quad \|A_n(x) - A(x)\| \leqslant \epsilon \end{array}$$

Ce qui exactement la convergence uniforme de A_n vers A sur M.

2. (2) $\Rightarrow$ (1). Par définition de la norme d'un opérateur nous avons $\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A_n(x) - A(x)\|$. Prenons comme partie bornée la sphère unité :

$$M = S(0,1) = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}.$$

Alors :

$$\begin{array}{ll} & \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in S(0,1) \in \|A_n(x) - A(x)\| \leqslant \epsilon \\ \Rightarrow & \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \|A_n - A\| \leqslant \epsilon \end{array}$$

Donc $\|A_n - A\|$ tend vers 0.

$h_n(x) = -1$ si $x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$ et h_n est

Exercice 2

$(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que dans ce cas la boule fermée $B'(a, r)$ est l'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$.
2. Montrer que $\overline{B}(a, r) \subset \overline{B}(b, R) \Longleftrightarrow r \leqslant R$ et $||a - b|| \leqslant R - r$.

Correction:

1. On note $B = B(a, r)$, $B' = B'(a, r)$, $\bar{B} = \overline{B(a, r)}$. Il faut montrer $B' = \bar{B}$. B' est une boule fermée, donc un fermé contenant B, alors que $\bar{B}$ est le plus petit fermé contenant B, donc $\bar{B} \subset B'$.
Étudions l'inclusion inverse : soit $x \in B'$, il faut montrer $x \in \bar{B}$. Si $x \in B$ alors $x \in \bar{B}$, supposons donc que $x \notin B$, alors $\|x - a\| = r$. Soit $B(x, \varepsilon)$ un boule centrée en x. x est adhérent à B si $B(x, \varepsilon) \cap B$ est non vide quelque soit $\varepsilon > 0$. Fixons $\varepsilon > 0$ et soit le point
$$y = x - \frac{\varepsilon}{2} \frac{x - a}{\|x - a\|}.$$
Faire un dessin et placer y sur ce dessin. D'une part $y \in B(x, \varepsilon)$ car $\|y - x\| = \varepsilon/2 < \varepsilon$. D'autre part $y \in B = B(a, r)$ car $\|y - a\| = \|x - a - \frac{\varepsilon}{2} \frac{x-a}{\|x-a\|}\| = \|x - a\|(1 - \frac{\varepsilon}{2\|x-a\|}) = r - \frac{\varepsilon}{2} < r$. Donc $y \in B \cap B(x, \varepsilon)$, ce qui prouve que $B' \cap \bar{B}$. Donc $B' = \bar{B}$.

2. Pour le sens $\Leftarrow$. Soit $x \in \bar{B}(a,r)$ alors $\|x-b\| = \|x-a+a-b\| \leqslant \|x-a\|+\|a-b\| \leqslant r+R-r \leqslant R$, donc $x \in \bar{B}(b,R)$.
Pour le sens $\Rightarrow$. Soit
$$x = a + r\frac{a-b}{\|a-b\|},$$
alors $\|x-a\| = r$ donc $x \in \bar{B}(a,r)$, donc $x \in \bar{B}(b,R)$, donc $\|x-b\| \leqslant R$ or $\|x-b\| = \|a-b\|+r$ (c'est le même calcul que pour la question précédente). Donc $\|a-b\|+r \leqslant R$, soit $0 \leqslant \|a-b\| \leqslant R-r$ et en particulier $r \leqslant R$.

Exercice 3

1. Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $||(x,y)|| = \max(|x+y|, |x-2y|)$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}^2$ et dessiner sa boule unité fermée.
2. Soit p, q deux normes sur $\mathbb{R}^n$, B_p et B_q leurs boules unités fermées. Montrer que
$$B_q \subset B_p \Longleftrightarrow p \leqslant q.$$
Que signifie $\frac{1}{2}B_p \subset B_q \subset 2B_p$? Exemples.

Correction:

1. (a) Si $||(x,y)|| = 0$ alors $\max(|x+y|, |x-2y|) = 0$ donc $x+y=0$ et $x-2y=0$ donc $x=0$ et $y=0$. Réciproquement $\|(0,0)\| = 0$.

   (b)
$$\begin{aligned}||\lambda.(x,y)|| &= ||(\lambda x, \lambda y)|| \\ &= \max(|\lambda x + \lambda y|, |\lambda x - 2\lambda y|) \\ &= |\lambda| \max(|x+y|, |x-2y|) = |\lambda|.||(x,y)||\end{aligned}$$

   (c)
$$\begin{aligned}\|(x,y)+(x',y')\| &= \|(x+x', y+y')\| \\ &= \max(|x+x'+y+y'|, |x+x'-2y-2y'|) \\ &\leqslant \max(|x+y|+|x'+y'|, |x-2y|+|x'-2y'|) \\ &\leqslant \max(|x+y|, |x-2y|) + \max(|x'+y'|, |x'-2y'|) \\ &\leqslant ||(x,y)|| + ||(x',y')||\end{aligned}$$

   La boule unité fermée centrée à l'origine est la région du plan comprise entre les droites d'équations $x+y=+1$, $x+y=-1$, $x-2y=+1$, $x-2y=-1$.
2. Sens $\Leftarrow$: Si $x \in B_q$ alors $q(x) \leqslant 1$ donc $p(x) \leqslant 1$ donc $x \in B_p$. Sens $\Rightarrow$: Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ alors $q(\frac{x}{q(x)}) = 1$ donc $\frac{x}{q(x)} \in B_q$ donc $\frac{x}{q(x)} \in B_p$ donc $p(\frac{x}{q(x)}) \leqslant 1$ soir $p(x) \leqslant q(x)$. Ceci étant aussi valable pour $x=0$.
$B_q \subset 2B_p$ est équivalent à $p(x) \leqslant 2q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (attention au sens !). Et $\frac{1}{2}B_p \subset B_q$ est équivalent à $\frac{1}{2}q(x) \leqslant p(x)$. Si les deux inclusions sont vraies alors $\frac{1}{2}p \leqslant q \leqslant 2p$ et en particulier les normes p et q sont équivalentes.
Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, $\|.\|_\infty$ On a
$$B_1 \subset B_2 \subset B_\infty \subset 2B_1 \subset 2B_2 \subset \cdots$$

Exercice 4

Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \ ; \ f(0)=0\}$. On pose
$$||f|| = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)+f'(x)|, \text{ et } N(f) = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)| + \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f'(x)|.$$
Montrer que ce sont deux normes équivalentes sur E.

Indication:

Montrer

- $\|f\| \leqslant N(f)$;
- $\|f'\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f\|$;
- $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|$.

Correction:

Par l'inégalité triangulaire $|f(x)+f'(x)| \leqslant |f(x)|+|f'(x)|$ on obtient $\|f\| \leqslant N(f)$. Pour une inégalité dans l'autre sens décomposons le travail :

- $\|f'\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f\|$: en effet par l'inégalité triangulaire $|f'(x)| \leqslant |f(x)|+|f'(x)+f(x)|$.
- $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|$: en effet f est continue sur $[0,1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes. Soit $x_0 \in [0,1]$ ce point du maximum. Si $x_0 \in]0,1[$ alors $f'(x_0) = 0$ donc $\|f\|_\infty = |f(x_0)| = |f(x_0) + f'(x_0)| \leqslant \|f\|$. Si $x_0 = 1$ alors f et f' ont même signe sur un intervalle $[1-\varepsilon, 1]$ donc sur cet intervalle $|f(x)| \leqslant |f(x) + f'(x)|$ et donc $\|f\|_\infty = |f(1)| \leqslant \|f\|$. (Enfin $f(0) = 0$ donc si $x_0 = 0$ alors f est nulle et l'inégalité est triviale.)
- Il reste à rassembler les expressions :

$$N(f) = \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f\| + \|f\|_\infty \leqslant 3\|f\|.$$

(La première inégalité vient du premier point et la deuxième du second.)

Les normes $\|f\|$ et $N(f)$ sont équivalentes :

$$\frac{1}{3}N(f) \leqslant \|f\| \leqslant N(f).$$

Exercice 5

1. Montrer que $||f||_\infty = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|$ et $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$ sont deux normes sur $C([0,1],\mathbb{R})$. Sont-elles équivalentes ?
2. Les deux métriques associées sont-elles topologiquement équivalentes ?

Indication:

- Montrer $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$.
- Par un contre-exemple, montrer qu'il n'existe aucune constante $C > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_1$ pour tout f.

Correction:

1. $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty dt \leqslant \|f\|_\infty$. Donc $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$ Par contre il n'existe aucune constante $C > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_1$ pour tout f. Pour montrer ceci par l'absurde, supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_1$ pour tout f de $C([0,1],\mathbb{R})$. Regardons les fonctions f_k définies par $f_k(x) = 2k(1-kx)$ si $x \in [0, \frac{1}{k}]$ et $f_k(x) = 0$ si $x > \frac{1}{k}$. Alors $f_k \in C([0,1],\mathbb{R})$ et $\|f_k\|_\infty = 2k$ alors que $\|f_k\|_1 = 1$. On obtient $2k \leqslant C.1$ ce qui est contradictoire pour k assez grand. Cela prouve que les normes ne sont pas équivalentes.
2. Comme les métriques sont définies par des normes et que les normes ne sont pas équivalentes alors les métriques ne définissent pas la même topologie.

Exercice 6

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Comparer les normes suivantes :

1. $N_1(f) = ||f||_\infty$,

2. $N_2(f) = ||f||_\infty + ||f||_1$,
3. $N_3(f) = ||f'||_\infty + ||f||_\infty$,
4. $N_4(f) = ||f'||_1 + ||f||_\infty$.

Indication:

Les seules relations sont :

$$N_1 \leqslant N_2 \leqslant 2N_1 \leqslant 2N_4 \leqslant 2N_3.$$

Correction:

1. On montre facilement

$$N_1 \leqslant N_2 \leqslant 2N_1 \leqslant 2N_4 \leqslant 2N_3.$$

2. Par contre il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_3 \leqslant CN_4$ ou $N_2 \leqslant CN_4$. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que $N_3 \leqslant CN_4$ on regarde f_k définie par $f_k(x) = x^k$, après calcul on obtient $N_3(f_k) = k+1$ et $N_4(f_k) = 2$, pour k suffisamment grand on obtient une contradiction. Comme N_1 et N_2 sont équivalentes on va prouver qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_3 \leqslant CN_1$. On prend g_k, définie par $g_k(x) = 1 + \sin(2\pi kx)$. Alors $N_1(g_k) = 2$ et $N_3(g_k) = 4k$, ce qui prouve le résultat souhaité.

2.8 Applications linéaires continues

Proposition 48

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés. Pour une application *linéaire* $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
a) f continue ;
b) f continue en 0 ;
c) il existe un $C > 0$ tel que $\|f(x)\|_F \leqslant C\,\|x\|_E$, $\forall\, x \in E$.
Si, *de plus*, E est *de dimension finie*, alors toute application linéaire $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ est continue.

Démonstration:

« a)$\Longrightarrow$b) » Évident.
« b)$\Longrightarrow$c) » Il existe un $\delta > 0$ tel que $\|x - 0\|_E < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(0)\|_F < 1$. Si $x \in E\backslash\{0\}$, on a $\|y\|_E < \delta$, où $y = \dfrac{\delta}{2\,\|x\|_E}x$. Donc $\|f(x)\|_F = \dfrac{2\,\|x\|_E}{\delta}\,\|f(y)\|_F \leqslant \dfrac{2}{\delta}\,\|x\|_E$.
Cette égalité étant clairement vérifiée si $x = 0$, on retrouve c) avec $C = \dfrac{2}{\delta}$.
« c)$\Longrightarrow$a) » On a $\|f(x) - f\|_F = \|f(x-y)\|_F \leqslant C\,\|x - y\|_E$; f est C-lipschitzienne, donc continue.
Pour la dernière propriété, on fixe une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E. Si $x = x_1e_1 + \ldots x_ne_n$, on vérifie aisément que $x \to \|x\|_1 = |x_1| + \ldots |x_n|$ est une norme sur E. Il suffit de vérifier la continuité par rapport à cette norme. On a

$$\begin{aligned}\|f(x)\|_F &= \|f(x_1e_1 + \ldots x_ne_n)\|_F\\ &\leqslant |x|_1\,\|f(e_1)\|_F + \ldots |x_n|\,\|f(e_n)\|_F \leqslant C\,\|x\|_1\,,\end{aligned}$$

où $C = \max\{\|f(e_1)\|_F, \ldots, \|f(e_n)\|_F\}$.

Corollaire 8

Si $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ est linéaire et continue, alors il existe une *plus petite constante* $C \geqslant 0$ telle que $\|f(x)\|_F \leqslant C\,\|x\|_E$, $\forall\, x \in E$. De plus, on a

$$C = \sup_{x \in E : x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E : \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \in E : \|x\|_E \leqslant 1} \|f(x)\|_F\,.$$

Démonstration:

L'ensemble $F = \{K \geqslant 0 \,;\, \|f(x)\|_F \leqslant K\,\|x\|_E, \forall\, x \in E\}$ est non vide et minoré par 0. Par conséquent, $C = \inf F \in F$ existe. Il est immédiat que cette constante C est la constante désirée et qu'elle est donnée par la première formule. La deuxième et troisième formule suivent de l'observation que $\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \dfrac{\|f(\lambda x)\|_F}{\|\lambda x\|_E}$, pour tout $\lambda \neq 0$. On a $A_2 \subset A_1$, et donc $\sup A_2 \leqslant \sup A_1$. Si $\|x\|_E \leqslant 1$, alors $x = \lambda y$ pour un $\lambda \in [0, 1]$ et un y tel que $\|y\|_E = 1$ (si $x \neq 0$, prendre $\lambda = \|x\|_E$ et $y = \dfrac{1}{\|x\|_E}x$; si $x = 0$, $\lambda = 0$ et n'importe quel y conviennent). On a donc $\|f(x)\|_F = \lambda\,\|f(y)\|_F \leqslant \sup A_2$. Par passage au sup, on trouve $\sup A_1 \leqslant \sup A_2$; d'où $\sup A_2 = \sup A_1$.
Par ailleurs, si $x \neq 0$, alors $\|y\|_E = 1$, où $y = \dfrac{1}{\|x\|_E}x$. Comme $\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \dfrac{\|f(y)\|_F}{\|y\|_E}$, on a $A_3 \subset A_2$. Comme on a aussi $A_2 \subset A_3$, on trouve que $A_2 = A_3$. Il s'ensuit que $\sup A_1 = \sup A_2 = \sup A_3$.
Si $x \neq 0$, on a $\|f(x\| = \|x\|_E\,\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant \sup A_3\,\|x\|_E$; cette inégalité est encore valable si $x = 0$. On obtient $C \leqslant \sup A_3$. Par ailleurs, on a $\|f(x)\|_F \leqslant C$ si $\|x\|_E = 1$; par passage au sup, on trouve $\sup A_2 \leqslant C$. Finalement, $C = \sup A_j$, $j = 1, 2, 3$.

Définition 49

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés. On note

$$\mathscr{L}(E,F) = \{f : E \to F \;;\, f \text{ linéaire et continue}\}.$$

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, la constante C de la proposition précédente est notée $\|f\|_{\mathscr{L}(E,F)}$, ou tout simplement $\|f\|$. Dans le cas particulier où $F = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, on écrit E' au lieu de $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$; E' est le *dual* de E. Si $f \in E'$, on appelle f une *forme linéaire continue sur* $\mathbb{R}$.

Proposition 49

$\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel réel et $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur $\mathscr{L}(E,F)$.

Proposition 50

Si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace normé et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace *de Banach*, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace de Banach.

Démonstration:

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $\mathscr{L}(E,F)$.

1. Trouvons d'abord le candidat à la limite. Par définition d'une suite de Cauchy, nous avons :
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \geqslant N \quad \|f_p - f_q\| < \epsilon.$$
Fixons $x \in E$, alors
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \geqslant N \quad \|f_p(x) - f_q(x)\|_F < \epsilon\|x\|_E.$$
Quitte à poser $\epsilon = \frac{\epsilon'}{\|x\|}$ (x est fixé !, si $x = 0$ c'est trivial) alors on a montrer :
$$\forall \epsilon' > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \geqslant N \quad \|f_p(x) - f_q(x)\|_F < \epsilon'.$$
Donc la suite $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy de F. Comme F est complet alors cette suite converge, notons $f(x)$ sa limite.
2. Nous avons construit une fonction $f : E \longrightarrow F$. Montrons que f est dans l'espace $\mathscr{L}(E,F)$, c'est-à-dire que f est linéaire. Comme pour tout n, f_n est linéaire alors, pour tout $x, y \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a
$$f_n(\lambda x + \mu y) = \lambda f_n(x) + \mu f_n(y).$$
A la limite ($n \to +\infty$) nous avons
$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y),$$
donc f est dans $\mathscr{L}(E,F)$.
3. Il reste à montrer que (f_n) converge bien vers f (ce qui à priori n'est pas évident). Revenons à la définition d'une suite de Cauchy (écrit d'une façon un peu différente) :
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p \geqslant N \quad \forall k \geqslant 0 \quad \|f_p - f_{p+k}\| < \epsilon.$$
Lorsque l'on fixe p et que l'on fait tendre k vers $+\infty$ alors $f_p - f_{p+k}$ tend vers $f_p - f$. Donc en passant à la limite nous avons :
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p \geqslant N \quad \|f_p - f\| < \epsilon.$$
Donc (f_n) converge vers f pour la norme $\|.\|$ sur $\mathscr{L}(E,F)$.

Proposition 51

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\|\cdot\|$ une norme sur E. Si $f : (E, \|\cdot\|) \to (X, d)$, on définit une nouvelle application, $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to (X, d)$, par $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1 e_1 + \ldots x_n e_n)$. Alors f continue$\Longleftrightarrow \tilde{f}$ continue.

Autrement dit, vérifier la continuité d'une application définie sur un espace de dimension finie revient à vérifier la continuité d'une application définie sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration:

Soit $T : \mathbb{R}^n \to (E, \|\cdot\|)$, $T(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \ldots x_n e_n$. Alors T est linéaire, donc continue. T est bijective ; son inverse est linéaire, donc continue. On a $\tilde{f} = f \circ T$, d'où f continue$\Longrightarrow \tilde{f}$ continue. De même, $f = \tilde{f} \circ T^{-1}$, et donc $\tilde{f}$ continue$\Longrightarrow f$ continue.

2.9 Exercices :

Exercice 1

Soient E_1, E_2 et F des espaces normés sur $\mathbb{R}$ et soit $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire. Montrer que B est continue si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|B(x)\| \leqslant M\|x_1\|\|x_2\| \quad \text{pour tout } x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \, .$$

Indication:

Si la relation est vérifiée montrer que B est continue en x en calculant $B(x+y)-B(x)$. Si B est continue alors en particulier B est continue en $(0,0)$, fixer le ϵ de cette continuité,...

Correction:

Pour $x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ posons $\|x\| = \max(\|x_1\|, \|x_2\|)$.

