Univ. Djillali Liabès, département de maths.
AFED1.
Date/Durée de l'examen : 11/01/2023 / 1h30mns.

Examen Final de Module : Analyse fonctionnelle.

Exercice 1 *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien sur un corps $\mathbb{K}$.*

3 1. *Pour tout $z \in H$, on définit l'application f_z par*

$$f_z(x) = \langle x, z \rangle, \ \forall\, x \in H.$$

Montrer que $f_z \in H'$ et $\|f_z\|_{H'} = \|z\|_H$.

2 2. *Soit T une application de H dans H' définie par*

$$T(z) = f_z, \ \forall\, z \in H.$$

Montrer que, si T est surjective, alors $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert.

Exercice 2
1. *Donner l'énnoncé du théorème de Hahn-Banach(Version espases normés).* 2
2. *Soit X un espace normé sur un corps $\mathbb{K}$.*
   (a) *Soit $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe $\tilde{f}$ une forme linéaire et bornée sur X vérifiant $\|\tilde{f}\| = 1$ et $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$.* 2
   (b) *Montrer que, pour tout $x \in X$,*

$$\|x\| = \sup_{f \in X' \setminus \{0\}} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|} \right).$$ 1

   (c) *En déduire que, si $x' \in X$ tel que $f(x') = 0$ pour toute $f \in X'$, alors $x' = 0$.* 0,5 1

Exercice 3 [1] *Sur l'espace de Hilbert $H = \ell^2(\mathbb{N})$, on considère l'application linéaire A qui associ à tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H la suite Ax suivante :*

$$Ax = \left(2x_2, \ \frac{3}{2}x_3, \ \frac{4}{3}x_4, \ldots, \ \left(\frac{n}{n-1}\right) x_n, \ldots \right)$$

3 1. *Montrer que $A \in \mathcal{L}(H)$.*
2 2. *Déterminer $\sigma_p(A)$ le spéctre ponctuel de A.*
1 3. *En déduire que A n'est pas compact.*
2 4. *Déterminer A^* l'opérateur adjoint Hilbertien de A.*
1 5. *A est-il auto-adjoint ?*
1 6. *A^* est-il compact ?*

Examen de TD. de Module : Analyse fonctionnelle. Durée : 30 mns.

Exercice 4
1. *Donner l'énnoncé du théorème de Banach-Steinhaus.* 4

3 2. *Soient X et Y deux espaces normés sur un corps $\mathbb{K}$ avec X soit de plus complet. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}(X, Y)$ telle que, pour tout $x \in X$, $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite de Cauchy dans Y. Montrer que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.*

3 3. *Si de plus Y est complet, montrer que l'application $T : X \to Y$ définie par*

$$Tx = \lim_{n \to +\infty} T_n x,$$

est linéaire et bornée sur X.

---

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Solution d'exam. final 11/01/23

Ex.1, Soit $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un es. préhilbertien sur un corps $\mathbb{K}$.

1) Pour $\forall z \in H$, on définit l'app. f_z par

$$f_z(x) = \langle x, z \rangle, \ \forall x \in H.$$

Montrons que $f_z \in H'$ et $\|f_z\| = \|z\|$.

a) On a $D(f_z) = H$ qui est un es. v. sur $\mathbb{K}$.

b) Soient $x, y \in H$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Par la linéarité de $\langle \cdot,\cdot \rangle$ par rapport à la 1ière composante, on obtient

$$f_z(\alpha x + y) = \langle \alpha x + y, z \rangle$$
$$= \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$
$$= \alpha f_z(x) + f_z(y).$$

De a) et b) f_z est linéaire.

c) Montrons que f_z est bornée

Soit $x \in H$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|f_z(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq \|z\| \cdot \|x\|.$$

Ceci prouve que f_z est bornée et

$$\|f_z\| \leq \|z\| \ \ldots \ (1)$$

Si $z = 0$, alors $f_0 = 0$. Par suite $\|f_0\| = \|0\|$.

Si $z \neq 0$, alors $x_0 = \dfrac{z}{\|z\|} \in S_H(0,1)$.

et $f_z(x_0) = \dfrac{\langle z, z \rangle}{\|z\|} = \|z\|.$

Par déf. de la norme d'une app. bornée, on a

$$\|f_z\| = \sup_{x \in S_H(0,1)} (|f_z(x)|) \geq f_z(x_0) = \|z\| \ \ldots \ (2)$$

De (1) et (2), il en résulte $\|f_z\| = \|z\|$.

2) Soit $T : H \longrightarrow H'$ définie par $T(z) = f_z$, $\forall z \in H$.

On suppose que T est surj.

Montrons que $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ est un es. de Hilbert.

Par hypothèse, on a $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ est un es. préhilbertien, donc, il nous reste à montrer que H est complet par rapport à la norme $\|\cdot\|$ induite par $\langle \cdot , \cdot \rangle$.

