Université Djilalli Liabes de Sidi-Bel-Abbès
Faculté des Sciences Exactes
Module : Mécanique analytique
Option : $2^{ième}$ année LMD SM

2022/2023
Durée : 1h 30mn

Examen de Moyenne Durée

Note *: A résoudre seulement deux exercices.*

Exercice n° 1 :(obligatoire)

Un point matériel M de masse m est soumis à une force centrale attractive de grandeur $-k/r^2$, (k est une constante).

- En utilisant les coordonnées polaires, déterminer l'Hamiltonien et les équations de Hamilton.
- A l'aide du formalisme de Hamilton, déduire une intégrale première du moment cinétique l_z.
- Indiquer une coordonnée cyclique.

Exercice n° 2 :

1- Montrer que la transformation suivante est canonique :

$$q = \sqrt{2P}\ \sin Q \quad , \quad p = \sqrt{2P}\cos Q$$

en utilisant la méthode du crochet de Poisson (c'est-à-dire montrer que $[q,p]=$)

2- Utiliser cette transformation pour résoudre le problème de l'oscillateur harmonique ; pour cela :

a) Ecrire l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique à une dimension $H(q,p)$.

b) Déduire le nouveau Hamiltonien $\mathcal{H}(Q,P)$ et déterminer les équations de Hamilton.

c) En utilisant les équations de Hamilton, déterminer *Q(t) et P.*

d) Déduire les équations *q(t) et p(t).*

Exercice n° 3 :

Soit le Lagrangien d'une particule de masse m se déplaçant sur un cylindre :

$$L = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{1}{2}\,k\,(R^2 + z^2), \quad \text{(k et R sont des constantes)}$$

1. Ecrire l'Hamiltonien du système.
2. Ecrire l'équation de Hamilton-Jacobi correspondante.
3. Trouver une solution complète de cette équation (l'action « S »).