1. Sens $\Leftarrow$. Soit $M > 0$ tel que $\|B(x)\| \leqslant M\|x_1\|\|x_2\|$. Montrons que B en continue au point $x = (x_1, x_2)$ fixé. Soit $y = (y_1, y_2)$ alors
$$\begin{aligned} B(x+y) - B(x) =& B(x_1 + y_1, x_2 + y_2) - B(x_1, x_2) \\ =& B(x_1, y_2) + B(x_2, y_1) + B(y_1, y_2). \end{aligned}$$
Donc
$$\|B(x+y) - B(x)\| \leqslant M \|x_1\| \|y_2\| + M \|x_2\| \|y_1\| + M \|y_1\| \|y_2\| \, .$$
Pour $\|y_1\| \leqslant \dfrac{\epsilon}{M\|x_1\|}$ on a $M\|x_1\|\|y_2\| \leqslant \epsilon$ (si $x_1 = 0$ il n'y a rien à choisir ici). Pour $\|y_2\| \leqslant \frac{\epsilon}{M\|x_2\|}$ on a $M\|x_2\|\|y_1\| \leqslant \epsilon$ (si $x_2 = 0$ il n'y a rien à choisir ici). Enfin pour $\|y_1\| \leqslant \sqrt{\frac{\epsilon}{M}}$ et $\|y_2\| \leqslant \sqrt{\frac{\epsilon}{M}}$ on a $M\|y_1\|\|y_2\| \leqslant \epsilon$. Donc en prenant $\eta = \min(\frac{\epsilon}{M\|x_1\|}, \frac{\epsilon}{M\|x_2\|}, \sqrt{\frac{\epsilon}{M}})$, on obtient que pour $\|y\| = \max(\|y_1\|, \|y_2\|) \leqslant \eta$ on a $\|B(x+y) - B(x)\| \leqslant 3\epsilon$. Ce qui prouve la continuité. Donc B est continue sur $E_1 \times E_2$.
2. Sens $\Rightarrow$. Si B est continue partout, en particulier elle est continue en 0. Je choisis $\epsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que $\|x\| \leqslant \eta$ alors $\|B(x)\| \leqslant 1$. Donc pour $\|x_1\| \leqslant \eta$ et $\|x_2\| \leqslant \eta$ on a $\|B(x_1, x_2)\| \leqslant 1$. Soit maintenant $y = (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$, $(y_1 \neq 0, y_2 \neq 0)$ on a $(\eta\frac{y_1}{\|y_1\|}, \eta\frac{y_2}{\|y_2\|})$ de norme $\leqslant \eta$ donc $B(\eta\frac{y_1}{\|y_1\|}, \eta\frac{y_2}{\|y_2\|}) \leqslant 1$ et par bilinéarité cela fournit : $B(y_1, y_2) \leqslant \frac{1}{\eta^2}\|y_1\|\|y_2\|$, et ce pour tout (y_1, y_2). La constante cherchée étant $\frac{1}{\eta^2}$.

Exercice 2

Soit $X = \mathcal{C}([0,1])$ avec la norme $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$. Montrer que la forme linéaire $f \in X \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$ n'est pas continue. Que peut-on en déduire pour le sous-espace des fonctions de X nulles en 0 ?

Indication:

Prenons f_n définie par $f_n(t) = 2n(1-nt)$ pour $t \in [0, \frac{1}{n}]$ et $f(t) = 0$ si $t > \frac{1}{n}$.

Correction:

Notons $L : X \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par $L(f) = f(0)$. Prenons f_n définie par $f_n(t) = 2n(1-nt)$ pour $t \in [0, \frac{1}{n}]$ et $f(t) = 0$ si $t > \frac{1}{n}$. Alors $\|f_n\| = 1$ alors que $L(f_n) = 2n$. Donc le rapport $\frac{|L(f_n)|}{\|f_n\|} = 2n$ n'est pas borné, donc L n'est pas continue. Si $H = \{f \mid f(0) = 0\}$ alors $H = \mathrm{Ker} L = L^{-1}(0)$. Comme L n'est pas continue alors H n'est pas fermé (voir l'exercice 7).

Exercice 3

Soit $X = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})\ ;\ (1+x^2)|f(x)| \text{ soit bornée}\}$. On pose $N(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|f(x)|$. Vérifier que N est une norme, puis montrer que la forme linéaire suivante L est continue et calculer sa norme :

$$L : X \to \mathbb{R} \quad \text{définie par} \quad L(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx\ .$$

Indication:

Montrer que $\|L\| = \pi$.

Correction:

N est bien une norme. Et on a pour tout x, $(1+x^2)|f(x)| \leqslant N(f)$.

$$\begin{aligned}|L(f)| =& |\int_{\mathbb{R}} f| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{N(f)}{1+x^2}dx \leqslant N(f)\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} \\ =& N(f)[\mathrm{Arctan} x]_{-\infty}^{+\infty} = N(f)\pi.\end{aligned}$$

Donc pour tout f on a

$$\frac{\int f}{N(f)} \leqslant \pi.$$

De plus pour $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ on obtient l'égalité. Donc $\|L\| = \pi$.

Exercice 4

Soient E et F deux espaces normés et $L : E \to F$ une application linéaire vérifiant : $(L(x_n))_n$ *est bornée dans* F *pour toute suite* $(x_n)_n$ *de* E *tendant vers* $0 \in E$. Montrer que L est continue.

Indication:

La continuité de L sur E équivaut la continuité en 0. Par l'absurde supposer que L n'est pas continue en 0 et construire une suite (x_n) qui tend vers 0 mais avec $(L(x_n))$ non bornée.

Correction:

Comme L est linéaire il suffit de montrer que L est continue en 0. Supposons que cela ne soit pas vrai, alors il faut nier la continuité de L en 0 qui s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in E \quad (\|x\| < \eta \Rightarrow \|L(x)\| < \epsilon).$$

La négation s'écrit alors :

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists x \in E \quad (\|x\| < \eta \ \text{ et } \ \|L(x)\| \geqslant \epsilon).$$

Soit donc un tel $\epsilon > 0$ de la négation, pour η de la forme $\eta = \frac{1}{n}$, on obtient y_n tel que $\|y_n\| < \frac{1}{n}$ et $\|L(y_n)\| \geqslant \epsilon$. On pose $x_n = \sqrt{n}y_n$, alors $\|x_n\| = \sqrt{n}\|y_n\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc (x_n) est une suite de E qui tend vers 0. Par contre $\|L(x_n)\| = \sqrt{n}\|L(y_n)\| \geqslant \epsilon\sqrt{n}$, donc la suite $(L(x_n))$ n'est pas bornée. Par contraposition nous avons obtenu le résultat souhaité.

Exercice 5

Soit $X = \mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes. Pour $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ on pose

$$\|P\| = \sup_k |a_k|,$$

$$U(P)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} a_k x^k$$

et

$$V(P)(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^k.$$

1. Montrer que $\|.\|$ définit une norme et que U et V définissent des applications linéaires de X dans X.
2. U et V sont ils continues ?

Indication:

U est continue et $\|U\| = 1$, V n'est pas continue.

Correction:

1. Il suffit de l'écrire...
2. Calculons la norme de U : $\|U(P)\| = \sup_k |\frac{1}{k} a_k\| \leqslant \sup_k |a_k| \leqslant \|P\|$. Donc pour tout P, $\frac{\|U(P)\|}{\|P\|} \leqslant 1$. Et pour $P(x) = x$ on a égalité donc $\|U\| = 1$.
3. Pour V, prenons $P_k(x) = x^k$, alors $\|P_k\| = 1$, mais $\|V(P_k)\| = k$. Donc V n'est pas bornée sur la boule unité donc V n'est pas continue.

Exercice 6

Soit ℓ^∞ l'espace des suites réelles muni avec la norme uniforme, i.e. $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$. On considère l'application $A : \ell^\infty \to \ell^\infty$ définie par

$$A(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (x_1, x_2/2, ..., x_n/n, ...) \; .$$

1. Montrer que A est injective et continue avec $\|A\| = 1$. Est elle surjective ?
2. Monter que A admet un inverse à gauche mais qu'il n'est pas continu.

Correction:

1. A injective :

   Si

   $$A(x_1, x_2, \ldots) = A(y_1, y_2, \ldots)$$

   Alors

   $$(x_1, \frac{x_2}{2}, \cdots, \frac{x_n}{n}, \cdots) = (y_1, \frac{y_2}{2}, \cdots, \frac{y_n}{n}, \cdots)$$

   donc

   $$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \cdots, x_n = y_n,$$

   Donc A est injective.
   A continue : $\|A(x)\|_\infty = \sup_n \frac{x_n}{n} \leqslant \sup_n x_n \leqslant \|x\|_\infty$. Donc $\|A\| \leqslant 1$ donc A est continue.
   Norme de A : Pour $x = (1, 0, 0, \ldots)$. On a $\|x\|_\infty = 1$ et $\|A(x)\|_\infty = 1$ Donc la norme de A est exactement 1.
   A n'est pas surjective : posons

   $$y = (1, 1, 1, \ldots) \in l^\infty.$$

   Soit x une suite telle que $A(x) = y$ alors $x = (1, 2, 3, 4, \ldots)$. Mais $\|x\|_\infty = +\infty$ donc $x \notin l^\infty$. En conséquence $A : l^\infty \to l^\infty$ n'est pas surjective.

2. L'inverse à gauche de A est B définie par

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = (x_1, 2x_2, \cdots, nx_n, \cdots)$$

de sorte que pour $x \in l^\infty$ on ait $B \circ A(x) = x$. Posons la suite $x^p = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0 \ldots) \in l^\infty$ (des zéros partout et le 1 à la p-ième place). Alors $\|x^p\|_\infty = 1$ et $\|B(x^p)\|_\infty = p$. Donc $\frac{\|B(x^p)\|_\infty}{\|x^p\|_\infty} = k$, donc la norme de B n'est pas finie et B n'est pas continue.

Exercice 7

Soit X un espace normé, $L : X \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle et $H = L^{-1}(\{0\})$ son noyau.

1. Montrer que, si L est continue, alors H est un sous-espace fermé dans X. Établir la relation
$$\mathrm{dist}(a, H) = \frac{|L(a)|}{\|L\|} \quad \text{pour tout } a \in X \ .$$
2. Réciproquement, supposons que le noyau H est un fermé. Démontrer alors que $\mathrm{dist}(a, H) > 0$ dès que $a \in X \setminus H$ et en déduire que L est continue de norme au plus $|L(a)|/\mathrm{dist}(a, H)$.
3. Peut-on généraliser ceci a des applications linéaires entre espaces normés ?

Correction:

1. Si $L(a) = 0$ alors $a \in H$ donc $\mathrm{dist}(a, H) = 0$ donc la relation est vraie. Supposons que $L(a) \neq 0$. Alors on a $X = H + \mathbb{R}.a$. En effet pour $x \in X$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $L(x) = \lambda L(a)$. Donc $L(x - \lambda a) = 0$. Posons $h = x - \lambda a$, alors $h \in H$ et $x = h + \lambda a$ est la décomposition suivant $H + \mathbb{R}.a$.
Si L est continue alors $\|L\|$ est finie.
$$\begin{aligned}\|L\| &= \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{h \in H, \lambda \in \mathbb{R}, h + \lambda a \neq 0} \frac{\|L(h + \lambda a)\|}{\|h + \lambda a\|} \\ &= |L(a)| \sup_{h \in H, \lambda \in \mathbb{R}, h + \lambda a \neq 0} \frac{|\lambda|}{\|h + \lambda a\|} \\ &= |L(a)| \sup_{h \in H} \frac{1}{\|h + a\|} \\ &= |L(a)| \frac{1}{\inf_{h \in H} \|h + a\|} \\ &= |L(a)| \frac{1}{\mathrm{dist}(a, H)}\end{aligned}$$
Ce qui était l'égalité demandée.
2. Si H est fermé alors $\mathrm{dist}(a, H) > 0$ si $a \notin H$, par l'égalité démontrée ci-dessus on a $\|L\|$ finie donc L est continue.
3. Soit $X = \mathbb{R}[x]$. Pour $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ on pose $\|P\| = \sup_k |a_k|$, et $V(P)(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^k$. Alors $\mathrm{Ker} V = \{0\}$ est fermé mais V n'est pas continue (voir l'exercice 5).

[2]

2. D'aprés http ://exo7.emath.fr/ficpdf/ficall.pdf

Chapitre 3

Théorème de Hahn-Banach

Les théorèmes de Hahn-Banach sont des résultats d'analyse fonctionnelle très importants. Ces théorèmes sont vus ici en deux formes : les formes analytiques du théorème assurent qu'une forme linéaire peut être étendue à tout l'espace en préservant certaines contraintes initiales; les formes géométriques quant à elles sont des résultats assurant qu'on peut séparer par des hyperplans deux convexes vérifiant certaines hypothèses dans des espaces vectoriels normés.

3.1 Formes analytiques

3.1.1 Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

Sous-Normes

Définition 50

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On appelle *sous-norme* toute application $p : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

(SN.1) $\forall x \in E, \quad \forall \lambda > 0, \qquad p(\lambda x) = \lambda p(x)$. (On dit que p est positivement homogène).

(SN.2) $\forall x, y \in E \qquad p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$. (On dit que p est sous-additive).

Théorème 15

Soit G un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectorielle E, soit $g : G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle $\forall x \in G, \quad g(x) \leqslant p(x)$.
Alors il existe une forme linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ qui prolonge g à E tout entier(i.e $g(x) = f(x), \forall x \in E$) et telle que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) \leqslant p(x).$$

Définition 51

Soit P un ensemble muni d'une relation d'ordre partiel notée $\prec$.

1. On dit que $Q \subset P$ est totalement ordonné si $\forall a, b \in Q$, $a \prec b$ ou $b \prec a$.
2. On dit que $c \in P$ est un majorant de $Q \subset P$ si $\forall a \in Q$, $a \prec c$.
3. On dit que $m \in P$ est maximal si $\forall x \in P$ tel que $m \prec x$, alors $m = x$.
4. On dit que P est inductif si tout sous-ensemble totalement ordonné de P admet un majorant.

Le lemme de Zorn énoncé par Max Zorn, mathématicien américain d'origine allemande, en 1935, est équivalent à l'axiome du choix. Il permet de valider certains types de raisonnements où on cherche à prouver l'existence d'objets maximaux.

Lemme 5 (Zorn)
Tout ensemble ordonné, inductif et non vide admet un élément maximal.

Démonstration:
Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble de tout les pairs $(D(h), h)$ vérifiant

1. $h \mid h : D(h) \subset E \to \mathbb{R}$
2. $D(h)$ s-e-v de$E$,
3. $h|_G = g\,(h\;$ prolonge$\,g.)$
4. $\forall x \in D(h), h(x) \leqslant p(x)$

On considère : On munit $\mathscr{P}$ de la relation d'ordre :

$$h_1 \prec h_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} D(h_1) \subset D(h_2) \\ h_2 \text{ prolonge } h_1. \end{array}} \end{cases}$$

(C'est-à-dire h_1 prolonge h_2 si et seulement si le graphe de h_1 est inclus à celui de h_2)

$\mathscr{P} \neq \varnothing$ car $(D(g), g) \in \mathscr{P}$.

$\mathscr{P}$ est inductif : soit $\mathscr{Q} \subset \mathscr{P}$ un sous-ensemble totalement ordonné, on note $Q = (h_i)_{i \in I}$, on définit $D(h) \coloneqq \bigcup_{i \in I} D(h_i)$ et $h(x) \coloneqq h_i(x)$ si $x \in D(h_i)$.

Alors h est un majorant de Q.

D'après le lemme de Zorn, $\mathscr{P}$ possède un élément maximal $(D(f), f)$.

Prouvons que $D(f) = E$:

Supposons donc qu'il existe $x_0 \in E \setminus D(f)$. Montrons qu'il est possible d'étendre f à $V = D(f) \oplus \mathbb{R}x_0$ comme annoncé dans le théorème.

On doit montrer qu'il existe un réel $g(x_0)$ tel que pour tout $x = y + tx_0 \in V$, $g(x) \leqslant p(x)$, c'est-à-dire :

$$f(y) + tg(x_0) \leqslant p(y + tx_0)$$

Analysons les différents cas, selon le signe de t :

Cas 1, $t > 0$: la condition devient, par positive homogénéité de p et linéarité de f

$$\forall y \in (D(f)), g(x_0) \leqslant p\left(\frac{y}{t} + x_0\right) - f\left(\frac{y}{t}\right)$$

Puisque $D(f)$ est un sous-espace vectoriel, on peut réécrire la condition :

$$\forall z \in D(f), g(x_0) \leqslant p(z + x_0) - f(z)$$

Cas 2, $t < 0$: la condition devient, par positive homogénéité de p et linéarité de f

$$\forall y \in D(f), g(x_0) \geq f\left(\frac{-y}{t}\right) - p\left(\frac{-y}{t} - x_0\right)$$

Puisque $D(f)$ est un sous-espace vectoriel, on peut réécrire la condition :

$$\forall w \in D(f), g(x_0) \geq f(w) - p(w - x_0)$$

La question qu'on se posait revient donc à se demander s'il existe un réel satisfaisant les inégalités :

$$\forall w, z \in D(f), f(w) - p(w - x_0) \leqslant g(x_0) \leqslant p(z + x_0) - f(z)$$

Il suffit de montrer l'assertion :

$$\forall w, z \in D(f), f(w) - p(w - x_0) \leqslant p(z + x_0) - f(z)$$

Soient $z, w \in D(f)$. On a $f(w+z) \leqslant p(w+z)$ par hypothèse sur p. Or puisque

$$p(w+z) = p(w - x_0 + z + x_0) \leqslant p(w - x_0) + p(z + x_0)$$

par sous-additivité de p, et que f est linéaire, on a l'inégalité.

On peut donc poser, par exemple, $g(x_0) = \inf_{z \in D(f)} p(z + x_0) - f(z)$.

Corollaire 9

Soit E un espace vectoriel normé, G un sous-espace vectoriel de E.

Soit $g : G \to \mathbb{R}$ linéaire et continue.

Alors il existe une forme linéaire continue f sur E prolongeant g et telle que $\|f\| = \|g\|$.

Démonstration:

On pose $p(x) \coloneqq \|g\| \|x\|$, les hypothèses du théorème sont bien vérifiées et on a $|f(x)| \leqslant \|g\| \|x\|$, d'où $\|f\| \leqslant \|g\|$, d'où $\|f\| = \|g\|$ car f prolonge g.

Corollaire 10

Pour tout $x_0 \in E$, il existe $f_0 \in E'$ tel que $\|f_0\| = \|x_0\|$ et $\langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$.

Démonstration:

Appliquer le corollaire avec $G \coloneqq \mathbb{R}x_0$ et
$g(tx_0) \coloneqq t \|x_0\|^2$, de sorte que $\|g\| = \|x_0\|$.

Corollaire 11

Pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leqslant 1}} |\langle f, x \rangle| = \max_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leqslant 1}} |\langle f, x \rangle|$$

Démonstration:

Soit $x \neq 0$, alors :

$$\sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leqslant 1}} |\langle f, x \rangle| \leqslant \|x\|$$

et, par le corollaire précédent, il existe $f_0 \in E'$ tel que $\|f_0\| = \|x\|$ et $\langle f_0, x \rangle = \|x\|^2$.