Soit $(z_n)_n$ une suite de Cauchy de H. Pour $\forall n \in \mathbb{N}$, on a.

$T(z_n) = f_{z_n}$.

D'après la question 1), on a

$\|T(z_n)\| = \|f_{z_n}\| = \|z_n\|$.

Par conséquent, pour $\forall n, m \in \mathbb{N}$, on a pour $\forall x \in H$.

$$\begin{aligned}
&(T(z_n) - T(z_m))(x) \\
&= f_{z_n}(x) - f_{z_m}(x) \\
&= \langle x, z_n \rangle - \langle x, z_m \rangle \\
&= \langle x, z_n - z_m \rangle = f_{z_n - z_m} \\
&= T(z_n - z_m).
\end{aligned}$$

D'après la question 1),

$\|T(z_n) - T(z_m)\| = \|z_n - z_m\|$

Puisque $(z_n)_n$ est une suite de Cauchy, i.e $\|z_n - z_m\| \xrightarrow[n,m \to +\infty]{} 0$

donc $(T(z_n))_n$ est aussi une suite de Cauchy ds H', et puisque H' est complet, alors $(T(z_n))$ est convergente ds H'.

On suppose que $T(z_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f \in H'$

Puisque T est surj. et $f \in H'$, il existe alors $z \in H$ tq $f = T(z)$.

Prouvons maintenant que $z_n \longrightarrow z$

D'après la question 1), on a

$$\|z_n - z\| = \|T(z_n) - T(z)\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$\cancel{= \|T(z_n - z)\| =}$$

i.e $z_n \longrightarrow z$.

D'où H est complet.

Ex.2. Soit X un es. v.n sur $\mathbb{K}$.

1) Soit $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Montrons qu'il existe $\tilde{f} \in X'$ tq $\|\tilde{f}\| = 1$ et $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$

Puisque $x_0 \neq 0$, donc on peut considérer $Z = \text{span}\{x_0\}$.

Z est un s-es.v. de X. On définit sur Z la forme f par $f(z) = \alpha \|x_0\|$ où $z = \alpha x_0$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Alors f est une forme linéaire bornée sur Z.

En effet, i) f est linéaire car

a) $D(f) = Z$ est un s.e.s.v. de X

b) Pour $\forall\, z, z' \in Z$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $z = \alpha x_0$, $z' = \alpha' x_0$

$$f(\lambda z + z') = f((\lambda\alpha + \alpha')x_0)$$
$$= (\lambda\alpha + \alpha')\|x_0\|$$
$$= \lambda\alpha\|x_0\| + \alpha'\|x_0\|$$
$$= \lambda f(z) + f(z').$$

ii) f est bornée car pour $\forall\, z = \alpha x_0 \in Z$, on a

$$|f(z)| = |\alpha\|x_0\|| = |\alpha|\|x_0\|$$
$$= \|\alpha x_0\| = \|z\| \quad \text{--- } (1)$$

De (1) on retire $\|f\| = 1$.

~~et comme $x_0 = 1.x_0 \in Z$~~, alors

D'après le th. de Hahn-Banach f admet une extension $\tilde{f} \in X'$ tq $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

i.e $\tilde{f}$ une forme linéaire bornée sur X tq $\tilde{f}_{/Z} = f$ et $\|\tilde{f}\| = \|f\| = 1$

Comme $x_0 = 1.x_0 \in Z$, alors

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = 1.\|x_0\| = \|x_0\|.$$

2) Montrons que pour $\forall\, x \in X$

$$\|x\| = \sup_{f \in X' \setminus \{0\}} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|}\right).$$

Pour $\forall\, x \in X$, on a

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\|, \quad \forall f \in X'$$

Ceci implique pour $\forall\, x \in X$

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \|x\|, \quad \forall f \in X' \setminus \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \sup_{f \in X' \setminus \{0\}} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|}\right) \leq \|x\| \quad \text{--- } (*)$$

D'autre part, d'après la question 1), on a

Pour $\forall x \in X\setminus\{0\}$, il existe $\tilde{f} \in X'$ tq $\|\tilde{f}\|=1$ et $\tilde{f}(x)=\|x\|$

Donc

$$\sup_{f\in X'\setminus\{0\}}\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|}\right) \geq \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|\tilde{f}\|} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\| \quad (2*)$$

De $(*)$ et $(2*)$, $\|x\| = \sup_{f\in X'\setminus\{0\}}\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|}\right)$.

3) Si $x' \in X$ tq $f(x')=0$, $\forall f \in X'$, alors, d'après la question 2), on obtient $\|x'\|=0$ ~~t~~. $x'=0$

<u>Ex.3</u>. Soit $H=\ell^2(\mathbb{N})$. On considère l'opérateur linéaire A qui associe à $\forall x=(x_n)_n \in H$ la suite Ax suivante :

$$Ax=\left(2x_2, \frac{3}{2}x_3, \dots, \frac{n}{n-1}x_n, \dots\right)$$

1) Montrons que $A\in\mathcal{L}(H)$.

a) Montrons que A est bien définie.

