2ième année LMD - SM. 2022/23

Module : Mécanique Analytique

Correction de l'Examen (Suite)

Exercice 3 : (Au choix) (10 pts)

Le Lagrangien d'1 particule de masse m se déplaçant sur 1 cylindre :

$$L = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{K}{2}\left(R^2+z^2\right), \quad K \text{ et } R \text{ sont des c}^{\text{tes}}.$$

1-/ Le Hamiltonien :

puisque $L(z, \dot{z}, \dot{\theta}) \Rightarrow$ Syst à 2 Variables

les moments généralisés :

$$P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{P_z}{m} \qquad (0.5)$$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{mR^2} \qquad (0.5)$$

$$H = \sum P_\alpha \dot{q}_\alpha - L$$

$$= P_\theta\dot{\theta} + P_z\dot{z} - \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{m}{2}\dot{z}^2 + \frac{K}{2}\left(R^2+z^2\right)$$

$$H = \frac{P_\theta^2}{2mR^2} + \frac{P_z^2}{2m} + \frac{K}{2}\left(R^2+z^2\right) \Rightarrow H(z, P_z, P_\theta). \qquad (1)$$

2-/ Equation de Hamilton-Jacobi :

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad p = \frac{\partial S}{\partial q} \qquad (0.5)$$

On a : $P_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta}$, $P_z = \frac{\partial S}{\partial z}$ (0.5)+(0.5)

$$\frac{1}{2mR^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + \frac{K}{2}\left(R^2+z^2\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \rightarrow \text{eq de Hamilton-Jacobi.} \qquad (0.5)$$

3-/ D'après l'eq. de H-Jacobi ⇒

(0.5)

$S(\theta, z, t) = W(\theta) + U(z) + v(t)$. → solution proposée en utilisant la méthode de séparation des variables. (0.5)

$$P_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}, \quad P_z = \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

l'eq de H-Jacobi s'écrira :

$$\frac{1}{2mR^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \frac{K}{2}\left(R^2+z^2\right) + \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \qquad (0.5)$$

$$\frac{1}{2mR^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \frac{K}{2}\left(R^2+z^2\right) = -\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha.$$

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \Rightarrow v = -\int \alpha \, dt \Rightarrow \boxed{v(t) = -\alpha t} \qquad (1)$$