On pose $f_1 \coloneqq \frac{f_0}{\|x\|}$, on a $\|f_1\| = 1$ et $\langle f_1, x \rangle = \|x\|$.

3.1.2 Espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$

Théorème 16 (Hahn-Banach – Forme analytique (cas complexe))

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, G un sous-espace vectoriel de E, $g : G \to \mathbb{C}$ une forme linéaire et p une sous-norme définie sur E vérifiant

$$\forall x \in G, |g(x)| \leq p(x)$$

Alors il existe $f : E \to \mathbb{C}$ forme linéaire étendant g et telle que $\forall x \in E, |f(x)| \leq p(x)$.

Démonstration:

Remarquez que quel que soit l'élément $x \in G$ considéré, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} ig(x) &= -\operatorname{Im}(g)(x) + i\operatorname{Re}(f)(x) \\ g(ix) &= \operatorname{Re}(g)(ix) + i\operatorname{Im}(g)(ix) \end{aligned}$$

Par définition de l'égalité de deux nombres complexes (leurs parties réelles et imaginaires doivent être égales), on en déduit que $\mathrm{Re}(g)(ix) = -\mathrm{Im}(g)(x)$ et que $\mathrm{Im}(g)(ix) = \mathrm{Re}(g)(x)$. On peut donc exprimer f uniquement à l'aide de $\mathrm{Re}(g)$ de la manière suivante :

$$g(x) = \mathrm{Re}(g)(x) - i\mathrm{Re}(g)(ix)$$

L'application $\mathrm{Re}(g) : G \to \mathbb{R}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire. Par le théorème de Hahn-Banach, cas réel, elle s'étend en une fonction $\mathbb{R}$-linéaire $h : E \to \mathbb{R}$.

On pose f l'application définie par $f(x) = h(x) - ih(ix)$ pour tout x dans E. Donc h correspond à la partie réelle de f. Il est aisé de vérifier qu'elle est $\mathbb{C}$-linéaire par calcul. Il reste à montrer que f vérifie bien $|f| \leqslant p$. Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned}
|f(x)| =& e^{-i\arg(f(x))} f(x) \\
=& f(e^{-i\arg(f(x))} x) \quad (f \text{ linéaire}) \\
=& \mathrm{Re}(f)(e^{-i\arg(f(x))} x) \\
=& h(e^{-i\arg(f(x))} x) \\
\leqslant& p(e^{-i\arg(f(x))} x) = p(x)
\end{aligned}$$

3.2 Forme géométrique du théorème de Hahn-Banach

3.2.1 Hyperplan affine

Définition 52

Soit E un espace vectoriel réel, un hyperplan affine est un ensemble de la forme

$$H = \{x \in E,\ f(x) = \alpha\},$$

où f est une forme linéaire sur E, non identiquement nulle, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 52

Soit E un espace vectoriel réel, l'hyperplan H (d'équation $f(x) = \alpha$) est fermé si et seulement f est continue.

Démonstration:

Si f est continue, alors $H = f^{-1}(\alpha)$ est un fermé. Réciproquement, supposons H fermé. Soit $x_0 \in H^c$. Supposons pour fixer les idées que $f(x_0) < \alpha$. Alors, puisque H^c est ouvert, il existe $r > 0$, tel que $B(x_0, r) = \{x \in E, ||x - x_0|| < r\} \subset H^c$, et on va en déduire que

$$\forall x \in B(x_0, r),\ f(x) < \alpha.$$

En effet, si on avait un point x_1 de la boule où $f(x_1) \geqslant \alpha$, on trouverait par interpolation, f étant linéaire, un point x du segment $[x_0, x_1]$ où $f(x) = \alpha$, en contradiction avec $B(x_0, r) \subset H^c$. Finalement, $\forall x \in B(x_0, r),\ f(x) < \alpha$ et donc

$$\forall z \in B(0,1),\ f(x_0) + rf(z) < \alpha, \text{ soit}$$

$$\forall z \in B(0,1),\ f(z) \leqslant \frac{\alpha - f(x_0)}{r}.$$

Cela entraîne $||f|| \leqslant \frac{\alpha - f(x_0)}{r}$, et donc que f est continue.

Définition 53 (séparation par un hyperplan)

Soit E un espace vectoriel réel normé et $A, B \subset E$. On dit que l'hyperplan H d'équation

$f(x) = \alpha$ sépare A et B au sens large si

$$f(x) \leqslant \alpha,\ \forall x \in A \quad \text{et} \quad f(x) \geq \alpha, \forall x \in B.$$

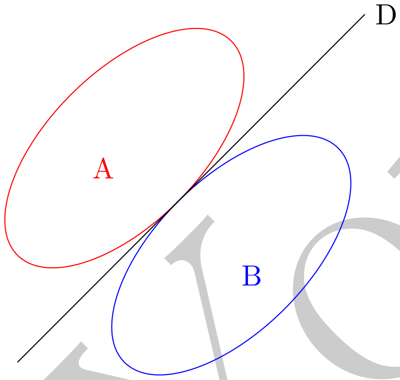
On dit que H sépare A et B au sens strict si

$$\exists \varepsilon > 0, \quad f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon,\ \forall x \in A \quad \text{et} \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon, \forall x \in B.$$

Théorème 17 (Hahn-Banach :sens géométrique)

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$.
Soit $A \subset E, B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides et disjoints.
On suppose que A est ouvert.
Alors il existe un hyperplan affine fermé qui sépare A et B au sens large.

FIGURE 3.1 – Séparation de deux convexes par un hyperplan dans $\mathbb{R}^2$



Remarque 10

Le théorème peut être faux si aucun des deux convexes n'est ouvert. Prendre par exemple $E = C^0(0,1)$, pour A : le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques et pour B une quelconque fonction continue qui ne soit pas un polynôme trigonométrique. Or, on ne peut pas séparer cette fonction et A au sens large comme le montre l'utilisation du théorème de Stone-Weierstrass). En effet on aurait alors $f(x) \leqslant \alpha$ pour tout polynôme et donc par densité des polynômes trigonométriques dans E et continuité de f, $f(x) \leqslant \alpha$ pour tout $x \in E$. En multipliant x par un réel quelconque λ positif ou négatif, on déduit aisément que $f(x) = 0$ et que donc tout E est contenu dans un hyperplan fermé de E, ce qui donne une contradiction.

Lemme 6

Soit $C \subset E$ un convexe ouvert avec $0 \in C$.
On pose, pour $x \in E$, $p(x) := \inf\{\alpha > 0 \mid x \in \alpha C\}$ la jauge de C.
Alors p vérifie les conditions $(SN.1)$ et $(SN.2)$ et :

1. Il existe M tel que $0 \leq p(x) \leq M\|x\| \qquad \forall x \in E$
2. $C = \{x \in E \mid p(x) < 1\}$.

Démonstration:

(SN.1) est vérifiée trivialement.

1 Soit $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset C$, alors $p(x) \leqslant \frac{1}{r}\|x\|$, d'où le résultat.

2 — Supposons $x \in C$, C est ouvert donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)x \in C$, donc :

$$p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$$

— Si $p(x) < 1$, il existe $0 < \alpha < 1$ tel que $\frac{x}{\alpha} \in C$, donc :

$$x = \alpha \frac{x}{\alpha} + (1-\alpha) \times 0 \in C$$

(SN.2) Soit $x, y \in E$, soit $\varepsilon > 0$, alors d'après (SN.1) ;

$$\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \text{ et } \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$$

Donc :

$$\frac{tx}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y)+\varepsilon} \in C \qquad \forall t \in [0,1]$$

Alors :

$$\text{pour } t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}, \text{ on a } \frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C$$

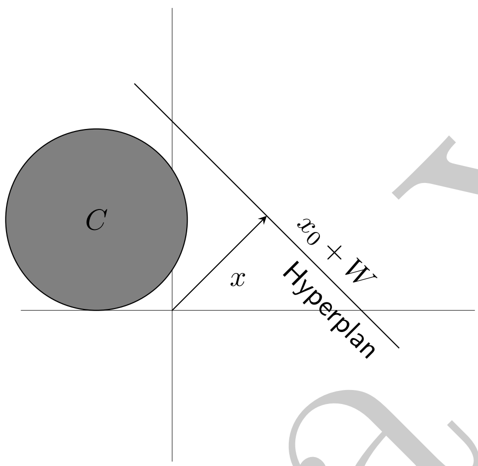
D'où $p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$, d'où p vérifie (SN.2).

Lemme 7

Soit $C \subset E$ un convexe ouvert non vide. Soit $x_0 \in E \setminus C$.

Alors il existe $f \in E'$ tel que $f(x) < f(x_0) \qquad \forall x \in C$.

En particulier, l'hyperplan affine d'équation $\{f = f(x_0)\}$ sépare $\{x_0\}$ et C au sens large.



Démonstration:

Par translation, on peut toujours supposer $0 \in C$ et introduire p la jauge de C.

On considère $G := \mathbb{R}x_0$ et on pose $g : G \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $g(tx_0) = t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$.

Alors $g(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in G$:

— si $t > 0$, alors $\frac{x}{g(x)} = \frac{tx_0}{t} = x_0 \notin C$ donc $g(x) \leq p(x)$

— si $t \leq 0, g(x) \leq 0 \leqslant p(x)$.

Donc par Hahn-Banach analytique, il existe $f \in E'$ prolongeant g telle que $f(x) \leq p(x), \forall x \in E$. On a $f(x_0) = 1$ et f est continue par (iii). D'autre part, $(iv) \to f(x) < 1, \forall x \in C$.

Démonstration: (Démonstration du théorème)

On pose $C := A - B$. Alors C est convexe, ouvert (car $C = \bigcup_{y \in B}(A-y)$) et $0 \notin C$ car $A \cap B = \varnothing$.

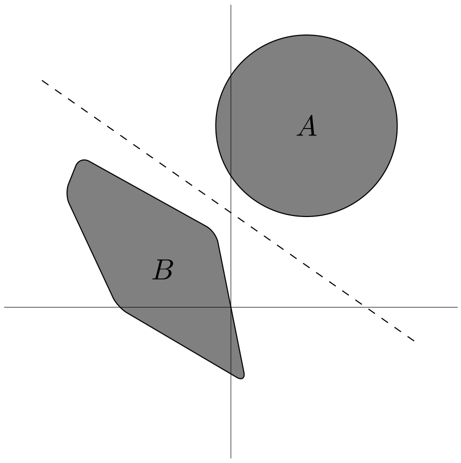
D'après le dernier lemme, il existe $f \in E'$ tel que $f(z) < 0, \forall z \in C$,

i.e. $f(x) < f(y), \forall x \in A, \forall y \in B$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y)$. Alors l'hyperplan affine d'équation $\{f = \alpha\}$ sépare A et B au sens large.

Théorème 18 (Hahn-Banach géométrique, sens strict)

Soit $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides, disjoints. On suppose que A est fermé et que B est compact. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.



Démonstration:

Pour $\varepsilon > 0$, on pose $A_\varepsilon \coloneqq A + B(0,\varepsilon)$ et $B_\varepsilon \coloneqq B + B(0,\varepsilon)$ de sorte que A_ε et B_ε sont convexes, ouverts et non vides. De plus, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, A_ε et B_ε sont disjoints (sinon on pourrait trouver des suites $\varepsilon_n \to 0, x_n \in A$ et $y_n \in B$ telles que $\|x_n - y_n\| < 2\varepsilon_n$ et on pourrait extraire une sous-suite $y_n \to y \in B$ par compacité de B et $y \in A$ car A fermé).

D'après le théorème de Hahn-Banach géométrique sens large, il existe un hyperplan fermé d'équation $\{f = \alpha\}$ qui sépare A_ε et B_ε au sens large. On a donc

$$f(x + \varepsilon z) \leq \alpha \leq f(y + \varepsilon z) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad \forall z \in B(0,1).$$

Il en résulte que

$$f(x) + \varepsilon \|f\| \leqslant \alpha \leqslant f(y) - \varepsilon \|f\|, \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B.$$

On conclut que A et B sont séparés au sens strict par l'hyperplan $\{f = \alpha\}$ puisque $\|f\| \neq 0$.

3.3 Exercices :

Exercice 1

Notons E^* l'ensemble des formes linéaires continues sur E. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que

$$\forall f \in E^* \, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Correction:

On applique le corollaire du théorème de Hahn-Banach Raisonnons par l'absurde. Supposons alors que $x - y \neq 0$, alors il existe une forme linéaire f telle que

$$\|f\| = 1 \quad f(x) - f(y) = f(x-y) = \|x - y\| \neq 0.$$

Ce qui contredit l'hypothèse.

Exercice 2

Soient E un espace vectoriel normé, $n \in \mathbb{N}$ et des fonctionnelles linéairement indépendantes $x_1^*, ..., x_n^* \in E^*$. Alors pour tout $x^* \in E^*$ les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $x^* \in \mathrm{Vect}(x_1^*, ..., x_n^*)$
2. $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \ker(x_k^*) \subseteq \ker(x^*)$

Correction:

(1) $\Rightarrow$ (2)

Puisque $x^* \in \mathrm{Vect}(x_1^*, ..., x_n^*)$, il existe $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ tels que $x^* = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k^*$. Soit $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} \ker(x_k^*)$. Alors

$$x^*(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^*(x) = 0$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} \varphi : E &\to \mathbb{K}^{n+1} \\ x &\longmapsto (x^*(x), x_1^*(x), ..., x_n^*(x)) \end{aligned}$$

Son image est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{K}^{n+1}$. Alors par le théorème de Hahn-Banach, puisque $(1, 0, ..., 0) \notin \mathrm{Image}(\varphi)$, on peut séparer $\{(1, 0, ..., 0)\}$ et $\mathrm{Image}(\varphi)$, autrement dit il existe $A \in (\mathbb{K}^{n+1})^*$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout $x \in E$, on a

$$|A(\varphi(x))| < \alpha < |A((1, 0, ..., 0))|$$

Cela signifie que $\mathrm{Image}(A \circ \varphi)$ est borné. Or c'est un espace vectoriel, donc il est réduit à l'élément nul. De plus, A s'identifie à $(a, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, alors d'une part $A((1, 0, ..., 0)) = a \neq 0$ car $\alpha < |A((1, 0, ..., 0))|$, d'autre part pour tout $x \in E$ on a que

$$A(\varphi(x)) = ax^*(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^*(x) = 0$$

Ce qui signifie que x^* est une combinaison linéaire de $x_1^*, ..., x_n^*$.

Exercice 3

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $x_0 \in E \setminus \{0\}$.

Alors il existe $x^* \in E^*$, tel que $x^*(x_0) = 1$ et $\|x^*\| = \frac{1}{\|x_0\|}$.

Correction:

Soit $G = \mathbb{K}x_0$. On considère l'application linéaire continue $f : G \to \mathbb{K} : tx_0 \mapsto t$ (la continuité est assurée car l'application est définie sur un espace de dimension 1). Calculons la norme de f :

$$\|f\| = \sup_{\substack{t\in\mathbb{K} \\ \|tx_0\|\leq 1}} |f(tx_0)| = \sup_{\substack{t\in\mathbb{K} \\ |t|\leq \frac{1}{\|x_0\|}}} |t| = \frac{1}{\|x_0\|}$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser le théorème de Hahn-Banach.

Exercice 4

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $x_0 \in E \setminus \{0\}$.

Alors il existe $x^* \in E^*$, tel que $x^*(x_0) = \|x_0\|$ et $\|x^*\| = 1$.

Correction:

Soit y^* fournie par le exo 3. Il suffit de prendre $x^* = \|x_0\|y^*$.

Exercice 5

Tout hyperplan vectoriel H de E est soit fermé, soit dense.

Correction:

Soit f la forme linéaire (non nulle) sur E telle que $H = \mathrm{Ker}(f)$. Si H est dense on a le résultat (en particulier f n'est pas continue car son noyau n'est pas fermé).

Supposons maintenant que H n'est pas dense dans E et montrons que H est fermé. Il existe par le corollaire 6 une forme linéaire et continue x^* non nulle s'annulant sur l'adhérence de H. Puisque $H \subseteq \mathrm{Ker}(x^*)$, x^* et f sont multiples, donc f est continue. On en conclut que H est fermé.

Exercice 6

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de E qui n'est pas dense dans E et $x_0 \in (E \setminus \mathrm{adh}(F))$.

Il existe $x^* \in E^*$ tel que $F \subseteq \mathrm{Ker}(x^*)$, $x^*(x_0) = 1$ et $\|x^*\| = \frac{1}{d}$ où $d = d(x_0, F)$.

Correction:

Soit $f : F \oplus \mathbb{K}x_0 \to \mathbb{K} : y + tx_0 \mapsto t$. Cette application est linéaire et on a $F \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ et $f(x_0) = 1$.

Rappelons que $d \neq 0$ car $x_0 \notin \mathrm{adh}(F)$.

Montrons que f est continue. Soit $y + tx_0 \in F \oplus \mathbb{K}x_0$ tel que $\|y + tx_0\| \leq 1$. On a, pour $t \neq 0$:

$$\|y + tx_0\| = |t| \cdot \left\| x_0 - \left(-\frac{y}{t}\right) \right\| \geq d \cdot |t|$$

D'où $|f(y + tx_0)| = |t| \leq \frac{1}{d}$. Ceci montre que f est continue.

En utilisant le théorème de Hahn-Banach, on peut étendre f en une forme linéaire continue x^* sur E de même norme. Pour achever la preuve de l'assertion, il faut montrer l'inégalité $\|f\| \geqslant \frac{1}{d}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $y \in F$ tel que $|d - \|y - x_0\|| < \varepsilon$ (définition d'infimum) . Cela implique $\|y - x_0\| \leq d + \varepsilon$. On a également l'inégalité

$$\|f\| \geq \left| f\left(\frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}\right) \right| = \frac{1}{\|y - x_0\|} \geq \frac{1}{d + \varepsilon}$$

On conclut en faisant tendre ε vers 0.

Chapitre 4

Les théorèmes classiques de l'analyse fonctionnelle

4.1 Espace de Baire

Définition 54

Un espace topologique $(E, \mathscr{T})$ est un *espace de Baire* si toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. C'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in \mathscr{T} \quad \text{tel que} \quad \overline{U_n} = E \tag{4.1}$$

$$\Longrightarrow \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n} = E \tag{4.2}$$

Remarque 11

Il est important de noté que l'intersection considérée est dénombrable. Considérons l'intersection non dénombrable d'ouverts denses $\bigcap_{r\in\mathbb{R}} \mathbb{R} \setminus \{r\}$. Elle est vide donc non dense dans $\mathbb{R}$. (On peut montrer que $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle est un espace de Baire).

Formulations équivalentes

La propriété de Baire peut être exprimée de manière équivalente en termes de fermés :

Théorème 19

Un espace topologique est de Baire si et seulement si une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Démonstration:

Si $F = \bigcup_p F_p$, alors $F^C = \bigcap_p F_p^C$ est dense.

4.2 Théorème de Baire

Le théorème de Baire affirme que les espaces métriques complets sont des espaces de Baire, ce qui nous fournira des exemples concrets d'espaces de Baire.

