2ième année LMD-SM 2022/2023

Module : Mécanique Analytique.

Correction de l'examen.

Exercice 1 : (Obligatoire). (10 pts)

La Force centrale $F(r)$ est en relation avec le potentiel central $V(r)$:

$$F(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow V = -\int F\, dr$$

$$= -\int -\frac{K}{r^2}\, dr = K\int \frac{1}{r^2}\, dr = -\frac{K}{r} \Rightarrow V(r) = -\frac{K}{r}$$

Le Lagrangien en coordonnées polaires : (1)

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right) + \frac{K}{r} = L(r, \dot r, \dot\theta) \Rightarrow \text{Syst à 2 variables} : r, \theta \quad (1)$$

Les moments généralisés :

$$P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r \Rightarrow \dot r = \frac{P_r}{m} \quad (1)$$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mr^2\dot\theta \Rightarrow \dot\theta = \frac{P_\theta}{mr^2} \quad (1)$$

Le Hamiltonien :

$$H = \sum_\alpha P_\alpha \dot q_\alpha - L$$

$$= P_r\dot r + P_\theta\dot\theta - \frac{m}{2}\dot r^2 - \frac{mr^2}{2}\dot\theta^2 - \frac{K}{r}$$

$$= P_r\left(\frac{P_r}{m}\right) + P_\theta\left(\frac{P_\theta}{mr^2}\right) - \frac{m}{2}\left(\frac{P_r}{m}\right)^2 - \frac{mr^2}{2}\left(\frac{P_\theta}{mr^2}\right)^2 - \frac{K}{r}$$

$$H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} - \frac{K}{r} = H(r, P_r, P_\theta) \quad (1)$$

Les éqs de Hamilton :

$$\begin{cases} \dot r = \dfrac{\partial H}{\partial P_r} = \dfrac{P_r}{m} \Rightarrow \dot P_r = m\ddot r \quad (1) \\ \dot P_r = -\dfrac{\partial H}{\partial r} = -\dfrac{P_\theta^2}{2m}\left(\dfrac{-2r}{r^4}\right) - \dfrac{K}{r^2} \\ \quad = \dfrac{(mr^2\dot\theta)^2}{mr^3} - \dfrac{K}{r^2} = mr\dot\theta^2 - \dfrac{K}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{m\ddot r - mr\dot\theta^2 + \frac{K}{r^2} = 0} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot\theta &= \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2} \Rightarrow P_\theta = mr^2\dot\theta \\ \dot P_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow P_\theta = c^{te} = mr^2\dot\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot P_\theta = \boxed{\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot\theta\right) = 0} \quad (1)\ (0.5)$$

- L'intégrale première est : $mr^2\dot\theta = l_z$ qui correspond à la composante l_z du moment cinétique car $\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot\theta\right) = 0 \Rightarrow \frac{dP_\theta}{dt} = 0$ (1)
- La coordonnée cyclique est θ puisque $\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$. (0.5)