Exercice 2 : (10 pts)

1-/ si q est au repos ds (R') => $v' = 0$ => $B' = 0$, donc la particule est soumise à une force Coulombienne qui s'écrit :

$$\vec{F}' = q\,\vec{E}'.$$

et qui s'écrit en termes de composantes :

$$F'_x = q\,E'_x \;,\quad F'_y = q\,E'_y \;,\quad F'_z = q\,E'_z \qquad (2\,\text{pts})$$

2-/ Afin d'exprimer les composantes de $\vec{F}$ ds (R) en fct de $\vec{E}'$, utilisons :

$$\vec{F}\begin{cases} F_x = \dfrac{F'_x}{\gamma\left(1+\frac{\beta}{c}v'_z\right)} = \dfrac{F'_x}{\gamma} = \dfrac{q}{\gamma}\,E'_x \\ F_y = \dfrac{F'_y}{\gamma\left(1+\frac{\beta}{c}v'_z\right)} = \dfrac{F'_y}{\gamma} = \dfrac{q}{\gamma}\,E'_y \\ F_z = \dfrac{F'_z + \frac{\beta}{c}\vec{F}'.\vec{v}'}{\left(1+\frac{\beta}{c}v'_z\right)} = F'_z = q\,E'_z \end{cases}$$

(2 pts)

car $v' = v'_z = 0$

La particule est au repos ds (R').

3-/ Afin d'exprimer $\vec{F}$ ds (R) en terme de $\vec{E}$ et $\vec{B}$, utilisons les formules de Transformation de Lorentz de champs $\boxed{\vec{E} \text{ et } \vec{B}}$ :

$$\vec{F}\begin{cases} F'_x = \dfrac{q}{\gamma}\,\gamma\,(E_x - v\,B_y) = q\,E_x - q\,v\,B_y. \\ F_y = \dfrac{q}{\gamma}\,E'_y = \dfrac{q}{\gamma}\,\gamma\,(E_y + v\,B_x) = q\,E_y + q\,v\,B_x. \\ F_z = q\,E'_z = q\,E_z \end{cases}$$

(2 pts)

Vérifions maintenant les composantes de la relation vectorielle :

$$q\,\vec{v}\wedge\vec{B} = q\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & v \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q\,\vec{v}\wedge\vec{B})_x = -q\,v\,B_y. \\ q\,\vec{v}\wedge\vec{B})_y = q\,v\,B_x. \\ q\,\vec{v}\wedge\vec{B})_z = 0 \end{vmatrix}$$

(2 pts)

Ainsi, on peut écrire que : $\vec{F} = q\,\vec{E} + q\,\vec{v}\wedge\vec{B} = q\,(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$.

-/ Démontrons les relations utilisées en se basant sur la relation générale : $\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$

$$\vec{F}'\begin{cases} F'_x = \dfrac{dP'_x}{dt'} = \dfrac{dP_x}{\gamma(dt - \frac{\beta}{c}dz)} = \dfrac{dP_x/dt}{\gamma(dt - \frac{\beta}{c}dz)/dt} = \dfrac{F_x}{\gamma(1-\frac{\beta}{c}v_z)} \\ F'_y = \dfrac{dP'_y}{dt'} = \dfrac{dP_y}{\gamma(dt - \frac{\beta}{c}dz)} = \dfrac{dP_y/dt}{\gamma(dt - \frac{\beta}{c}dz)/dt} = \dfrac{F_y}{\gamma(1-\frac{\beta}{c}v_z)} \\ F'_z = \dfrac{dP'_z}{dt'} = \dfrac{\gamma(dP_z - \frac{\beta}{c}dE)}{\gamma(dt - \frac{\beta}{c}dz)} = \dfrac{(dP_z - \frac{\beta}{c}dE)/dt}{(dt - \frac{\beta}{c}dz)/dt} = \dfrac{F_z - \frac{\beta}{c}\vec{F}.V}{1-\frac{\beta}{c}v_z} \end{cases}$$

(2 pts)

sachant que : $dP'_x = dP_x$, $dP'_y = dP_y$, $dP'_z = \gamma(dP_z - \frac{\beta}{c}dE)$, $dt' = \gamma(dt - \frac{\beta}{c}dz)$

Afin d'obtenir les relations de $\vec{F}$ en fct de $\vec{F}'$ il suffit de précéder la vitesse $v_z$ d'1