Théorème 20

Soit (E,d) un espace métrique. Si E est complet, alors (E,d) un espace de Baire.

Démonstration:

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans E.

Soit V un ouvert non vide de E, montrons que $V \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n) \neq \varnothing$.

U_0 étant un ouvert dense, $U_0 \cap V$ est un ouvert non vide donc il existe $r_0 \leqslant 1$ et $x_0 \in E$ tels que $\overline{B(x_0,r_0)} \subset U_0 \cap V$.

Puis U_1 est un ouvert dense donc $U_1 \cap B(x_0,r_0)$ est un ouvert non vide, donc il existe $r_1 \leqslant \frac{1}{2}$ et $x_1 \in E$ tels que $\overline{B}(x_1,r_1) \subset U_1 \cap B(x_0,r_0)$.

On construit ainsi par récurrence une suite $(B(x_n,r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$r_n \leqslant \frac{1}{n} \text{ et } \overline{B(x_{n+1},r_{n+1})} \subset U_{n+1} \cap B(x_n,r_n)$$

Soit $n,m \geqslant k$, alors $x_n, x_m \in B(x_k,r_k)$ donc $d(x_n,x_m) \leqslant \frac{2}{k}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy, donc converge vers un élément x car E est complet.
De plus, pour tout $n, m \geqslant n, x_m \in \overline{B(x_n,r_n)}$ donc $d(x_m,x_n) \leqslant r_n$. En faisant $m \to +\infty$, on obtient $d(x,x_n) \leqslant r_n$, *i.e.* $x \in \overline{B(x_n,r_n)} \subset B(x_{n-1},r_{n-1})$.

D'où :

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x_n,r_n) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

Corollaires et applications

Proposition 53

Soient $(E,\mathscr{T})$ un espace de Baire et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de fermés d'intérieur vide. L'union des F_n n'est pas E.

Démonstration:

L'union étant d'intérieur vide, elle ne peut être E.

Proposition 54

Soient $(E,\mathscr{T})$ un espace de Baire et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de fermés de E. Si l'union des F_n est E, alors il existe n_0 tel que F_{n_0} est d'intérieur non vide.

Démonstration:

S'ils étaient tous d'intérieur vide, alors leur union le serait également, et elle ne pourrait pas être E.

On peut raffiner ce résultat :

Proposition 55

Soient $(E,\mathscr{T})$ un espace de Baire et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de fermés de E. Si l'union des F_n est E, alors l'union des intérieurs des F_n est dense dans E

Démonstration:

On pose $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \text{int} F_n$, qui est ouvert. On pose également, pour tout naturel n, $F'_n = F_n \cap (E \setminus U)$, qui est fermé.

Pour tout naturel n, F'_n est d'intérieur vide ; x est dans l'intérieur de F'_n si et seulement si il est à la fois dans l'intérieur de F_n et de $E \setminus U$, c'est-à-dire il existe un ouvert O_1 (resp. O_2) contenant x inclus dans F_n (resp. $E \setminus U$), ce qui implique que x est dans $O_1 \cap O_2$ qui est inclus dans l'intersection de l'intérieur de F_n et de $E \setminus U$ qui est vide.

Par la propriété de Baire, l'intérieur de l'union des F'_n est vide, c'est-à-dire l'ensemble

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (F_n \cap (E \setminus U)) = (E \setminus U) \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

est d'intérieur vide. C'est-à-dire $E \setminus U$ est d'intérieur vide par hypothèse sur les F_n. Cela montre que U est dense dans E.

4.3 Théorème de Banach-Steinhauss

Il est conseillé de se remémorer les équivalences pour la continuité d'applications linéaires avant de procéder à la lecture de cette section.

Théorème 21 (Banach-Steinhaus)

Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach et $(F, \|.\|_F)$ un espace vectoriel normé, I un ensemble non vide et $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continus (c'est-à-dire pour tout $i \in I$, $T_i \in \mathscr{L}(E, F)$).
Supposons que pour tout $x \in E$, $\sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F$ est fini.
Alors on a que $\sup_{i\in I} \|T_i\|$ est fini.

L'hypothèse de ce théorème équivaut à dire que pour tout x dans E, l'ensemble $\{\|T_i(x)\|_F \mid i \in I\}$ est borné, ou encore

$$\forall x \in E, \exists C_x, \forall i \in I, \|T_i(x)\|_F \leq C_x$$

La conclusion, quant à elle, équivaut à dire que l'ensemble $\{\|T_i\| \mid i \in I\}$ est borné. De manière équivalente :

$$\exists C, \forall x \in E, \forall i \in I, \|T_i(x)\|_F \leq C\|x\|_E$$

Démonstration:

Pour rappel, $(E, \|.\|_F)$ est un espace de Baire, car il est complet.

Pour tout naturel n, on considère l'ensemble E_n défini par :

$$E_n = \{x \in E \mid \forall i \in I, \|T_i(x)\|_F \leq n\} = \bigcap_{i\in I} T_i^{-1}(B_F[0, n])$$

On déduit de la seconde écriture que E_n est continuité des T_i). De plus, les E_n sont non vides car ils contiennent tous 0.

On a l'égalité $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ car pour tout x dans E, l'ensemble $\{\|T_i(x)\|_F \mid i \in I\}$ est borné. Il existe donc un naturel n_0 tel que $\text{int}(E_{n_0})$ est non vide (par la proposition 54), c'est-à-dire il existe un élément x_0 de E_{n_0} et un réel $r > 0$ tels que $B_E(x_0, r) \subseteq E_{n_0}$.

Ceci implique que pour tout z de la boule unité de E et pour tout i dans I, on a l'inégalité $\|T_i(x_0 + rz)\|_F \leq n_0$. D'où les inégalités (en utilisant l'inégalité triangulaire renversée et la linéarité) :

$$\|T_i(z)\|_F \leq \frac{1}{r}(n_0 + \|T_i(x_0)\|_F) \leq \frac{1}{r}\left(n_0 + \sup_{i\in I} \|T_i(x_0)\|_F\right)$$

Ceci implique que pour tout i dans I, $\|T_i\|$ est majorée par une constante indépendante de i, ce qui fournit le résultat.

Corollaire 12

Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ des espaces de Banach et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{L}(E, F)$ convergeant ponctuellement vers une fonction $T : E \to F$.

La fonction T est linéaire et on a les inégalités :

$$\|T\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$$

En particulier, T est continue.

Démonstration:

Soient a un scalaire et x, y deux éléments de E. Pour tout naturel n, on a par linéarité de T_n que $T_n(ax + y) = aT_n(x) + T_n(y)$. En passant à la limite sur n, on a par unicité de la limite que $T(ax + y) = aT(x) + T(y)$, ce qui montre la linéarité.

Puisque T_n converge ponctuellement vers T, on a que pour tout x dans E, $\|T_n(x)\|$ converge vers $\|T(x)\|$. Ceci implique que pour tout x dans E, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(x)\|$ est fini (car toute suite convergente est bornée). Par le théorème de Banach-Steinhaus, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|$ est fini.

Il reste à montrer l'inégalité $\|T\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|$ pour conclure. Soit x un élément de E. Quel que soit le naturel n considéré, on a :

$$\|T_n(x)\|_F \leq \|T_n\|\|x\|_E \leq \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} \|T_k\|\right) \|x\|_E$$

On conclut en passant à la limite sur n.

4.4 Théorème de l'application ouverte

Définition 55

Une application $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ est dite ouverte si l'image de tout ouvert de X par f est un ouvert de Y.

Énonçons le théorème de l'application ouverte.

Théorème 22 (Théorème de l'application ouverte)

Soient E, F deux espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}(E, F)$.
Si T est une surjection, alors T est ouverte.

Prouvons tout d'abord un résultat qui nous permet de montrer qu'un opérateur est ouvert.

Proposition 56

Soit $T : E \to F$ une application linéaire. T est ouverte si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $T(B_E(0, 1)) \supseteq B_F(0, r)$.

Remarquez que de manière équivalente, T linéaire est ouverte si et seulement si il existe $s > 0$ tel que $T(B_E(0, s)) \supseteq B_F(0, 1)$.

Démonstration:

Supposons T ouverte. Alors l'image par T de $B_E(0, 1)$ est un ouvert de F contenant 0, ce qui fournit le résultat.

Réciproquement, supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $T(B_E(0, 1)) \supseteq B_F(0, r)$. Soit O un ouvert de E. Soit $T(x)$ un élément de $T(O)$. Il existe $s > 0$ tel que $B_E(x, s) \subseteq O$. Puisque $B_E(x, s) = x + sB_E(0, 1)$, on a que $T(O)$ contient l'ensemble $T(x) + sT(B_E(0, 1))$. Par hypothèse, ce sous-ensemble contient $T(x) + sB_F(0, r)$, ce qui implique $B_F(T(x), r \cdot s) \subseteq T(O)$.

Nous pouvons désormais prouver le théorème. Nous utilisons les résultats suivants, implicitement :

Exercice 7

Soient $A \subseteq E$ et $T \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. On a que $A + A$ comprend $2A$;
2. Si A est convexe, $A + A = 2A$;
3. Si A est convexe, alors $T(A)$ est convexe ;
4. Si A est convexe, alors son adhérence aussi.

Démonstration:

Montrons premièrement qu'il existe $r > 0$ tel que $\text{adh}(T(B_E(0, 1))) \supseteq B_F(0, r)$. Afin de faire cela, on utilise le théorème de Baire.

Pour tout naturel $n \geq 1$, on pose $F_n = n \cdot \mathrm{adh}(T(B_E(0,1)))$ qui est un fermé de F. Dès lors, l'union des F_n est égale à F par surjectivité de T. En effet, il suffit de constater que $F_n \supseteq n \cdot T(B_E(0,1)) = T(B_E(0,n))$.

Dès lors le théorème de Baire assure qu'il existe n_0 tel que l'intérieur de F_{n_0} est non vide. On en déduit que l'intérieur de F_1 est non vide. Soit x_0 un élément de l'intérieur de F_1. Alors il existe $s > 0$ tel que $B_F(x_0, s) \subseteq \mathrm{adh}(T(B_E(0,1)))$. Puisque $\mathrm{adh}(T(B_E(0,1)))$ est symétrique (A est symétrique si pour tout élément a de A, $-a$ est dans A), $B_F(-x_0, s)$ est également contenue dans $\mathrm{adh}(T(B_E(0,1)))$. Par convexité de $\mathrm{adh}(T(B_E(0,1)))$, on déduit que $B_F(0,s) \subseteq \mathrm{adh}(T(B_E(0,1)))$.

Maintenant, on a montré que $\exists r' > 0$, $\mathrm{adh}(T(B_E(0,1)) \supseteq B_F(0,r')$. On en déduit que $\mathrm{adh}(T(B_E(0,r)) \supseteq B_F(0,1)$ où $r = 1/r'$. Pour conclure, on doit montrer l'existence de $s > 0$ tel que $B_F(0,1) \subseteq T(B_E(0,s))$.

Soit $y \in F$, $\|y\| < 1$. Alors, $y \in \mathrm{adh}(T(B_E(0,r)))$.

Par définition d'adhérence, il existe $x_0 \in B_E(0,r)$ tel que $\|y - T(x_0)\| < \frac{1}{2}$. Dès lors, $y - T(x_0)$ appartient à $\mathrm{adh}(T(B_E(0, r/2)))$. Il existe donc $x_1 \in B_E(0, r/2)$ tel que $\|y - T(x_0 + x_1)\| < \frac{1}{2^2}$.

À l'étape n, on a $y - T(x_0 + \cdots + x_{n-1}) \in \mathrm{adh}(T(B(0, \frac{r}{2^n})))$. Il existe donc $x_n \in B(0, \frac{r}{2^n})$ tel que $\|y - T(x_1 + \cdots + x_n)\| < \frac{1}{2^{n+1}}$.

La série des x_n converge car elle est absolument convergente (on a pour tout naturel n, $\|x_n\| < \frac{r}{2^n}$). Soit x la limite de cette série. Alors, $\|x\| \leq 2r$ et on a $T(x) = y$. D'où $y \in T(B(0, 2r))$.

Il suffit donc de prendre $s = 2r$ pour conclure.

Corollaire 13 (Théorème d'isomorphisme de Banach)

Soient E, F deux espaces de Banach, $T \in \mathscr{L}(E,F)$. Si T est bijective, alors elle est bicontinue (c'est-à-dire sa réciproque est également continue).

Démonstration:

Toute application bijective, continue et ouverte est un homéomorphisme. Le résultat est immédiat par le théorème de l'application ouverte.

4.5 Théorème du graphe fermé

Soient E, F des espaces vectoriels normés, et $T : E \to F$.

Définition 56

On note $\mathrm{Gr}(T) = \{(x, T(x)) \mid x \in E\}$ le graphe de T, qui est un sous-ensemble de $E \times F$.

Exercice 8

Si T est continue, alors $\mathrm{Gr}(T)$ est fermé.

Le théorème du graphe fermé est une réciproque partielle pour le résultat précédent ; il nécessite comme hypothèse additionnelle la complétude de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée.

Théorème 23

Supposons que E et F sont complets et que T est linéaire. Alors T est continue si et seulement si le graphe de T est fermé.

Démonstration:

Supposons que le graphe de T est fermé, c'est-à-dire si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de E et $(x,y) \in E \times F$, si $(x_n, T(x_n)) \to (x,y)$, alors $y = T(x)$.

On définit une norme sur E, pour $x \in E$, on pose $|||x||| = \|x\|_E + \|T(x)\|_F$, appelée norme du graphe. Montrons que E muni de cette norme est complet.

Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy au sens de la norme du graphe. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 naturel, pour tous $p, q \geq n_0$,

$$\|x_q - x_p\|_E + \|T(x_q) - T(x_p)\|_F \leq \varepsilon.$$

Il s'en suit que $(x_n)_n$ et $(T(x_n))_n$ sont de Cauchy (au sens de $\|.\|_E$ et de $\|.\|_F$ respectivement) et convergent respectivement vers $x \in E$ et $y \in F$. Puisqu'on suppose le graphe de T fermé, on a $y = T(x)$. Dès lors $\||x_n - x\|| = \|x_n - x\| + \|T(x_n) - T(x)\|$ qui converge bien vers 0.

De plus, on remarque que la norme du graphe (de T) domine la norme $\|.\|_E$. Par le corollaire 6, les deux normes sont équivalentes. En particulier, il existe $c > 0$ tel que pour tout x dans E, $\|x\|_E + \|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E$. Ceci implique que $\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E$ donc T est continue.

4.6 Exercices :

Exercice 1

A l'aide du théorème de Baire, montrer qu'un fermé dénombrable non vide X de $\mathbb{R}$ a au moins un point isolé. *Indication :* on pourra considérer $\omega_x = X \setminus \{x\}$.

Indication:

Raisonner par l'absurde et montrer que ω_x est un ouvert dense.

Correction:

Par l'absurde supposons que X n'a aucun point isolé. Comme $\{x\}$ est un fermé alors $\omega_x = X \setminus \{x\}$ est un ouvert (de X). De plus comme le point x n'est pas isolé alors ω_x est dense dans X.

Maintenant on peut appliquer le théorème de Baire à X qui est un fermé de l'espace complet $\mathbb{R}$. Donc une intersection dénombrable d'ouverts denses dans X est encore dense. Mais ici nous obtenons une contradiction car les ω_x sont des ouverts denses, X est dénombrable mais

$$\bigcap_{x \in X} \omega_x = \varnothing.$$

Et l'ensemble vide n'est pas dense dans X.

Exercice 2

Soit f une application définie sur un espace métrique complet (X, d), à valeurs réelles et semi-continue inférieurement. Montrer qu'il existe un ouvert non vide O sur lequel f est majorée.

Application : soit (f_n) une suite de formes linéaires continues sur un Banach B, vérifiant

$$\forall x \in B, \ \sup_n |f_n(x)| < \infty.$$

En utilisant ce qui précède, montrer que $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

Indication:

1. Une application $f : X \to \mathbb{R}$ est *semi-continue inférieurement* si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \{x \in X \mid f(x) > \lambda\} \qquad \text{est un ouvert.}$$

De façon équivalente f est *semi-continue inférieurement* si pour tout $x \in X$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in X \quad (d(x,y) < \delta \Rightarrow f(x) - f(y) < \epsilon).$$

Attention il n'y a pas de valeur absolue autour de $f(x) - f(y)$.

2. Pour la première question considérer $O_n = \{x \in X \mid f(x) > n\}$ et utiliser le théorème de Baire.
3. Pour l'application utiliser la première question avec la fonction

$$\phi : B \to \mathbb{R}, \text{ définie par } \phi(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

Correction:

1. Par l'absurde supposons que sur aucun ouvert f n'est majorée. $f : X \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad O_\lambda := \{x \in X \mid f(x) > \lambda\} \qquad \text{est un ouvert.}$$

De plus O_λ est dense, en effet pour $x \in X$ et pour V_x un voisinage ouvert de x, alors par hypothèse f n'est pas majorée sur V_x donc en particulier il existe $y \in V_x$

tel que $f(y) > \lambda$ donc $y \in V_x \cap O_\lambda$. Ceci prouve que O_λ est dense dans X (V_x étant aussi petit que l'on veut).
Maintenant pour $n = 0, 1, 2, \dots$, les O_n sont un ensemble dénombrable d'ouverts denses. Comme X est complet il vérifie le théorème de Baire donc l'intersection des O_n est encore un ensemble dense. Mais il est facile de voir par la définition des O_n que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \varnothing.$$

Ce qui donne la contradiction cherchée.

2. On note $\phi : B \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\phi(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

Il n'est pas difficile de montrer que ϕ est semi-continue inférieurement : en effet soit $F_\lambda := \{x \in X \mid \phi(x) \le \lambda\}$. Soit λ fixé et soit (x_k) une suite d'éléments de F_λ. Pour n fixé et pour tout k on a $f_n(x_k) \le k$, donc par continuité de f_n, on a $f_n(x) \le k$, ceci étant vrai pour tout n on a $x \in F_\lambda$. Donc F_λ est un fermé donc $O_\lambda := \{x \in X \mid f(x) > \lambda\}$ est un ouvert. Donc ϕ est semi-continue inférieurement. D'après la première question il existe un ouvert non vide O et une constante $M > 0$ tel que ϕ soit majorée par M sur O. C'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in O \quad |f_n(x)| \le M.$$

Par translation on peut supposer que l'origine o est inclus dans O. Donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $\bar{B}(o,\epsilon) \subset O$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \bar{B}(o,\epsilon) \quad |f_n(x)| \le M$$

ce qui est équivalent à

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \bar{B}(o,1) \quad |f_n(x)| \le \frac{M}{\epsilon}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n\| \le \frac{M}{\epsilon}.$$

Exercice 3

L'espace vectoriel normé $(\mathscr{C}[0,1], \|.\|_1)$ n'est pas un espace de Baire.

Correction:

Soit $B_\infty = \{f \in \mathscr{C}[0,1] \mid \|f\|_\infty \le 1\}$. Notez qu'il ne s'agit pas de la boule unité fermée de l'espace considéré ; ce ne sont pas les mêmes normes. Montrons qu'il s'agit d'un fermé au sens de la norme 1.

