Université Djillali Liabes Sidi Bel Abbès — Module : Mécanique Quantique II
Faculté des Sciences Exactes — 3ème Année License Physique des Matériaux
Département Matériaux et Développement Durable — Durée : 1h 30mn

Examen

Exercice 1 : (05points)

- Donner la matrice $\hat{L}_z$ dans le cas $l = 1$? 02 $\hat{L}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- L'opérateur $\hat{J}_+\hat{J}_-$ est il hermitique ? 02 $(\hat{J}_+\hat{J}_-)^+ = (\hat{J}_-)^+ \cdot (\hat{J}_+)^+ = \hat{J}_+\hat{J}_-$

Donc $\hat{J}_+\hat{J}_-$ est hermitique.

Exercice 2 :(05Points)

Evaluer les éléments de matrice suivants :

- 02 ✓ $\langle 0,0|\hat{l}_z|0,0\rangle$ $\quad \hat{L}_z|0,0\rangle = 0 \rightarrow \langle 0,0|\hat{L}_z|0,0\rangle = 0$
- 02 ✓ $\langle 1,1|\hat{l}^+|0,0\rangle$ $\quad \hat{L}_+|0,0\rangle = C|0,1\rangle \Rightarrow \langle 1,1|\hat{L}_z|0,0\rangle = C\langle 1,1|0,1\rangle = 0$
- 01 ✓ $\langle 2,0|\hat{l}^+\hat{l}^-|2,0\rangle$ $\quad \hat{L}_-|2,0\rangle = \sqrt{6}\hbar|2,-1\rangle,\ \hat{L}_+|2,-1\rangle = \sqrt{6}\hbar|2,0\rangle$ $\Rightarrow \langle 2,0|\hat{L}_+\hat{L}_-|2,0\rangle = 6\hbar^2.$

Sachant que :

- $\hat{l}_z|l,m\rangle = m\hbar|l,m\rangle$
- $\hat{l}^\pm|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm1)}\,|l,m\pm1\rangle$

Exercice 3 : (05points)

On donne la fonction de l'atome d'hydrogène par l'expression générale :

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r).\Theta_{lm}(\theta).\Phi_m(\varphi)$$

Sachant que $\Phi_m(\varphi)$ est la fonction propre de l'équation différentielle $-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi_m(\varphi) = m\hbar\Phi_m(\varphi)$

- Que représente l'opérateur : $-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$ $= \hat{L}_z$ 02
- Trouver l'expression de $\Phi_m(\varphi)$ $\quad \Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{im\varphi}$ 03

Exercice 4 : (05points)

Soit la fonction d'onde de l'électron 1s de l'atome d'hydrogène dans l'état fondamental.

$$\psi_{1s} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-r/a_0}$$

Où a_0 est le rayon de Bohr $a_0 = 0.53 A°$

Calculer la valeur moyenne des grandeurs $\langle r\rangle$, $\langle r^2\rangle$ et $\cancel{\langle x\rangle}$ dans l'état ψ_{1s}

On donne l'élément de volume $d\tau = dxdydz = r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$ *avec* $0 \le r \le +\infty,\ 0 \le \theta \le \pi$

$0 \le \varphi \le 2\pi$ *et* $\int_0^{+\infty} r^n e^{-r/a} dr = a^{n+1} n!$ et $x = r\sin\theta\cos\varphi$