$1^{ère}$ année LMD MI.

Corrigé type de l'examen du module Algèbre 1

Solution de l'exercice 1. 1) Soit $f : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \sqrt{3x-6} - 1.$$

Soient $x_1, x_2 \in [2, +\infty[$,

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies \sqrt{3x_1 - 6} - 1 = \sqrt{3x_2 - 6} - 1 \\ &\implies \sqrt{3x_1 - 6} = \sqrt{3x_2 - 6} \\ &\implies 3x_1 - 6 = 3x_2 - 6 \qquad (\mathbf{1,5}) \\ &\implies 3x_1 = 3x_2 \\ &\implies x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Donc $\forall x_1, x_2 \in [2, +\infty[\, , f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.
i.e : L'application f est injective.

Soit $y \in \mathbb{R}$, on a

$$y = f(x) \iff \sqrt{3x-6} = y + 1.$$

Si $y = -2$, alors $\sqrt{3x-6} = -1$ n'a pas de solutions. $(\mathbf{1})$
Ainsi l'application f n'est pas surjective.

2) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 5.$$

On considère les ensembles $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ et $B = \{5\}$.
(a) On a : $g(-1) = 2$, $g(0) = 5$, $g(1) = 2$, $g(2) = 5$. $(\mathbf{1})$
D'où $g(A) = \{2, 5\}$.

(b) Comme $-1 \neq 1$ et $g(-1) = g(1)$ alors g n'est pas injective. $(\mathbf{1})$

(c) On a $g^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R},\ g(x) = 5\}$.
Alors

$$\begin{aligned} g(x) = 5 &\iff 2x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 5 \\ &\iff 2x^3 - 3x^2 - 2x = 0 \\ &\iff x\left(2x^2 - 3x - 2\right) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 2x^2 - 3x - 2 = 0 \qquad (\mathbf{1,5}) \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Et par conséquent, $g^{-1}(B) = \left\{-\frac{1}{2}, 0, 2\right\}$.

3) Soient A, B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On a

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup \complement_E A &= \left(A \cup \complement_E A\right) \cap \left(B \cup \complement_E A\right) \\ &= E \cap \left(B \cup \complement_E A\right) \qquad (\mathbf{1,5}) \\ &= B \cup \complement_E A. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur $]0,+\infty[$ par

$$x\mathcal{R}y \iff x\ln x - x = y\ln y - y.$$

1. i) On a, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$x\ln x - x = x\ln x - x. \qquad (\mathbf{1})$$

i.e, $\forall x \in]0,+\infty[\,,\ x\mathcal{R}x$.
D'où, $\mathcal{R}$ est réflexive.

ii) Soient $x, y \in]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\implies x\ln x - x = y\ln y - y \\ &\implies y\ln y - y = x\ln x - x \qquad (\mathbf{1,5}) \\ &\implies y\mathcal{R}x \end{aligned}$$

i.e, $\forall x, y \in]0,+\infty[\,,\ x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$.
D'où, $\mathcal{R}$ est symétrique.

iii) Soient $x, y, z \in]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \\ y\mathcal{R}z \end{cases} &\implies \begin{cases} x\ln x - x = y\ln y - y \\ \\ y\ln y - y = z\ln z - z \end{cases} \\ &\implies x\ln x - x = z\ln z - z \qquad (\mathbf{1,5}) \\ &\implies x\mathcal{R}z. \end{aligned}$$

Donc $\forall x, y, z \in]0,+\infty[\,,\ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z$
D'où, $\mathcal{R}$ est transitive.

Comme $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Soit $m \in]0,+\infty[$. On a $\overline{m} = \{x \in]0,+\infty[\,,\ x\mathcal{R}m\}$.
Posons $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x\ln x - x$. Donc

$$x\mathcal{R}m \iff f(x) = f(m).$$

Tableau de variations de la fonction f. $(\mathbf{2})$
Si $m \in \{1\} \cup [e,+\infty[$ alors $\overline{m}$ contient un élément.
Si $m \in]0,1[\cup]1,e[$ alors $\overline{m}$ contient deux élément.

Solution de l'exercice 3. Soit $*$ une loi de composition interne dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x * y = x + y + x^2y^2.$$

1) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} x * y &= x + y + x^2y^2 \\ &= y + x + y^2x^2 \qquad (\mathbf{1}) \\ &= y * x. \end{aligned}$$

Donc $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x * y = y * x$.
i.e : La loi $*$ est commutative.

2) On a : $(1 * 2) * (-1) = 7 * (-1) = 55$ $\quad(\mathbf{1})$
et $1 * (2 * (-1)) = 1 * 5 = 31$ $\quad(\mathbf{1})$
On en déduit que $(1 * 2) * (-1) \neq 1 * (2 * (-1))$.
D'où, la loi $*$ n'est pas associative. $\quad(\mathbf{0,5})$

3) Soit e l'élément neutre de la loi $*$. Donc, on a

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ x * e = x \quad &\Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ x + e + x^2e^2 = x \\
&\Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ e^2x^2 + e = 0 \qquad (\mathbf{1}) \\
&\Longrightarrow \quad e^2 = 0 \text{ et } e = 0 \\
&\Longrightarrow \quad e = 0.
\end{aligned}$$

4) On a

$$\begin{aligned}
x * x = 2x + 16 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^4 = 16 \\
&\Longleftrightarrow \quad x = -2 \text{ ou } x = 2. \qquad (\mathbf{1})
\end{aligned}$$

On a

$$(-2) * x = 1 \iff 4x^2 + x - 3 = 0$$

$$\Delta = 49, \quad \sqrt{\Delta} = 7 \quad , x_1 = \frac{-1-7}{8} = -1, \quad x_2 = \frac{-1+7}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}. \qquad (\mathbf{1})$$