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans B_∞ et une fonction $f \in \mathscr{C}[0,1]$ telles que $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$. Supposons par contradiction que f n'est pas dans B_∞, c'est-à-dire $\|f\|_\infty > 1$. Il existe $a \in [0,1]$ et $\delta > 0$ tel que $|f(a)| > 1 + \delta$. Par continuité, il existe $r > 0$ tel que tout x dans l'intervalle $I :=]a-r, a+r[\cap [0,1]$ vérifie $|f(x)| > 1 + \frac{\delta}{2}$. Pour tout naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x &\ge \int_I |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \\
&\ge \int_I (|f(x)| - |f_n(x)|)\mathrm{d}x \\
&\ge \int_I \left(\left(1 + \frac{\delta}{2}\right) - 1\right)\mathrm{d}x \\
&\ge \frac{\delta r}{2} > 0
\end{aligned}$$

Ce qui contredit la convergence de la suite des f_n vers f au sens de la norme 1. Donc $f \in B_\infty$, ce qui montre que B_∞ est fermée au sens de la norme 1.

Supposons par contradiction que $\mathscr{C}[0,1]$ est un espace de Baire. Puisque toute fonction dans $\mathscr{C}[0,1]$ est bornée, on a $\mathscr{C}[0,1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB_\infty$. Il existe donc n_0 tel que $n_0 B_\infty$ est d'intérieur non vide. Ceci implique que B_∞ est d'intérieur non vide. Soient g dans l'intérieur de B_∞ et $r > 0$ tel que $B(g,r) \subseteq B_\infty$. Puisque B_∞ est symétrique, on a que $-B(g,r) = B(-g,r) \subseteq B_\infty$, et par convexité de la boule B_∞, on a

$$B(0,r) \subseteq \frac{1}{2}\left(B(g,r) + B(-g,r)\right) \subseteq B_\infty$$

Montrons maintenant qu'il existe une constante K telle que toute fonction f continue sur $[0,1]$ vérifie $\|f\|_\infty \leq K\|f\|_1$. Supposons f non nulle, alors $\frac{r\cdot f}{2\|f\|_1}$ est élément de $B(0,r)$, donc de B_∞, et on a donc $\|f\|_\infty \leq \frac{2}{r}\|f\|_1$.

Toutefois cette dernière affirmation est une contradiction ! Il suffit de considérer la fonction $f_n(x) = x^n$ où n est un nombre naturel ; on a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$. Or l'affirmation qu'on a montré implique que pour tout n naturel, $1 \leq \frac{K}{n+1}$.

Exercice 4

Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ des espaces de Banach et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{L}(E,F)$ convergeant ponctuellement vers une fonction $T : E \to F$.

Pour tout compact K de E, la suite des T_n converge uniformément sur K vers T.

Correction:

On a $T \in \mathscr{L}(E,F)$ (par le résultat précédent).

Soit K un compact de E. Supposons par l'absurde que la suite des T_n ne converge pas uniformément vers T sur K, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout naturel N, il existe un naturel $n > N$ et un élément x de K tels que $\|T_n(x) - T(x)\| > \varepsilon$.

Il existe donc, pour $N = 0$, un naturel $n_0 > 0$ et un élément x_0 de K tel que $\|T_{n_0}(x_0) - T(x_0)\| > \varepsilon$. En continuant ainsi, on construit une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout naturel k, $\|T_{n_k}(x_k) - T(x_k)\| > \varepsilon$ et $n_k > k$.

Par compacité séquentielle, il existe un élément x de K et une sous-suite $(x_j)_{j\in J}$ de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x. On a, pour tout j dans J :

$$\begin{aligned}
\varepsilon \leq & \|T_{n_j}(x_j) - T(x_j)\| \\
\leq & \|T_{n_j}(x_j) - T_{n_j}(x)\| + \|T_{n_j}(x) - T(x)\| \\
\leq & \|T_{n_j}\| \cdot \|x_j - x\| + \|T_{n_j}(x) - T(x)\| \\
\leq & \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \cdot \|x_j - x\| + \|T_{n_j}(x) - T(x)\|
\end{aligned}$$

Or puisque le dernier membre de cette inégalité converge vers 0 lorsque j tend vers l'infini (par convergence ponctuelle des T_n et car $x_j \xrightarrow{j\in J} x$), il y a contradiction avec la stricte positivité de ε.

Exercice 5

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et B un sous-ensemble de E. Supposons que quel que soit $x^* \in E^*$ que l'on considère, $x^*(B)$ est borné. Alors B est borné.

Correction:

Soit pour $b \in B$, l'application linéaire $T_b : E^* \to \mathbb{K} : x^* \mapsto x^*(b)$. On a par le corollaire 4 que $\|b\| = \max_{\substack{\|x^*\|\leq 1 \\ x^*\in E^*}} |x^*(b)| = \|T_b\|$ Par hypothèse, quel que soit $x^* \in E^*$, $\sup_{b\in B} |T_b(x^*)| = \sup_{b\in B} |x^*(b)|$ est fini. Alors par le théorème de Banach-Steinhaus, $\sup_{b\in B} \|T_b\| = \sup_{b\in B} \|b\|$ est fini, ce qui montre que B est borné.

Exercice 6

Soient $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ deux normes sur un même espace vectoriel E telles que $(E, \|.\|_i)$ est un espace de Banach pour $i = 1, 2$.

S'il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$ (c'est-à-dire que la norme $\|.\|_2$ domine la norme $\|.\|_1$), alors elles sont équivalentes.

Correction:

L'application Id : $(E, \|.\|_2) \to (E, \|.\|_1)$ est linéaire, continue et bijective. Par le théorème d'isomorphisme de Banach, l'identité est bien un homéomorphisme.

Exercice 7

Soit E un espace de Banach. Soit $T : E \to E^*$ linéaire telle que

$$\forall x, y \in E, (Tx)(y) = (Ty)(x)$$

(c'est-à-dire T est symétrique). Alors T est continue.

Correction:

Montrons que le graphe de T est fermé (on a bien E et E^* complets). Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E, soit $(x, S) \in E \times E^*$ tels que $(x_n, Tx_n) \to (x, S)$. Soit $z \in E$. Montrons que $S(z) = (Tx)(z)$. On a, pour tout n, $(Tx_n)(z) = (Tz)(x_n)$. Le premier membre converge vers $S(z)$ par hypothèse et le second vers $(Tz)(x)$ par continuité. D'où $S = Tx$ (unicité de la limite).

[1]

1. D'aprés http ://exo7.emath.fr/ficpdf/ficall.pdf

Chapitre 5

Séparabilité

5.1 Définitions et propriétés

Définition 57

Soit $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique. On dit que E est séparable s'il existe un sous-ensemble D de E dénombrable tel que $\bar{D} = E$.

Un exemple d'espace séparable est $\mathbb{R}$ (avec sa topologie usuelle). En effet, $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble dénombrable dense de $\mathbb{R}$.

Proposition 57

Soient (E, d) un espace métrique et F un sous-ensemble de E. Si E est séparable, alors F est séparable.

Démonstration:

Soit $D = \{x_n \in E \mid n \in \mathbb{N}\}$ tel que $\bar{D} = E$. Pour tous n, k naturels, $k \neq 0$, si $B(x_n, 1/k) \cap F$ est non vide, on choisit $y_{n,k}$ un élément de cette intersection. Posons

$$L = \left\{ y_{n,k} \in F \mid n, k \in \mathbb{N}, k \neq 0, B\left(x_n, \frac{1}{k}\right) \cap F \neq \varnothing \right\}$$

et montrons que $\bar{L} = F$ (où on considère ici l'adhérence au sens de la topologie induite sur F).

Soient $y \in F$ et k un naturel non nul. Comme $\bar{D} = E$, il existe n tel que $d(x_n, y) < 1/k$. Ceci implique que $B(x_n, 1/k) \cap F$ est non vide, et donc $y_{n,k}$ est bien défini. On a, par l'inégalité triangulaire que $d(y, y_{n,k}) \leq d(y, x_n) + d(x_n, y_{n,k}) < 2/k$.

Ceci montre que $\bar{L} = F$. Comme L est au plus dénombrable, la preuve est terminée.

Proposition 58

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(A) E est séparable ;

(B) $B(E) = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ est séparable ;

(C) $S(E) = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ est séparable.

Démonstration:

D'après la proposition 57,

$$\textbf{(A)} \Longrightarrow \textbf{(B)} \Longrightarrow \textbf{(C)}.$$

On montre

$$\textbf{(C)} \Longrightarrow \textbf{(A)}.$$

Soit $D = \{x_n \in S(E) | n \in \mathbb{N}\}$ tel que $\bar{D} = S(E)$. Posons $L = \{qx_n \mid q \in \mathbb{Q}^{>0}, n \in \mathbb{N}\}$. Alors L est dense dans E car pour tout vecteur $x \in E$,

$$x = \|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|} \in [0, +\infty[\cdot S(E) = \mathrm{adh}_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}^{>0} \cdot \mathrm{adh}_E D = \bar{L}.$$

L'argument sous-jacent à ces notations est que la multiplication scalaire $\mathbb{R} \times E \to E$ est continue et qu'en conséquence si $\lambda_n \to \lambda$ et $v_n \to v$ sont deux suites convergentes, respectivement une suite de réels et de vecteurs, alors la limite de la suite $\lambda_n v_n$ existe et vaut λv.

Proposition 59

Soit (E, d) un espace métrique. S'il existe $B \subseteq E$ non dénombrable tel que tous b_1, $b_2 \in B$ distincts on a $d(b_1, b_2) \geq 1$ alors tout sous-ensemble A dense de E est non dénombrable.

Démonstration:

Soient b_1, b_2 deux éléments de B. À l'aide de l'inégalité triangulaire, on obtient que $B(b_1, 1/4) \cap B(b_2, 1/4) = \varnothing$ (sinon b_1 et b_2 sont $1/2$-proches).

Soit A un sous-ensemble dense de E. Alors A rencontre chacune des boules $B(b, 1/4)$, $b \in B$. Comme elles sont disjointes et que B est non dénombrable, cela assure que A est non dénombrable.

Corollaire 14

Soit (E, d) un espace métrique. S'il existe $B \subseteq E$ non dénombrable tel que tous b_1, $b_2 \in B$ distincts on a $d(b_1, b_2) \geq 1$ alors E n'est pas séparable.

5.2 Exercices :

Exercice 1

Montrer que $(c_0, \|.\|_\infty)$, l'espace de suites qui tendent vers zéro, est séparable.

Correction:

Soit $D = \{(q_0, \dots, q_N, 0, \dots) \mid N \in \mathbb{N}, q_j \in \mathbb{Q}\}$ l'ensemble des suites à coefficients rationnels ultimement nulles. Il s'agit d'un ensemble dénombrable (se plonge naturellement dans l'union dénombrable $\bigcup_n \mathbb{Q}^n$). Montrons que $\bar{D} = c_0$.

Soit $x = (x_n)_n \in c_0$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe N tel que tout $n \geq N$ vérifie $|x_n| < \epsilon$. Pour $j = 0 \to N$, il existe $q_j \in \mathbb{Q}$ tel que $|x_j - q_j| < \epsilon$ (car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$). Dès lors, $(q_0, \dots, q_N, \dots)$ est élément de D ϵ-proche de x.

Ceci termine la preuve.

Exercice 2

Soit $p \in [1, +\infty[$. Montrer que $(\ell^p, \|.\|_p)$ est séparable.

Correction:

Soit $D = \{(q_0, \dots, q_N, 0, \dots) \mid N \in \mathbb{N}, q_j \in \mathbb{Q}\}$ l'ensemble des suites à coefficients rationnels ultimement nulles. Il s'agit d'un ensemble dénombrable.

Soient $x = (x_n)_n \in \ell^p$ et $\epsilon > 0$. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} |x_k|^p < \epsilon.$$

Pour $j = 0 \to N$, il existe q_j rationnel tel que $|x_j - q_j|^p < \epsilon/N$. Posons $u = (q_0, \dots, q_N, 0, \dots) \in D$, alors $\|u - x\|_p^p < 2\varepsilon$.

Ceci termine la preuve.

Exercice 3

Montrer que $\mathscr{C}([0,1]; \mathbb{R})$ est séparable.

Correction:

Le théorème d'approximation de Weierstrass assure que l'espace des polynômes est dense dans $\mathscr{C}([0,1]; \mathbb{R})$. Il suffit donc de montrer qu'il existe un sous-ensemble de l'espace des polynômes dénombrable dont l'adhérence contient l'espace des polynômes [1].

Il suffit de considérer l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels. Il est bien dense dans l'ensemble des polynômes (car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).

Exercice 4

Montrer que ℓ^∞ n'est pas séparable.

Démonstration:

On applique le corollaire 14. On prend le sous-ensemble de ℓ^∞ suivant :

$$B = \{x = (x_n)_n \in \ell^\infty \mid \forall n, x_n = \mathrm{ind}_A(n), A \subseteq \mathbb{N}\}.$$

L'ensemble B est bien non dénombrable (on peut y plonger les parties de $\mathbb{N}$) et deux éléments distincts seront distants de 1 ; étant données deux parties différentes de $\mathbb{N}$, il existe un naturel dans une partie et pas l'autre, et les suites associées vaudront respectivement 0 et 1 en la composante correspondante, ce qui implique l'affirmation.

---

1. Rappel : Soient $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique, D dense dans X et $E \subseteq D$ tel que $D \subseteq \bar{E}$. Par monotonicité de l'adhérence, on a $X = \bar{D} \subseteq \bar{\bar{E}} = \bar{E}$, donc E est également dense.

Exercice 5

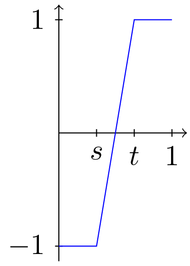
Montrer que $(\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R}))^*$ n'est pas séparable.

Démonstration:

Soit pour $t \in [0,1]$ la forme linéaire appelée évaluation $\varphi_t : C([0,1];\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : f \mapsto f(t)$. Cette forme est continue car pour $f \in C([0,1];\mathbb{R})$, $|\varphi_t(f)| \leq \|f\|_\infty$.

On montre que la famille $(\varphi_t)_{t\in[0,1]}$ satisfait les hypothèses du corollaire 14. Il s'agit bien d'une famille non dénombrable d'éléments de $(\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R}))^*$. Considérons maintenant t, $s \in [0,1]$, $t \neq s$. Pour montrer que φ_t et φ_s vérifient $\|\varphi_t - \varphi_s\| \geq 1$, il suffit de prendre une fonction de norme au plus 1 similaire à celle illustrée à la figure 5.1.

FIGURE 5.1 – Fonction f illustrant $\|\varphi_t - \varphi_s\| \geq 1$



Exercice 6

Montrer que l'espace ℓ^2 n'est pas séparable.

Correction:

Notons chaque élément de ℓ^2 comme suit :

$$(x_n)_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n.$$

Soit $A \subseteq \mathbb{N}$, on pose

$$T_A : \ell^2 \to \ell^2 :$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n \mapsto \sum_{n\in A} x_n e_n.$$

On vérifie facilement que T_A est bien définie, linéaire et continue (on a $\|T_A\| = 1$ si A est non vide, sinon T_A est l'application nulle). L'ensemble $B = \{T_A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$ vérifie les hypothèses du corollaire 14 ; il s'agit bien d'un ensemble non dénombrable de $\mathscr{L}(\ell^2)$, et étant donnés $A, A' \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq A'$, alors il existe (sans perte de généralité, quitte à échanger A et A') $n \in A \setminus A'$, d'où $T_A(e_n) = 1$ et $T_{A'}(e_n) = 0$ ce qui implique $\|T_A - T_{A'}\| \geq 1$.

Chapitre 6

Dualité

6.1 Dual topologique

Soit $\mathbb{K}$ un corps, avec $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

Définition 58

Le dual topologique de$E$ est l'ensemble des formes linéaires continues sur E, c'est-à-dire des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{K}$. On note cet ensemble E'.

Remarque 12

Ainsi, $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ et, par ce qui précède, E' muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par :

$$\|f\| = \sup_{x\in E, \|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x\in E, \|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

est un espace de Banach puisque $\mathbb{K}$ est complet.

Dans ce qui suit, on étudie des exemples classiques d'espaces duaux et on les identifie à des espaces connus.

6.2 Exemples en dimension finie

Dans le cas de dimension finie, le dual algébrique est isomorphe à l'espace vectoriel considéré. En outre, étant donné que toutes les applications linéaires définies sur un espace vectoriel de dimension finie sont continues, il suffit de vérifier qu'on a une isométrie entre les espaces pour avoir l'identification.

La proposition suivante est facile à vérifié.

Proposition 60

Soient $(E, d_E), (F, d_F)$ deux espaces métriques, $i : E \to F$ une isométrie, c'est-à-dire « i préserve les distances », c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in E, d_E(x, y) = d_F(i(x), i(y)).$$

Alors i est injective.

Dans tous les exemples suivants, les applications sont trivialement linéaires.

Exemple 26

On a $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)^* \equiv (\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ grâce à l'isométrie :

$$\begin{aligned} \mathrm{i} : (\mathbb{R}^2, \|.\|_2) &\to (\mathbb{R}^2, \|.\|_2)^* \\ (E_1, E_2) &\mapsto i(E_1, E_2) : (\mathbb{R}^2, \|.\|_2) \to \mathbb{R} \\ (E, F) &\mapsto E_1 E + E_2 F \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que i est une isométrie puisque l'espace considéré est de dimension finie. Soit $(E_1, E_2) \in \mathbb{R}^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned} \|i(E_1, E_2)\| &= \sup_{E^2+F^2 \leqslant 1} |E_1 E + E_2 F| \\ &\leqslant \sup_{E^2+F^2 \leqslant 1} |E_1 E| + |E_2 F| \\ &\leqslant \sup_{E^2+F^2 \leqslant 1} (E_1^2 + E_2^2)^{1/2} (E^2 + F^2)^{1/2} \\ &\leqslant (E_1^2 + E_2^2)^{1/2} \sup_{E^2+F^2 \leqslant 1} (E^2 + F^2)^{1/2} = \|(E_1, E_2)\|_2 \end{aligned}$$

Réciproquement, il suffit si on considère $z = \frac{(E_1, E_2)}{\|(E_1, E_2)\|_2}$; on a $i(E_1, E_2)(z) = \|(E_1, E_2)\|_2$ ce qui assure l'inégalité qui nous permet de conclure.