Soit $x=(x_n)_n \in H$. Alors, vérifions que $Ax\in H$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left|\frac{n}{n-1}x_n\right|^2 = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^2|x_n|^2$$

$$\leq 4\sum_{n=2}^{+\infty}|x_n|^2 \quad (\text{car } x=(x_n)_n\in H)$$

$$\leq 4\|x\|^2 < +\infty$$

Ça veut dire que $Ax\in H$.

D'où A est bien définie.

b) ~~Montrons que~~ A est une app. linéaire (par hypothèse).

c) Montrons que A est bornée.

Soit $x=(x_n)_n\in H$. Alors

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^2|x_n|^2 \leq 4\|x\|^2$$

i.e. $\|Ax\| \leq 2\|x\|$.

Ceci prouve que A est bornée.

De a), b) et c), $A\in\mathcal{L}(H)$.

2) Déterminons $\sigma_p(A)$

Soit $\lambda\in\mathbb{C}$. Alors

$\lambda\in\sigma_p(A) \Leftrightarrow (A-\lambda I)$ est inj ....(*)

$\Leftrightarrow \exists x=(x_n)_n\in H\setminus\{0\};\ Ax=\lambda x$

Pour $\forall x=(x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ~~$\in H$~~, on a

$$Ax=\lambda x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2=\lambda x_1 \dots (1) \\ \frac{3}{2}x_3=\lambda x_2 \dots (2) \\ \frac{4}{3}x_4=\lambda x_3 \dots (3) \\ \frac{n}{n-1}x_n=\lambda x_{n-1},\ \forall n\geq 2 \end{cases}$$

De l'équ. ① on a $x_2 = \frac{\lambda}{2} x_1$.

En remplaçant x_2 ds. ②, on obtient $x_3 = \frac{\lambda^2}{3} x_1$

Par récurrence, on trouve :

$x_n = \frac{\lambda^{n-1}}{n} x_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donc

$Ax = \lambda x \iff x = x_1 \left(1, \frac{\lambda}{2}, \dots, \frac{\lambda^{n-1}}{n}, \dots\right)$

D'après (*), $\lambda \in \sigma_p(A)$ ssi $x_1 \neq 0$ et $\left(\frac{\lambda^{n-1}}{n}\right)_n \in H$.

On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\lambda^{n-1}}{n}\right|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\lambda|^{2(n-1)}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(\lambda)$$

~~Posons~~ où $U_n(\lambda) = \frac{|\lambda|^{2(n-1)}}{n^2}$

i) Si $|\lambda| = 1$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(\lambda) = \sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ c'est une série de Riemann ($\sum \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha = 2 > 1$) convergente.

ii) Si $|\lambda| \neq 1$, alors

$$\frac{U_{n+1}(\lambda)}{U_n(\lambda)} = |\lambda|^2.$$

D'après le critère d'Alembert $\sum_n U_n(\lambda)$ cv. si $|\lambda| < 1$ et div. $|\lambda| > 1$.

De i) et ii), $\sum_n U_n(\lambda)$ cv. ssi $|\lambda| \leq 1$

D'où $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, |\lambda| \leq 1\} = D(0,1)$

3) On sait que le spectre d'un opérateur compact est au plus dénombrable. Puisque $\sigma_p(A) = D(0,1)$ est non dénombrable, donc A n'est pas compact.

4) Déterminons A^*

D'après la déf. de l'opérateur adjoint hilbertien d'un opérateur, on a pour $\forall x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in H$

$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$.

D'après la déf. de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ds. H, on a

$$\langle Ax, y \rangle = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n}{n-1} x_n\right) \overline{y_{n-1}}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} x_n \overline{\left(\frac{n}{n-1} y_{n-1}\right)} = \langle x, A^* y \rangle \text{ où}$$

$A^* y = \left(0, 2y_1, \frac{3}{2} y_2, \dots, \frac{n}{n-1} y_{n-1}, \dots\right)$

D'où $A^* : H \longrightarrow H$ défini par

$A^* x = \left(0, 2x_1, \frac{3}{2} x_2, \dots, \frac{n}{n-1} x_{n-1}, \dots\right)$

pour $\forall x = (x_n)_n \in H$.

5) Puisque $A^* \neq A$, alors A n'est pas auto-adjoint.

6) D'après le th. de Schauder, comme A n'est pas compact, A^* l'est aussi.

عنوان : ص.ب رقم 1523 - وهران المنور الجزائر الهاتف: 041 41.97.16 / 041 41.98.05 الفاكس: 041 41.98.06
ENSET D'ORAN: B.P. 1523 ORAN EL M'NAOUER ORAN (ALGERIE) Tél:(ST): 041 41.97.16 / Tél: (Dir) 041 41.98.05 Fax: 041 41.98.06
Site Web :www.enset-oran.dz
email :enset@enset-oran.dz