Exemple 27

On a $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)^* \equiv (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$ via l'isométrie :

$$\begin{aligned} i : (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty) &\to (\mathbb{R}^2, \|.\|_1)^* \\ (E_1, E_2) &\mapsto i(E_1, E_2) : (\mathbb{R}^2, \|.\|_1) \to \mathbb{R} \\ (E, F) &\mapsto E_1 E + E_2 F \end{aligned}$$

Soit $(E_1, E_2) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \|i(E_1, E_2)\| &= \sup_{|E|+|F| \leqslant 1} |E_1 E + E_2 F| \\ &\leqslant \sup_{|E|+|F| \leqslant 1} |E_1 E| + |E_2 F| \\ &\leqslant \sup_{|E|+|F| \leqslant 1} \max(|E_1|, |E_2|)(|E| + |F|) \\ &\leqslant \|(E_1, E_2)\|_\infty \sup_{|E|+|F| \leqslant 1} (|E| + |F|) = \|(E_1, E_2)\|_\infty \end{aligned}$$

Si $\max(|E_1|, |E_2|) = |E_1|$, alors $i(E_1, E_2)$ atteint $\|(E_1, E_2)\|_\infty$ en $(\mathrm{sign}(E_1), 0)$ qui est bien un élément de la boule unité de $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$. L'autre cas est analogue. On peut donc conclure que i est bien une isométrie.

Exemple 28

On a $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)^* \equiv (\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$ via l'isométrie :

$$\begin{aligned} i : (\mathbb{R}^2, \|.\|_1) &\to (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)^* \\ (E_1, E_2) &\mapsto i(E_1, E_2) : (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty) \to \mathbb{R} \\ (E, F) &\mapsto E_1 E + E_2 F \end{aligned}$$

Soit $(E_1, E_2) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned}\|i(E_1,E_2)\| &= \sup_{\max(|E|,|F|)\leqslant 1} |E_1E+E_2F| \\ &\leqslant \sup_{\max(|E|,|F|)\leqslant 1} |E_1E|+|E_2F| \\ &\leqslant \sup_{\max(|E|,|F|)\leqslant 1} (|E_1|+|E_2|)\max(|E|,|F|) \\ &\leqslant \|(E_1,E_2)\|_1 \sup_{\max(|E|,|F|)\leqslant 1} \max(|E|,|F|) = \|(E_1,E_2)\|_1\end{aligned}$$

Il est a de aisé de vérifier que $i(E_1, E_2)$ atteint $\|(E_1, E_2)\|_1$ au point $(\text{sign}(E_1), \text{sign}(E_2))$ de la boule unité de $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$, ce qui assure l'autre inégalité demandé.

Exercice 7

Soient $p > 1$, $q > 1$ le conjugué de p. Montrer qu'on a que $(\mathbb{R}^2, \|.\|_q)^* \equiv (\mathbb{R}^2, \|.\|_p)$.

Notez que tous ces exemples peuvent se généraliser en dimension supérieure à 2.

6.3 Exemples en dimension infinie

À la différence des espaces vectoriels de dimensions finies traitées dans la section précédente, il ne suffit plus de vérifier que l'application considérée est une isométrie, car la surjectivité n'est plus du tout assurée par l'injectivité. Les exemples nécessitent donc plus de travail.

Le premier exemple considéré est celui de l'espace c_0.

Exemple 29

On a $(c_0, \|.\|_\infty)^* \equiv (\ell^1, \|.\|_1)$ via l'isométrie :

$$\begin{aligned} i : (\ell^1, \|.\|_1) &\to && (c_0, \|.\|_\infty)^* \\ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\mapsto && i(x) : (c_0, \|.\|_\infty) \to \mathbb{R} \\ &&& (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k \end{aligned}$$

L'application i est une isométrie :
Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. La fonction $i(x)$ est bien définie car pour tout $y \in c_0$, on a l'inégalité

$$|i(x)(y)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k| \leqslant \|y\|_\infty \|x\|_1$$

Cela implique en particulier que $\|i(x)\| \leqslant \|x\|_1$. Montrons l'inégalité réciproque.
Soit, pour tout naturel N, la suite $(y_n^{(N)})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n^{(N)} = \begin{cases} \text{sign}(x_n) \text{ si } n \leqslant N \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Alors $(y_n^{(N)})_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à la boule unité de c_0 et on a $|i(x)(y^{(N)})| \to \|x\|_1$ quand N tend vers l'infini. Ceci implique que $\|i(x)\| \geq \|x\|_1$, ce qu'on voulait.

L'application i est surjective :
Vérifions la surjectivité de i. Soit $x^* \in (c_0)^*$. On pose $x = (x^*(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ où e_n est la suite de terme général $(1_{\{n\}}(k))_{k\in\mathbb{N}}$.

Il reste à montrer que $i(x) = x^*$, ce qui se vérifie par un simple calcul (il suffit d'observer les sommes partielles puis de passer à la limite), et que x est bien élément de ℓ^1.

Pour tout naturel N, on a :

$$\sum_{k=0}^{N} |x_k| = x^*(y^{(N)}) \leqslant \|x^*\|$$

Ce qui implique que la série des termes de x est absolument convergente, ce qu'on voulait montrer.

Exemple 30

On a $(\ell^1, \|.\|_1)^* \equiv (\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ via l'isométrie :

$$\begin{aligned} i : (\ell^\infty, \|.\|_\infty) \to & \quad (\ell^1, \|.\|_1)^* \\ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto & \quad i(x) : (\ell^1, \|.\|_1) \to \mathbb{R} \\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto & \quad \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k \end{aligned}$$

L'application i est une isométrie :

Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. La fonction $i(x)$ est bien définie car pour tout $y \in \ell^1$, on a l'inégalité

$$|i(x)(y)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k| \leqslant \|x\|_\infty \|y\|_1$$

Cela implique en particulier que $\|i(x)\| \leqslant \|x\|_\infty$. Montrons l'inégalité réciproque.

Soit, pour tout naturel N, la suite $(y_n^{(N)})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n^{(N)} = 1_{\{N\}}(n)\text{sign}(x_n)$$

Alors $(y_n^{(N)})_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de la boule unité de ℓ^1 et on a $|i(x)(y^{(N)})| = |x_N|$ quel que soit le naturel N considéré. Ceci implique que $\|i(x)\| \geq \|x\|_\infty$, ce qu'on voulait.

L'application i est surjective :

Vérifions la surjectivité de i. Soit $x^* \in (\ell^1)^*$. On pose $x = (x^*(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ où e_n est la suite de terme général $(1_{\{n\}}(k))_{k\in\mathbb{N}}$.

Il reste à montrer que $i(x) = x^*$, ce qui se vérifie par un simple calcul (il suffit d'observer les sommes partielles puis de passer à la limite), et que x est bien élément de ℓ^∞.

Pour tout naturel N, on a :

$$|x_k| = x^*(y^{(N)}) \leqslant \|x^*\|$$

Ce qui implique que x est une suite bornée, ce que l'on voulait montrer.

6.4 Bidualité

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Il est possible de considérer les formes linéaires définies sur le dual de E, étant donné qu'il s'agit d'un espace vectoriel normé. On appelle cet espace le bidual de E, et on le note E^{**}.

Définition 59 (Injection canonique)

On appelle injection canonique l'application

$$i : \begin{array}{ccc} E & \to & E^{**} \\ x & \mapsto & i(x) \end{array}$$

où pour tout $x \in E$, $i(x)$ est l'application définie par

$$i(x) : \begin{array}{ccc} E^* & \to & \mathbb{K} \\ x^* & \mapsto & i(x)(x^*) = x^*(x) \end{array}$$

Il est simple de vérifier que l'injection canonique est bien définie (c'est-à-dire qu'elle est bien à image dans E^{**}). De plus, l'injection canonique a les propriétés suivantes :

Proposition 61

L'injection canonique est linéaire, continue et préserve la norme.

Démonstration:

La linéarité est claire, car le dual est un espace d'applications linéaires, ce qui fournit le résultat.

Quant à la préservation des normes, il suffit de constater les égalités suivantes (par le corollaire 4) :

$$\|i(x)\| = \sup_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ x^* \in E^*}} |x^*(x)| = \|x\|$$

Par cet argument, on a $\|i\| = 1$, ce qui implique que i est continue.

Les espaces qui s'identifient à leur bidual via l'injection canonique sont dits réflexifs.

Chapitre 7

Espace de Hilbert

Les espaces vectoriels normés de dimension infinie les plus « simples » sont ceux qu'on appelle *espaces de Hilbert*, car leur norme provient d'un produit scalaire entre vecteurs et le produit scalaire permet de faire beaucoup de géométrie comme en dimension finie, avec une notion naturelle d'orthogonalité, des projections orthogonales, des bases orthonormées, un bon comportement de la dualité, etc... En un certain sens, les espaces de Hilbert sont les espaces de dimension infinie les plus simples possibles, car ils sont dotés de la structure géométrique la plus riche.

7.1 Forme Hermitienne

Soit V un $\mathbb{K}$ espace vectoriel avec $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Définition 60 (Produit scalaire)

On appelle produit scalaire (ou forme hermitienne) toute application

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$$

telle que :

1. $\forall x, y \in V, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
2. $\forall x_1, x_2, y \in V, \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in V, \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. $$\forall x \in V, \langle x, x \rangle > 0$$
   et
   $$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

On dit que le *Produit Scalaire* est une forme hermitienne *définie positive*.
Le couple $(V, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ s'appelle un *Espace Préhilbertien* (ou espace hermitien).

7.2 Propriétés du produit scalaire

7.2.1 Inégalité de Cauchy-Schwartz

Théorème 24 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)

Si $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est un produit scalaire associé à V, alors $\forall x, y \in V$

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle \times \langle y, y\rangle$$

Démonstration:

Soit $q(\lambda) = \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle$ avec λ complexe.
D'après la définition du produit scalaire, $\forall \lambda \in \mathbb{C}, q(\lambda) \geq 0$
Cherchons les extrema de $q(\lambda)$.

$$\begin{aligned} q(\lambda) =& \langle \lambda x, \lambda x\rangle + \langle y, \lambda x\rangle + \langle \lambda x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ =& |\lambda|^2 \langle x, x\rangle + 2\mathrm{Re}(\lambda \langle x, y\rangle) + \langle y, y\rangle \end{aligned}$$

Écrivons $\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle| e^{i\theta}$ et prenons λ tel que $\lambda = re^{i\theta}$.

$$q(re^{i\theta}) = r^2 \langle x, x\rangle + 2r|\langle x, y\rangle| + \langle y, y\rangle \geq 0 \ \forall r \in \mathbb{R}$$

$$\Delta = 4|\langle x, y\rangle|^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leqslant 0$$

D'où :

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

Corollaire 15 (Inégalité Minkowsky)

$$\forall x, y \in V : \quad \langle x + y, x + y\rangle \leqslant \left(\sqrt{\langle x, x\rangle)} + \sqrt{\langle y, y\rangle}\right)^2$$

Démonstration:

$\forall x, y \in V$:

$$0 \leqslant \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) + \langle y, y\rangle$$

Comme $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \leqslant |\langle x, y\rangle|$, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \langle x + y, x + y\rangle \leqslant& \langle x, x\rangle + 2|\langle x, y\rangle| + \langle y, y\rangle \\ \text{Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : } \leqslant& \langle x, x\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle)}\sqrt{\langle y, y\rangle} + \langle y, y\rangle \\ \leqslant& \left(\sqrt{\langle x, x\rangle)} + \sqrt{\langle y, y\rangle}\right)^2 \end{aligned}$$

Corollaire 16

Un produit scalaire sur V induit une norme sur V définie par :

$$\forall x \in V, \ \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Conséquence : Chaque espace préhilbertien est un espace normé (réciproque fausse).

Définition 61

$x, y \in V$ sont dits *Orthogonaux* si $\langle x, y\rangle = 0$. Notations : $x \perp y$.

Théorème 25 (Théorème de Pythagore)

$\forall (x, y) \in V \times V \quad \langle x, y\rangle = 0 \Longrightarrow \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle$

Définition 62

Soit A un sous ensemble d'un espace préhilbertien V.On appelle orthogonal de A l'ensemble

$$A^{\perp} = \{x \in V ;\, \forall y \in A \quad \langle x, y\rangle = 0\}$$

Théorème 26

$A^{\perp}$ est un sous espace vectoriel fermé de V

Démonstration:

1. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, x et $y \in A^{\perp}$ alors,
   $\forall z \in A \quad \lambda\langle x, z\rangle = 0$ et $\langle y, z\rangle = 0$ donc,
   $\forall z \in A\ \langle \lambda x + y, z\rangle = 0$,d'où $\lambda x + y \in A^{\perp}$
2. Soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de $A^{\perp}$ qui converge vers une limite x, on a
   — Par définition de $A^{\perp}$,$\forall y \in A, \langle y, x_n\rangle = 0$.
   — Par continuité du produit scalaire $\langle y, x\rangle = \lim\langle y, x_n\rangle$ donc $\forall y \in A, \langle y, x\rangle = 0$. D'où $x \in A^{\perp}$

Définition 63 (Espace de Hilbert)

On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien complet relativement à la norme associée au produit scalaire.

Remarque 13

Un espace de Hilbert est donc un espace de Banach.

Exemple 31

$\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces de Hilbert (car de dimension finie)
$L^2([a, b], \mathbb{C})$, est un espace de Hilbert associé au produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(\bar{x})dx$$

Exemple 32

L'espace vectoriel

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{K} : n \in \mathbb{N} \,|\, \sum_{n\geqslant 0} |x_n|^2 < \infty\}$$

muni du produit scalaire

$$\forall x, y \in \ell^2(\mathbb{N}) : \langle x, y\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} := \sum_{n\geqslant 0} x_n\overline{y_n}.$$

est un espace de Hilbert
Soit $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\ell^2(\mathbb{N})$:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > p\ \geqslant N : \|x^n - y^p\|_{\ell^2(\mathbb{N})} < \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > p \geqslant N\ \|x^n - x^p\|^2 = \sum_{j\geqslant 0} |x_j^n - x_j^p|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

D'où

$$|x_j^n - x_j^p| \leqslant \varepsilon\ \forall j \in \mathbb{N}$$

Ainsi

$$\forall j \in \mathbb{N}\ (x_j^n))_{n\in\mathbb{N}}$$

est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ qui est complet, donc $\exists x_j \in \mathbb{K}$ telle que $\lim_{n\to\infty} |x_j^n - x_j| = 0$.

Il faut montrer que $x = (x_j)j \in \mathbb{N}$ est la limite dans $\ell^2(\mathbb{N})$ de la suite x^n.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ tel que

$$\forall n > p \geqslant N \sum_{j\geqslant 0} |x_j^n - x_j^p|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

Il s'ensuit que

$$\forall J \in \mathbb{N}\ \underbrace{\sum_{j=0}^{J} |x_j^n - x_j^p|^2}_{\text{somme partielle}} \leqslant \varepsilon^2,$$

par passage à la limite sur p : $\sum_{j=0}^{J} |x_j^n - x_j^p|^2 \leqslant \varepsilon^2$

En conclusion $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ telle que $\forall n \geqslant N\ \ \|x^n - x\| < \varepsilon \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x^n = x$.

Mais $x \overset{?}{\in} \ell^2(\mathbb{N})$.
Vérifions que $x \in \ell^2(\mathbb{N})$:

$$x = \underbrace{x - x_n}_{\in \ell^2(\mathbb{N})} + \underbrace{x_n}_{\in \ell^2(\mathbb{N}}\ .$$

Comme $\ell^2(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel alors x $\in \ell^2$ **Formule de Polarisation**
Toute forme hermitienne

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$$

vérifie la formule de polarisation :

$$\langle x, y \rangle \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) & \text{si} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right) & \text{si} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Théorème 27 (Jordan von Neumann)

Soit E un $\mathbb{K}$espace vectoriel normé avec $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Alors E est un espace préhilbertien si et seulement si $\|\cdot\|$ vérifie l'identité du parallélogramme :

$$\forall x, y \in E \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Démonstration:

Condition nécessaire : Par application directe de la définition de la norme induite par un produit scalaire, on obtient le résultat demandé.

Condition suffisante ; La symétrie est évidente ainsi que définie positive ; la bilinearité découle de l'identité du parallélogramme : (on étudie le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle =& \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right) \\ =& \frac{1}{2}\left(\left\|x + \frac{y+z}{2}\right\|^2 - \left\|x - \frac{y+z}{2}\right\|^2\right) \\ =& 2\left\langle x, \frac{y+z}{2} \right\rangle & 1) \end{aligned}$$

$$x = 0 \text{ in } (*) \Rightarrow \langle x, y \rangle = 2\left\langle x, \frac{y}{2} \right\rangle \qquad 2)$$

$$1) \text{ and } 2)\ \Rightarrow \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle = \langle x, y+z \rangle \qquad 3)$$

par récurrence

$$\text{de } 3) : \langle x, ny \rangle = n \langle x, y \rangle \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad 4)$$

$z = -y$ dans 3) $\Rightarrow \langle x, y \rangle = -\langle x, -y \rangle \Rightarrow$ ainsi la relation 4) est obtenue pour tout $n \in \mathbb{Z}_0$.
Soit $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ de 4) et $\frac{y}{m}$ à la place de y :

$$\left\langle x, \frac{n}{m} y \right\rangle = \frac{n}{m} \cdot m \left\langle x, \frac{y}{m} \right\rangle = \frac{n}{m} \langle x, y \rangle$$

La relation est obtenu pour tout $n \in \mathbb{Q}$ et par continuité du produit scalaire pour tout $n \in \mathbb{R}$.

7.3 Théorème de la projection

Soit V un espace vectoriel.

Définition 64 (Espace convexe)

$C \subset V$ est un convexe si $\forall x, y \in C,\ \forall \lambda \in [0, 1]$:

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in C$$

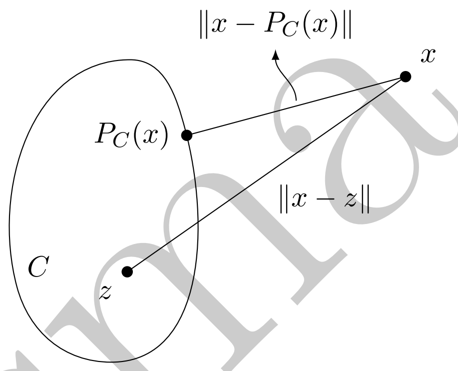
(C'est-à-dire $[x, y]$ est entièrement contenu dans C)

Théorème 28

Soit H un espace de Hilbert, et soit $C \subset H$ un convexe fermé, $C \neq \varnothing$. Alors $\forall x \in H, \exists! u \in C$ tel que :

$$\|x - u\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|$$

u s'appelle la projection de x sur C, et on note $u = P_C(x)$



Démonstration:

1. Existence

Soit $u_n \in C$, on définit :

$$d_n = \|x - u_n\|,\ d_n \to d = \inf_{z \in C} \|x - z\|$$

E espace hermitien $\Leftrightarrow \forall a, b \in E, \|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$
Montrons que $\{u_n\}$ est de Cauchy. On pose :

$$a = x - u_m,\ b = x - u_n$$

On a :

$$\|a + b\|^2 = \|2x - u_n - u_m\|^2$$

$$\|a-b\|^2 = \|u_n - u_m\|^2$$

$$\begin{aligned}\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 =& 2(\|x-u_n\|^2 + \|x-u_m\|^2)\\ =& \left\|2\left(x - \frac{u_n+u_m}{2}\right)\right\|^2 + \|u_n - u_m\|^2\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\|x - \frac{u_n+u_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u_n-u_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2)$$
$$\Leftrightarrow \left\|\frac{u_n-u_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - \left\|x - \frac{u_n+u_m}{2}\right\|^2$$

Or, comme C est un convexe, u_n et $u_m \in C$, alors :

$$\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_m \in C$$

et :

$$\left\|x - \frac{u_n+u_m}{2}\right\| \leqslant d$$

donc :

$$0 \leqslant \left\|\frac{u_n-u_m}{2}\right\|^2 \leqslant \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2 - 2d) \to 0$$

Donc u_n est de Cauchy.
$\exists u = \lim u_n$ (H complet) et comme C fermé, $u \in C$

2. Unicité

Supposons qu'il existe u_1 et $u_2 \in C$ tels que : $\|x-u_1\| = d$ et $\|x-u_1\| = d$.
En utilisant l'égalité de parallélogramme avec $a = x - u_1$ et $b = x - u_2$ on trouve
$\|u_1 - u_2\|^2 + \|2x - (u_1+u_2\|^2 = 2\|x-u_1\|^2 + 2\|x-u_2\|^2$.
$\|u_1 - u_2\| \leqslant 2d^2 + 2d^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(u_1+u_2)\|^2 \leqslant 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$.

$$\Rightarrow \|u_2 - u_1\| = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2$$

Théorème 29

Soit H un espace de Hilbert, et soit $C \subset H$ un convexe fermé, $C \neq \varnothing$. Alors $\forall x \in H, \exists! u \in C$ tel que : $\forall v \in C$ $\mathrm{Re}\langle x-u, v-u\rangle \leqslant 0$.

Démonstration:

D'après le théorème 28 $\forall x \in H, \exists! u \in C$ tel que :

$$\|x-u\| = \inf_{z\in C}\|x-z\|$$

Soit $w \in C$, $\lambda \in [0,1]$, alors :

$$v = \lambda w + (1-\lambda)u \in C$$

$\|x-u\| \leqslant \|x-v\| = \|x - \lambda w - (1-\lambda)u\|$
$\leqslant \|x - u - \lambda(w-u)\|$

$$\|x-u\|^2 \leqslant \|x-u\|^2 + 2\lambda\mathrm{Re}\langle x-u, u-w\rangle + \lambda^2\|w-u\|^2$$

$$\Rightarrow 2\mathrm{Re}\langle x-u, w-u\rangle \leqslant \lambda\|w-u\|^2$$

Si $\lambda \to 0^+$, alors :

$$\forall v \in C,\ \mathrm{Re}\langle x-u, v-u\rangle \leqslant 0$$

Corollaire 17

Sous les mêmes hypothèses :

$$\forall x_1, x_2 \in H, \|P_C x_1 - P_C x_2\|_H \leqslant \|x_1 - x_2\|_H$$

Démonstration:

D'après le théorème, $\forall v \in C$:

$$\mathrm{Re}\langle x_1 - P_C x_1, v - P_C x_1\rangle \leqslant 0 \tag{7.1}$$
$$\mathrm{Re}\langle x_2 - P_C x_2, v - P_C x_2\rangle \leqslant 0 \tag{7.2}$$

On prend $v = P_C x_2$ dans (1) et $v = P_C x_1$ dans (2) :

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle x_1 - P_C x_1, P_C x_2 - P_C x_1\rangle &\leqslant 0\\ \mathrm{Re}\langle P_C x_2 - x_2, P_C x_2 - P_C x_1\rangle &\leqslant 0\end{aligned}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \mathrm{Re}\langle x_1 - x_2, P_C x_2 - P_C x_1\rangle + \|P_C x_2 - P_C x_2\|^2 \leqslant 0$$

$$\begin{aligned}\|P_C x_2 - P_C x_1\|^2 \leqslant &\quad \mathrm{Re}\langle x_1 - x_2, P_C x_1 - P_C x_2\rangle\\ \leqslant &\|x_1 - x_2\|\|P_C x_1 - P_C x_2\|\\ \Rightarrow \|P_C x_2 - P_C x_1\| \leqslant &\|x_1 - x_2\| \text{ si } x_1 \neq x_2\end{aligned}$$

Théorème 30 (projection dans un sous-espace fermé)

Soient $x \in H$ et $M \subset H$, un sous espace fermé de H.
$\Rightarrow \; u = P_M x$ vérifie :

$$\begin{cases} u \in M \\ \langle x - u, v\rangle = 0 \; \forall v \in M \end{cases}$$

Démonstration:

M est un sous-espace fermé donc $\forall x, y \in M, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha x + \beta y \in M$.
$\Rightarrow M$ est un convexe fermé.

D'après le théorème précédent, on a :

$$\forall v \in M, \mathrm{Re}\langle x - u, v - u\rangle \leqslant 0$$

Comme M est un sous-espace vectoriel, si$v \in M$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \; \alpha v \in M$.

$$\forall v \in M, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \mathrm{Re}\langle x - u, \alpha v - u\rangle \leqslant 0$$

D'où $\forall w \in M, \; w = \alpha v - u$:

$$\mathrm{Re}\langle x - u, w\rangle \leqslant 0$$

De même, si $w \in M$, alors $-w \in M$, donc :

$$\mathrm{Re}\langle x - u, w\rangle \geq 0$$

Donc

$$\mathrm{Re}\langle x - u, w\rangle = 0$$

Encore une fois, si $w \in M$ alors $iw \in M$ et :

$$\mathrm{Re}\langle x - u, iw\rangle = -\Im\langle x - u, w\rangle = 0$$

par les mêmes arguments que pour la partie réelle.

Théorème 31 (corollaire)

Soit F un sous-espace *fermé* de H alors : $H = F \oplus F^{\perp}$.

Démonstration:

F est convexe puisque $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}\ \forall x, y \in F\ \alpha x + \beta y \in F \Longrightarrow$ cela est vrai si $\alpha = t,\ \beta = 1 - t,\ t \in [0, 1]$.

$0 \in F \cap F^{\perp}$ car F et $F^{\perp}$ sont des sous-espaces vectoriels.
De plus si $x \in F \cap F^{\perp}$ alors
$\langle x, x\rangle = 0 \Longrightarrow ||x||^2 = 0 \Longrightarrow x = 0_H$ Montrons que tout $x \in H$ se décompose d'une manière unique ; $x = u + w$ où $u \in F$ et $w \in F^{\perp}$.
L'existence d'une telle décomposition vient du fait que
$x = P_F(x) + (I - P_F)x$ où P est la projection orthogonale de H sur F.
Supposons maintenant que $x = u + w$où $u \in F$ et $w \in F^{\perp}$.
Alors $Px = Pu + Pw = u$ (car $Pw = 0$ et $Pu = u$) et $(I - P)x = (I - P)u + (I - P)w = u - Pu + w - Pw = w$
cette décomposition et donc unique. Conclusion $\mathrm{Re}\langle x - y_0, dy\rangle$ donc $H = F \oplus F^{\perp}$.

Exemple 33

Montrer que P est linéaire continue et satisfait $P^2 = P$.

7.4 Base Hilbertienne

Soit D un ensemble fini ou dénombrable.Dans toute la suite on conviendra que $D = \{1, 2...d\}$ si D est fini et $D = \mathbb{N}^*$si D est dénombrable.
Soit alors H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\in D}$ une famille de vecteurs de H

Définition 65 (système orthonormal)

On dit que $(e_n)_{n\in D}$ est un système orthonormal dans H si $\forall n, m : \langle x_n, x_m\rangle = \delta_{nm}$

Définition 66 (système total)

On dit que $(e_n)_{n\in D}$ est un système total dans H si $\{e_n; n \in D\}^{\perp} = \{0\}$

Définition 67 (Base Hilbertienne)

Un système orthonormal total $(e_n)_{n\in D}$ de H est appelé base hilbertienne de H.

Exemple 34

$H = \ell^2(\mathbb{N}), \quad \mathscr{F} = \{e_1, e_2, ...\}$
avec $e_j(i) = \delta_{ij} \to (0, 0 \cdots, 0, 1, 0 \cdots 0)$.
$\mathscr{F}$est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Théorème 32 (Inégalité de Bessel)

Soit (x_n) une suite *orthonormale* ($\forall n, m(x_n|x_m) = \delta_{nm}$) dans H. Alors
$\forall x \in H \quad \sum_{n\geqslant 0} |\langle x, x_n\rangle|^2$ est convergente et $\sum_{n\geqslant 0} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leqslant ||x||^2$.

Théorème 33 (Égalité de Parseval)

Soit (e_n) une *base Hilbertienne* de H alors

1. La série $\sum_{n\geqslant 0} |(x|e_n)|^2$ est convergente et $||x||^2 = \sum_{n\geqslant 0} |(x|e_n)|^2$,
2. La série $\sum_{n\geqslant 0} (x|e_i)e_i$ est convergente dans H et $\sum_{i\geqslant 0} (x|e_i)e_i = x$.

7.5 Dual d'un espace de Hilbert

Définition 68 (Dual)

Le dual de H est $\mathscr{L}_C(H)$, l'ensemble des opérateurs linéaires continues de H dans $\mathbb{K}$

Théorème 34 (de Riesz-Fréchet)

Soit H' dual de H, espace de Hilbert.

$$\forall \phi \in H',\ \exists! f \in H;\ \forall v \in H, \phi(v) = \langle f, v\rangle$$

Démonstration:

Existence :

Si $\phi = 0$ alors $f = 0$

Soit $\phi \neq 0$. On a $\ker \phi \neq H$ (car $\phi \neq 0$).

$\ker \phi$ est un fermé (car image réciproque par une application continue d'un fermé, $\{0\}$)

Soit $z \notin \ker \phi$ et soit

$$u = \frac{z}{\phi(z)} \in (\ker \phi)^{\perp}$$

$\phi(u) = 1$ car ϕ linéaire.

Soit maintenant $v \in H$, alors :

$$\phi(v - \phi(v)u) = \phi(v) - \phi(v)\phi(u) = 0$$

D'où :

$$v - \phi(v)u \in \ker \phi$$

Donc $v - \phi(v)u$ et u sont orthogonaux, ie :

$$0 = \langle v - \phi(v)u, u\rangle = \langle v, u\rangle - \phi(v)\|u\|^2$$

$$\Rightarrow \phi(v) = \langle v, \frac{u}{\|u\|^2}\rangle = \langle v, f\rangle$$

Ce qui démontre l'existence de f.

Unicité

Soient f et $f' \in H$ tels que :

$$\forall v \in H, \phi(v) = \langle v, f\rangle = \langle v, f'\rangle$$

$$\Rightarrow \langle v, f - f'\rangle = 0$$

Prenons $v = f - f'$:

$$\langle f - f', f - f'\rangle = \|f - f'\|^2 = 0 \Rightarrow f = f'$$

7.6 Adjoint d'un opérateur

Soient H_1 et H_2 des espaces de Hilbert, et $A : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire continue.

Définition 69

L'opérateur $A^* : H_2' \to H_1'$ est adjoint à A si :

$$\forall x \in H_1,\ y \in H_2',\ \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$$

La notion d'adjoint généralise le concept de transposé.

(H' : dual de H)

D'après le théorème de Riesz-Fréchet, si H espace de Hilbert alors H est isomorphe à H'. Alors si H_1 et H_2 sont de Hilbert :

$$\forall x \in H_1,\ \forall y \in H_2,\ \langle Ax, y\rangle_{H_2} = \langle x, A^*y\rangle_{H_1}$$

Théorème 35

$A \in \mathscr{L}_C(H_1, H_2)$. On a :

$$\|A\| = \|A^*\|$$

$$\exists! A^* \text{ linéaire continue}$$

Démonstration:

Soit $y \in H_2$. Considérons :

$$\Phi(x) = \langle Ax, y\rangle$$

qui est une forme linéaire sur H_1.
$\Phi(x)$ est continue, en effet :

$$\|\phi(x)\| \leqslant \|Ax\| \times \|y\| \leqslant \|A\| \times \|x\| \times \|y\|$$

Φ bornée donc continue.
Comme Φ est linéaire continue sur H_1, espace de Hilbert, on peut utiliser le théorème de Riesz-Fréchet.
Donc $\exists! u \in H_1;\ \Phi(x) = \langle x, u\rangle$
Notons-le $u = A^*y$, ce qui donne l'existence et l'unicité de A^*

Montrons que A^* est linéaire : $\forall y_1,\ y_2 \in H_2,\ \forall x \in H_1$:

$$\begin{aligned}\langle x, A^*(y_1 + y_2)\rangle =& \langle Ax, y_1 + y_2\rangle \\ =& \langle Ax, y_1\rangle + \langle Ax, y_2\rangle \\ =& \langle x, A^*y_1\rangle + \langle x, A^*y_2\rangle \\ =& \langle x, A^*y_1 + A^*y_2\rangle\end{aligned}$$

$\forall y \in H_2,\ \forall x \in H_1,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}\langle x, A^*(\lambda y)\rangle =& \langle Ax, \lambda y\rangle \\ =& \bar{\lambda}\langle Ax, y\rangle \\ =& \bar{\lambda}\langle x, A^*y\rangle \\ =& \langle x, \lambda A^*y\rangle\end{aligned}$$

A est continue :

$$\begin{aligned}\|Ax\|^2 =& \langle A^*Ax, x\rangle \\ \leqslant& \|A^*Ax\| \times \|x\| \\ \leqslant& \|Ax\| \times \|A^*\| \times \|x\|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|Ax\| \leqslant \|A^*\|\|x\|$$

Donc $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. De même, $\|A^*\| \leqslant \|A\|$ (prendre $\|A^*x\|^2$)
D'où $\|A\| = \|A^*\|$ donc A^* est borné (car A borné) donc continue.

Définition 70

- A est auto-adjoint si $A = A^*$

7.7 Exercices :

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B).$$

1. Démontrer que cette formule définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que, pour tous $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a

$$(\mathrm{tr}(AB))^2 \leqslant \mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2).$$

1. Il est très facile de vérifie que $\langle \bullet, \bullet\rangle$ définit une forme bilinéaire symétrique. Reste à démontrer qu'elle est définie positive. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et notons $(b_{i,j}) = A^T A$. Alors

$$b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 \geqslant 0.$$

Ainsi,

$$\mathrm{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 \geq 0.$$

On a bien affaire à une forme positive. De plus, si $\langle A, A\rangle = 0$, alors pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tout $k = 1, \ldots, n$, on a $a_{k,i} = 0$, et donc $A = 0$: la forme est définie.

2. On va appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour A, B symétriques, on a en effet

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$$

et donc

$$\left(\mathrm{tr}(AB)\right)^2 \leq \mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2).$$

Exercice 1

Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien.

Montrer l'identité du parallélogramme

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel préhilbertien et x, y deux éléments de E. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Correction:

Remarquons que, puisque tout est positif, l'inégalité est équivalente à $\|x+\lambda y\|^2 \geq \|x\|^2$. Or,

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$$

et donc l'inégalité est équivalente à

$$2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0.$$

Supposons d'abord que x est orthogonal à y, et donc que $\langle x, y\rangle = 0$. Alors l'inégalité précédente est bien vérifiée pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Réciproquement, supposons que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0 \iff \lambda(2\langle x, y\rangle + \lambda\|y\|) \geq 0.$$

Dressant le tableau de signes de ce produit, il ne peut être toujours positif que si $2\langle x, y\rangle + \lambda\|y\|$ est toujours nul, c'est-à-dire si $y = 0$, ou si $2\langle x, y\rangle + \lambda\|y\|$ ne s'annule qu'en 0, c'est-à-dire si $\langle x, y\rangle = 0$. Dans les deux cas, on trouve bien que x et y sont orthogonaux.

Exercice 3

Soit E un espace préhilbertien, et A et B deux parties de E. Démontrer les relations suivantes :

1. $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.
2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
3. $A^\perp = \text{vect}(A)^\perp$;
4. $\text{vect}(A) \subset A^{\perp\perp}$.
5. On suppose de plus que E est de dimension finie. Démontrer que $\text{vect}(A) = A^{\perp\perp}$.

Correction:

1. Soit $y \in B^\perp$. Alors, pour tout $x \in A$, on a $x \in B$ et donc $\langle x, y\rangle = 0$, ce qui prouve que $y \in A^\perp$.
2. On commence par prendre $x \in (A \cup B)^\perp$, et prouvons que $x \in A^\perp$. En effet, si $y \in A$, on a $y \in A \cup B$, et donc $\langle x, y\rangle = 0$. Ceci montre la première inclusion. Réciproquement, si $x \in A^\perp \cap B^\perp$, prenons $y \in (A \cup B)$. Alors si $y \in A$, on a bien $\langle x, y\rangle = 0$ puisque $x \in A^\perp$, et le cas où $y \in B$ se traite de manière analogue.
3. D'après la première question, puisque $A \subset \text{vect}(A)$, on a
$$\text{vect}(A)^\perp \subset A^\perp.$$
Réciproquement, si $y \in A^\perp$, prenons $x \in \text{vect}(A)$. Alors on peut trouver des éléments $a_1, \dots, a_n$ de A et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que
$$x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n.$$
On a alors
$$\begin{aligned}\langle y, x\rangle &= \langle y, \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n\rangle\\ &= \lambda_1\langle y, a_1\rangle + \cdots + \lambda_n\langle y, a_n\rangle\\ &= \lambda_1 0 + \cdots + \lambda_n 0\\ &= 0,\end{aligned}$$
et donc $y \in \text{vect}(A)^\perp$.
4. On va commencer par prouver que $A \subset (A^\perp)^\perp$. Mais, soit $x \in A$. Choisissons $y \in A^\perp$. On a alors $\langle x, y\rangle = 0$, ce qui prouve que $x \in A^{\perp\perp}$. D'autre part, $(A^\perp)^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient A. Il contient donc le sous-espace vectoriel engendré par A et on a bien l'inclusion demandée.
5. Notons $B = \text{vect}(A)$ et $n = \dim(E)$. Alors d'après la question précédente,
$$(A^\perp)^\perp = (B^\perp)^\perp.$$
D'autre part,
$$\dim(B^\perp) = n - \dim B \implies \dim((B^\perp)^\perp) = n - \dim(B^\perp) = \dim(B).$$
Ainsi, d'après la question précédente, on a $B \subset (B^\perp)^\perp$ et ces deux sous-espaces ont la même dimension. Ils sont donc égaux.

Exercice 4

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E. Montrer que :

1. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

2. $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

Correction:

On remarque d'abord que si $A \subset B$, alors on a $B^\perp \subset A^\perp$, ce qui est immédiat en appliquant la définition. Ainsi, puisque $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$, on obtient $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$. Prenons maintenant $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Tout $z \in F+G$ s'écrit $z = f+g$, avec $f \in F$ et $g \in G$. Alors :

$$(x,z) = (x,f) + (x,g) = 0,$$

ce qui prouve que $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$. D'autre part, on a $F \cap G \subset F$ et $F \cap G \subset G$, ce qui donne respectivement $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ et $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Puisque $(F \cap G)^\perp$ est un sous-espace vectoriel, il est stable par addition, et donc on a $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Dans le cas où E est un espace de dimension finie, on peut obtenir l'autre inclusion en comparant les dimensions des sous-espaces :

$$\begin{aligned}
\dim(F^\perp + G^\perp) &= \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F^\perp \cap G^\perp) \\
&= \dim(F^\perp) + \dim(G^\perp) - \dim(F+G)^\perp \\
&= \dim(E) - \dim(F) - \dim(G) + \dim(F+G) \\
&= \dim(E) - \dim(F \cap G) \\
&= \dim((F \cap G)^\perp).
\end{aligned}$$

Exercice 5

Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on note M_N le sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ formé des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^N x_n = 0$

1. Montrer que l'application $(x_n)_n \mapsto \sum_{k=0}^N x_k$ est linéaire continue de $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$. Que peut-on en déduire sur M_N ? Conclure que $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}) = M_N \oplus M_N^\perp$.
2. Soit $E = \{(y_n)_n$ telles que, pour $0 \le i \langle j \le N,$ on ait $y_i = y_j$ et $y_n = 0$ pour $n \rangle N\}$.
3. Montrer que l'orthogonal $M_N^\perp$ de M_N contient E.
4. Montrer que $M_N^\perp = E$ (remarquer que, pour $0 \leqslant i < j \le N$, la suite (x_n) telle que $x_i = 1$, $x_j = -1$ et $x_n = 0$ si $n \ne i$ et $n \ne j$ appartient à M_N).

Correction:

1. Notons T cette application. On a
$$|T(x)| \le \sum_{n=0}^N |x_n| \le \|x\|_2 \left(\sum_{n=0}^N 1^2\right)^{1/2} \le N^{1/2}\|x\|_2$$
où le point crucial est l'inégalité de Cauchy-Schwarz. T est donc continue, et M_N est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$. On en déduit le résultat demandé.
2. Soit $x \in M_N$ et $y \in E$. On a
$$\langle x,y\rangle = \sum_{k=0}^N x_k\overline{y_k} = \overline{y_0}\sum_{k=0}^N x_k = 0.$$
3. Il faut montrer l'inclusion contraire. Prenons donc $y \in M_N^\perp$, et soit x la suite donnée par l'énoncé, membre de M_N, avec $i = 0$ et $0\langle j \le N$. On a
$$\langle x,y\rangle = y_0 - y_j = 0,$$
ce qui prouve que $y_j = y_0$ pour $j = 0,\dots,N$. D'autre part, pour $j\rangle N$, on considère la suite x tel que $x_j = 1$ et $x_k = 0$ pour $k \ne i$. Le produit scalaire de y avec cette suite donne $y_j = 0$, ce qui prouve que $y \in E$.

Exercice 6

Soit $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (espace de Hilbert réel). On note $C = \{x = (x_n) \in H;\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geq 0\}$.

1. Démontrer que C est convexe fermé.
2. Déterminer la projection sur ce convexe C.
3. Reprendre la question précédente avec $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

Correction:

1. Il suffit d'appliquer la définition pour montrer que C est convexe. D'autre part, C est fermé : si (x^p) est une suite de C qui converge vers $x \in H$, et si $x_n^p \geq 0$, on a clairement par passage à la limite $x_n \geq 0$, et donc $x \in C$.
2. Soit $x \in \ell^2$. Il faut deviner la formule pour $P_C(x)$. La seule façon de s'en sortir est de faire un dessin en dimension 2 et d'essayer de deviner ainsi quelle est la formule pour $P_C(x)$. En dimension 2, C correspond simplement au quart de plan en haut à gauche. Il y a 4 cas différents pour déterminer la projection de x, en fonction de sa position dans l'un ou l'autre des demi-plans. C'est ainsi que l'on est conduit à poser $P_C(x) = (y_n)$, où $y_n = x_n$ si $x_n \geq 0$, et $y_n = 0$ sinon. Pour prouver qu'il s'agit bien de la projection de x sur C, il suffit de vérifier que, pour tout z de C, on a :
$$\langle x - y, z - y \rangle \leq 0.$$
Mais,
$$\langle x - y, z - y \rangle = \sum_{n \geq 0} (x_n - y_n)(z_n - y_n).$$
Or, à $n \geq 0$ fixé, deux cas sont possibles :
   — Soit $x_n \geq 0$, et dans ce cas $x_n - y_n = 0$.
   — Soit $x_n \leq 0$, mais alors $y_n = 0$, et donc $(x_n - y_n)(z_n - y_n) \leq 0$.

   Dans tous les cas, on a $(x_n - y_n)(z_n - y_n) \leq 0$, ce qui prouve que $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$.
3. Il faut légèrement adapter pour le cas complexe. Il faut et il suffit cette fois que $y = P_C(x)$ vérifie pour tout z de $\mathbb{C}$
$$\mathrm{Re}(\langle x - y, z - y \rangle) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n \geq 0} (x_n - y_n)\overline{(z_n - y_n)} \right) \leq 0.$$
Dans tous les cas, $z_n - y_n$ est réel, et donc
$$\mathrm{Re}(\langle x - y, z - y \rangle) = \sum_{n \geq 0} (z_n - y_n) \left(\mathrm{Re}(x_n) - y_n \right).$$
On est alors conduit à poser $y_n = \mathrm{Re}(x_n)$ si $\mathrm{Re}(x_n) \geq 0$ et $y_n = 0$ sinon. On obtient bien que la quantité précédente est négative.

Exercice 7

Soit H un espace de Hilbert, et F un sous-espace fermé de H, non réduit à $\{0\}$. On note p la projection orthogonale de H sur F. Démontrer que :

1. $p \circ p = p$.
2. $\forall (x, y) \in H^2,\ \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$.
3. $\|p\| = 1$.

Correction:

Il est clair que si $z \in F$, on a $p(z) \in F$. On en déduit que $p(p(x)) = p(x)$ pour tout x de H.

Décomposons x en $p(x) + x_1$, où x_1 est orthogonal à F, et y en $p(y) + y_1$. On a alors :

$$\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle + \langle p(x), y_1\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$$

où la dernière inégalité vient de ce que y_1 est orthogonal à F tout entier, et donc en particulier à $p(x)$. La même égalité est vraie, pour les mêmes raisons, pour $\langle x, p(y)\rangle$.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 = \|x\|^2.$$

Ceci entraîne

$$\|p(x)\| \leq \|x\|,$$

et donc $\|p\| \leq 1$. Maintenant, puisque F n'est pas réduit à $\{0\}$, il existe x dans F de norme 1. Pour ce x, on a $\|p(x)\| = \|x\| = 1$, ce qui prouve que $\|p\| = 1$.

Exercice 8

Soit H un espace de Hilbert, et F un sous-espace fermé de H, non réduit à $\{0\}$. On note p la projection orthogonale de H sur F. Si x est un élément de H, on appelle distance de x à F la quantité

$$d(x, F) = \inf\{\|x - y\|;\ y \in F\}.$$

1. Montrer que $d(x, F) = \|x - p(x)\|$.
2. Montrer que $d(x, F) = \max\{|\langle x, z\rangle|;\ z \in F^\perp \text{ et } \|z\| = 1\}$.
3. On suppose dans cette question que F est un sous-espace de dimension finie, et on note $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de F.
   - Quel résultat du cours assure l'existence d'une telle base orthonormale ?
   - Déterminer en fonction de $e_1, \dots, e_n$, l'expression de $p(x)$.
   - En déduire la valeur de :
   $$\inf\left\{\int_0^1 |t^2 - at - b|^2 dt;\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\right\}.$$
4. On suppose désormais que F est un sous-espace de dimension infinie. Justifier que F possède une base hilbertienne, puis exprimer $p(x)$ en fonction de cette base.
5. On suppose désormais que $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Pour n un entier fixé, on pose
   $$M = \left\{x \in H;\ \sum_{k=0}^{n} x_k = 0\right\}.$$
   Vérifier que M est un sous-espace fermé de H. Chercher un sous-espace N tel que $M \oplus N = H$. Donner la distance de l'élément $(1, 0, 0, \dots)$ à M.

Correction:

D'abord, puisque $p(x) \in F$, il est clair que l'on a :

$$\|x - p(x)\| \geq d(x, F).$$

D'autre part, considérons $y \in F$, et décomposons x en $x = p(x) + x_1$, où x_1 est orthogonal à F. On a alors :

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 &= \langle p(x)-y+x_1, p(x)-y+x_1\rangle \\ &= \langle p(x)-y, p(x)-y\rangle + 2\Re\left(\langle p(x)-y, x_1\rangle + \langle x_1, x_1\rangle\right. \\ &= \|p(x)-y\|^2 + \|x_1\|^2. \end{aligned}$$

Maintenant, on a $\|x_1\|^2 = \|x-p(x)\|^2$ d'après le théorème de Pythagore, et donc $\|x-y\| \geq \|x-p(x)\|$.

D'abord, en gardant les mêmes notations, on a

$$\langle x, x_1\rangle = \langle p(x)+x_1, x_1\rangle = \langle x_1, x_1\rangle = d(x,F)^2.$$

On en déduit que

$$\langle x, \frac{x_1}{\|x_1\|\rangle} = \frac{d(x,F)^2}{\|x_1\|} = d(x,F),$$

ce qui démontre une première inégalité. D'autre part, soit $y \in F^\perp$, avec $\|y\| = 1$, on a :

$$\langle x, y\rangle = \langle p(x), y\rangle + \langle x_1, y\rangle = \langle x_1, y\rangle,$$

d'où on déduit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x_1\| = d(x,F),$$

ce qui démontre la deuxième inégalité.

Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt par exemple...

Rappelons ce qui caractérise $p(x)$: $p(x)$ est le seul élément de F tel que $x - p(x)$ soit orthogonal à tous les éléments de F. Raisonnons par analyse-synthèse. $p(x)$ se décompose dans la base orthonormée de F en

$$p(x) = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Maintenant, $x - p(x)$ est orthogonal à e_1, puisqu'il est orthogonal à F. On a donc :

$$\langle x - p(x), e_1\rangle = 0 = \langle x, e_1\rangle - \langle p(x), e_1\rangle = \langle x, e_1\rangle - \alpha_1.$$

On voit que nécessairement $\alpha_1 = \langle x, e_1\rangle$, et par un raisonnement similaire, on doit avoir $\alpha_k = \langle x, e_k\rangle$, ce qui nous conduit à poser

$$p(x) = \langle x, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_n\rangle e_n.$$

Réciproquement, on vérifie facilement que $p(x)$ ainsi défini est élément de F, et que $x - p(x)$ est orthogonal à tout élement de F.

Introduisons $H = L^2([0,1])$ (on pourrait aussi considérer simplement $C([0,1])$), muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Posons F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré ≤ 1. Le problème de minimisation peut aussi s'interpréter comme la recherche de $d(t^2, F)$. On applique alors les méthodes mises en valeur dans l'exercice. On commence par chercher (e_1, e_2) une base orthonormée de F. On peut choisir $e_1(t) = 1$, qui est déjà un vecteur normé. Pour e_2, on commence d'abord par chercher f_2 sous la forme

$$f_2(t) = t + \alpha e_1(t) = t + \alpha,$$

de sorte que f_2 soit orthogonal au vecteur précédent construit. On a donc :

$$\langle f_2, e_1\rangle = \int_0^1 (t+\alpha)dt = \frac{1}{2} + \alpha = 0.$$

On a donc $f_2 = t - 1/2$, et il suffit maintenant de normaliser ce vecteur :

$$e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = 2\sqrt{3}t - \sqrt{3}.$$

On calcule ensuite la projection de t^2 sur F, en utilisant :

$$\langle t^2, e_1\rangle = \frac{1}{3},$$

$$\langle t^2, e_2\rangle = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

On en déduit :

$$p(t^2) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{3}(2t-1)\right)) = t - \frac{1}{6}.$$

Le minimum est donc atteint pour $a = 1$ et $b = -1/6$. Il ne reste plus qu'à calculer la dernière intégrale qui fait $1/180$.

F possède une base hilbertienne, car il est lui-même un espace de Hilbert, en tant que sous-espace fermé (donc complet) d'un espace de Hilbert. Si $(e_n)_{n\in I}$ désigne une base hilbertienne de F, le même raisonnement que précédemment montre que

$$p(x) = \sum_{n\in I}\langle x, e_n\rangle e_n.$$

D'une part, M est clairement un sous-espace vectoriel de H, et il est fermé (caractérisation par les suites, ou bien noyau d'une application linéaire continue). Posons ensuite N le sous-espace vectoriel engendré par $(1, 1, 1 \dots, 1, 0, 0, \dots)$. On pourra vérifier qu'il convient. Enfin, pour calculer la distance de $(1, 0, 0, \dots)$ à M, il suffit de déterminer sa projection sur M. Mais x se décompose alors en

$$x = p(x) + k(1, 1, \dots, 1, 0, \dots).$$

Prenant la somme des n premiers termes de chaque membre, on trouve que $k = \frac{1}{n+1}$. Il vient finalement :

$$d(x, M) = \|\frac{1}{n+1}(1, 1, 1, \dots, 0, \dots)\| = \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}.$$

Exercice 9

Soit H un espace de Hilbert, et T une application linéaire continue sur H et T^* son adjoint. Montrer les relations suivantes :

1. $\ker(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$.
2. $\mathrm{Im}(T^*) \subset \ker(T)^\perp$.

Correction:

1. Soit $x \in \ker(T^*)$. Prenons $y \in \mathrm{Im}(T)$. y peut s'écrire $y = Tz$. On a alors :

   $$\langle y, x\rangle = \langle Tz, x\rangle = \langle z, T^*x\rangle = 0.$$

   Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}(T)^\perp$, pour tout $y \in H$, on a

   $$\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = 0.$$

   T^*x est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace : on en déduit que $T^*x = 0$.

2. Prenons $y \in \text{Im}(T^*)$, $y = T^*x$ avec $x \in H$. Si $z \in \ker(T)$, on a
$$\langle y, z\rangle = \langle T^*x, z\rangle = \langle x, Tz\rangle = 0,$$
et donc $y \in \ker(T)^\perp$.

Exercice 10

1. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes et T l'application linéaire de $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ dans lui-même définie par $T(x) = (\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Vérifier que T est continue, et calculer son adjoint.
2. Soit S l'application de $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ dans lui-même définie par $S(x) = (0, x_0, x_1, \dots)$. Vérifier que S est continue et calculer son adjoint.
3. Soit $H = L^2([0, 1], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire usuel, et $K : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour $x \in [0, 1]$, on pose
$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy.$$
Vérifier que T est une application linéaire continue, et calculer son adjoint.

Correction:

1. On note $\|\alpha\|_\infty = \sup\{|\alpha_n|;\ n \in \mathbb{N}\}$. On a :
$$\|Tx\|^2 = \sum_{n\geq 0} |\alpha_n|^2|x_n|^2 \leq \|\alpha\|_\infty^2\|x\|^2,$$
ce qui prouve que T est continue avec $\|T\| \leq \|\alpha\|_\infty$. Fixons $y \in \ell^2$. $T^*(y)$ est l'unique élément de ℓ^2 défini par :
$$\langle x, T^*(y)\rangle = \langle Tx, y\rangle \text{ pour tout } x \in \ell^2.$$
Or,
$$\langle Tx, y\rangle = \sum_{n\geq 0} \alpha_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n\geq 0} x_n \overline{\overline{\alpha_n} y_n},$$
ce qui prouve que
$$T^*(y) = (\overline{\alpha_n} y_n)_{n\geq 0}.$$
2. Il est clair que dans ce cas on a $\|S(x)\| = \|x\|$ (S est une isométrie). D'autre part, si $y \in \ell^2$, et si on note $S^*(y) = (z_n)_{n\geq 0}$, on a :
$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, S^*y\rangle = \sum_{n\geq 1} x_{n-1}\overline{y_n} = \sum_{n\geq 0} x_n \overline{y_{n+1}}.$$
On doit donc avoir $(S^*y)_n = y_{n+1}$, c'est-à-dire encore $S^*(y) = (y_1, y_2, \dots)$.
3. Notons $\|K\|_\infty = \sup\{|K(x, y)|;\ (x, y) \in [0, 1]^2\}$ (qui existe et est fini car K est continue sur le compact $[0, 1]^2$). On a alors :
$$\begin{aligned}
\|Tf\|^2 &= \int_0^1 \left|\int_0^1 K(x, y)f(y)dy\right|^2 dx \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x, y)||f(y)|dy\right)^2 dx \\
&\leq \|K\|_\infty^2 \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(y)|dy\right)^2 dx \\
&\leq \|K\|_\infty^2 \int_0^1 \int_0^1 |f(y)|^2 dydx \text{ (Cauchy-Schwarz)} \\
&\leq \|K\|_\infty^2 \|f\|^2,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que T est continu. Pour le calcul de l'adjoint, on fixe $g \in L^2$, et pour tout $f \in L^2$, on a :

$$\langle Tf, g\rangle = \int_0^1 \int_0^1 K(x,y)f(y)\overline{g(x)}dx.$$

Par le théorème de Fubini (pourquoi peut-on l'appliquer ?), cela donne

$$\begin{aligned}\langle Tf, g\rangle &= \int_0^1 f(y)\int_0^1 K(x,y)\overline{g(x)}dx \\ &= \int_0^1 f(y)\overline{\int_0^1 \overline{K(x,y)}g(x)dx}.\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$T^*(g) = \int_0^1 \overline{K(x,y)}g(y)dy.$$

Bibliographie

[1] J. M. Arnaudiès, H. Frayssé. *Cours de Mathématiques -2 Analyse*. Dunaud, Paris, 1988.

[2] Bernard Beauzamy, *Introduction to Banach spaces and their geometry*, North Holland, seconde révision (1985).

[3] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, Hermann, Paris.

[4] Haïm Brézis,*Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Masson, deuxième tirage (1987).

[5] Marián Fabian et al.,*Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, Springer (2001).

[6] Christopher Heil,*A Basis Theory Primer*, Unexpanded Edition, Birkhäuser, Boston (2011).

[7] G. Choquet, *Cours de Topologie*, seconde édition, Masson, (1992).

[8] J. Dixmier, *Topologie Générale*, Masson.

[9] Nelson Dunford, Jacob Theodore Schwartz,*Linear Operators. Vol. 1*, Pure and Applied Mathematics, Interscience Publishers (1963).

[10] Per Henrik Enflo,*A counter-example to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math., 130 (1973).

[11] Robert Clarke James,*Characterization of Reflexivity*, Studia Mathematica, vol. 23 (1964).

[12] Robert Clarke James,*A non-reflexive banach space isometric with its second conjugate space*, PROC. N. A. S. (1950).

[13] W. Rudin, *Real and complex analysis*, Mc-Graw-Hill, (1966), traduction française Masson (1980).

[14] W. Rudin, *Functional Analysis*, Mc-Graw-Hill, (1980).

[15] L. Schwartz *Analyse I : théories des ensembles et topologie*, Paris (1991), Hermann.

[16] Vladimir Kadets, Roman Shvydkoy, Gleb Sirotkin, Dirk Werner,*Banach spaces with the Daugavet property*, Trans. Amer. Math. Soc, 352 (2000)

[17] William Timothy Gowers, Bernard Maurey,*The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc., vol. 6, (1993)

[18] Claude Zuily, Hervé Queffélec, *Eléments d'analyse pour l'agrégation* , Paris (1995), Masson.

Index