République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur

et de la Recherche Scientifique

Université Djillali Liabès
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
de Sidi Bel-Abbès

B.P. 89, 22000, Sidi Bel-Abbès, Algérie

Support de Cours

Présenté par

Dr. Benkhettou Nadia
Laboratoire de Biomathématiques
Université de Sidi Bel-Abbès,
e-mail: benkhettou_na@yahoo.fr

et

Dr. Salim Abdelkrim
Laboratoire de Mathématiques
Université de Chlef,
e-mail: salim.abdelkrim@yahoo.com

Analyse 2

COURS ET EXERCICES CORRIGES

2022-2023

Table des matières

Introduction

Ce manuscrit servira de support pédagogique, déstiné aux étudiants de la première année Licence LMD. C'est un cours illustrant les outils de bases concernant le calcul intégral et la résolution des équations différentielles d'ordre un et deux.
Il est composé de quatre chapitres, chacun étant poursuivi d'une série d'exercices avec corrigé détaillé.
Ci-dessous sont décrits brièvement les contenus des chapitres.
Le chapitre 1, est une introduction aux intégrales indéfinies et leurs propriétés, ainsi que les méthodes et techniques d'intégration ; qui sont importants dans tout calcul intégral.
Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude des intégrales définies plus précisément l'intégrale de Riemann, les sommes de Darboux, sommes de Riemann et leurs propriétés.
Le chapitre trois est réservé à la résolution des équations différentielles d'ordre un ainsi que leurs différentes méthodes de résolutions.
Nous abordons au chapitre quatre la méthode de résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.
Ce polycopie à été établie en vue de rassembler un maximum de considération afin que l'étudiant puisse non seulement bien assimiler l'éssentiel de son cours mais aussi manipuler les applications.

Chapitre 1

Intégrales indéfinies

Dans ce chapitre, l'objectif est de présenter les concepts de base dans le calcul intégral où on présente les différentes méthodes d'intégrations qui seront utiles pour les intégrales définies et la résolution des équations différentielles.

1.1 Intégrale indéfinie

Définition 1.1 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f sur I si :*

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

Proposition 1.1 *Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors*

$$F - G = c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Preuve : En effet $(F-G)'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$, $\forall x \in I$, alors $F - G$ est une fonction constante sur I.

Exemple 1.1 *Les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2$ et $G(x) = x^2 + \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ sont deux primitives de la fonction f définie par $f(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}$.*

Définition 1.2 *L'ensemble de toutes les primitives de la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelé intégrale indéfinie de f, notée $\int f(x)dx$, alors si F est une primitive de f sur I, on a*

$$\int f(x)dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Exemple 1.2

$$\forall x \in \mathbb{R} : \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.1 *Une fonction f admettant une primitive sur I, n'est pas forcément continue sur I.*

Exemple 1.3 *Soit la fonction f définie par ;*

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & si\ x \in]0,1]\ ; \\ \\ 0, & si\ x = 0. \end{cases}$$

f admet comme primitive sur $[0,1]$ la fonction F définie par ;

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & si\ x \in]0,1] \\ \\ 0, & si\ x = 0. \end{cases} \quad , car\ F'(x) = f(x), \forall x \in [0,1].$$

Mais f n'est pas continue en $x = 0$ donc elle n'est pas continue sur $[0,1]$.

Propriétés 1.1 *Si f et g sont deux fonctions admettant des primitives sur I, alors $f+g$ et λf où $\lambda \in \mathbb{R}$ admettent aussi des primitives et on a :*

1. $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$
2. $\displaystyle\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$
3. $\displaystyle\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$
4. $\displaystyle\int f'(x)dx = f(x) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.$

Remarque 1.2 *En général,* $\displaystyle\int (f(x).g(x))\,dx \neq \int f(x)dx. \int g(x)dx.$

1.1.1 Primitives usuelles

Soit $c \in \mathbb{R}$, alors

1. $\displaystyle\int K dx = Kx + c,\ K \in \mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$, sur $]0, +\infty[$.
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$, sur $\mathbb{R}^*$.
4. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + c$, sur $\mathbb{R}$.
5. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + c$, sur $\mathbb{R}$.
6. $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + c$, sur $\mathbb{R}$.

7. $\displaystyle\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$, sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + K\pi, K \in \mathbb{Z}\}$.

8. $\displaystyle\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$, sur $\mathbb{R} - \{K\pi, K \in \mathbb{Z}\}$.

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$, sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + K\pi, K \in \mathbb{Z}\}$.

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$, sur $\mathbb{R} - \{K\pi, K \in \mathbb{Z}\}$.

11. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{Arctan}\, x + c$, sur $\mathbb{R}$.

12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{Arcsin}\, x + c = -\text{Arccos}\, x + c$, sur $]-1, 1[$.

13. $\displaystyle\int \sinh x dx = \cosh x + c$, sur $\mathbb{R}$.

14. $\displaystyle\int \cosh x dx = \sinh x + c$, sur $\mathbb{R}$.

15. $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x \coth + c$, sur $\mathbb{R}^*$.

16. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + c$, sur $\mathbb{R}$.

17. $\displaystyle\int \tanh x dx = \ln(\cosh x) + c$, sur $\mathbb{R}$.

18. $\displaystyle\int \coth x dx = \ln|\sinh x| + c$, sur $\mathbb{R}^*$.

19. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \text{Argsh}\, x + c = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c$, sur $\mathbb{R}$.

20. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \begin{cases} \text{Argch}\, x + c, & \text{sur }]1, +\infty[\,; \\ \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c, & \text{sur }]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[. \end{cases}$

On peut aussi adjoindre les formules

- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c, \; f(x) \neq 0.$
- $\displaystyle\int f'(x)(f(x))^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}[f(x)]^{\alpha+1}, \; \alpha \neq -1.$
- $\displaystyle\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c.$
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + c, \; f(x) > 0.$
- $\displaystyle\int f'(x)\cos(f(x)) dx = \sin(f(x)) + c.$

- $\displaystyle\int f'(x)\sin(f(x))dx = -\cos(f(x)) + c.$
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = \text{Arctan}(f(x)) + c.$

1.2 Méthodes d'intégration

1.2.1 Intégration par partie

Théorème 1.1 *Soient f et g deux fonctions continûment dérivables, alors*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)dx - \int f'(x)g(x)dx.$$

Preuve : On a

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

en intégrant les deux membres de la dernière égalité on arrive à

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx,$$

soit encore

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)dx - \int f'(x)g(x)dx.$$

Cette dernière égalité s'appelle formule d'intégration par partie.

Exemple 1.4 *Calculer*

1. $I_1 = \displaystyle\int xe^x dx.$

On pose

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = e^x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = e^x \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} I_1 &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + c \\ &= (x-1)e^x + c,\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. $I_2 = \displaystyle\int \text{Arctan}\, x dx.$

On pose

$$\begin{cases} f(x) = \text{Arctan}\, x \\ g'(x) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ g(x) = x \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} I_2 &= x \operatorname{Arctan} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c, \;\; c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. $I_3 = \displaystyle\int (\ln x)^2 dx.$

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = (\ln x)^2 \\ g'(x) = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = 2\dfrac{\ln x}{x} \\ g(x) = x \end{array} \right.$$

donc

$$\begin{aligned} I_3 &= x(\ln x)^2 - 2 \int \ln dx \\ &= x(\ln x)^2 - 2J. \end{aligned}$$

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \ln x \\ g'(x) = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = \dfrac{1}{x} \\ g(x) = x \end{array} \right.$$

donc

$$\begin{aligned} J &= x \ln x - \int dx \\ &= x(\ln x - 1) + c, \;\; c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

donc $I_3 = x(\ln x)^2 - 2x(\ln x - 1) + c', \;\; c' \in \mathbb{R}.$

4. $I_4 = \displaystyle\int e^x \cos x dx.$

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = e^x \\ g'(x) = \cos x \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = e^x \\ g(x) = \sin x \end{array} \right.$$

donc

$$\begin{aligned} I_4 &= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \\ &= e^x \sin x - J. \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{cases} f(x) = e^x \\ g'(x) = \sin x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(x) = e^x \\ g(x) = \cos x \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} J &= -e^x \cos x + \int \cos x e^x dx \\ &= -e^x \cos x + I_4 + c, c \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

alors $I_4 = e^x \sin x + e^x \cos x - I_4 - c, \ c \in \mathbb{R}$,
donc $I_4 = \dfrac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c', \ c' \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.3

1. *Dans certaines primitives, il faudra appliquer l'intégration par partie plusieurs fois pour avoir le résultat.*
2. *La méthode d'intégration par partie s'applique dans plusieurs situations, mais en particulier pour calculer les intégrales du type*

$\displaystyle\int x^n e^x dx, \int x^n \cos x dx, \int x^n \sin x dx, \int x^n \ln x dx.$

1.2.2 Intégration par changement de variables

Proposition 1.2 *Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable,*
si $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f alors $F \circ \varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de $(f \circ \varphi)\varphi'$, et on a

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Preuve :

En faisant le changement de variable

$$t = \varphi(x) \Longrightarrow dt = \varphi'(x)dx$$

donc

$$\begin{aligned} \int f(t)dt &= \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx \\ &= F(\varphi(x)) + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemple 1.5 *Calculer*

1. $I_1 = \displaystyle\int e^{\sin x} \cos x dx.$

On fait le changement de variable

$$t = \sin x \Longrightarrow dt = \cos x dx$$

et par suite

$$I_1 = \int e^t dt = e^t + c = e^{\sin x} + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx.$

On pose

$$t = e^x \Longrightarrow dt = e^x dx$$

et par suite

$$I_2 = \int \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{Arctan} t + c, c \in \mathbb{R},$$

alors

$$I_2 = \operatorname{Arctan}(e^x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

3. $I_3 = \displaystyle\int \frac{\operatorname{Arcsin}^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

On pose

$$t = \operatorname{Arcsin} x \Longrightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

et par suite

$$I_3 = \int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + c, \;\; c \in \mathbb{R},$$

alors

$$I_3 = \frac{1}{4} (\operatorname{Arcsin} x)^4 + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

4. $I_4 = \displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2} dx, a \in \mathbb{R}.$

On pose

$$t = \frac{x}{a} \Longrightarrow dt = \frac{1}{x} dx \Longrightarrow dx = a dt$$

et par suite

$$I_4 = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} t + c, \;\; c \in \mathbb{R},$$

alors

$$I_4 = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a} + c, c \in \mathbb{R}.$$

1.2.3 Intégration de certaines expressions contenant le trinôme $ax^2 + bx + c$

1.2.3.1 Intégrale sous la forme $I = \displaystyle\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$

On distingue 3 cas.

<u>1^{er} cas</u> : $\Delta > 0$.

Dans ce cas l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines α et β, donc on peut écrire formalement $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ et par suite

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{d_1}{x-\alpha} + \frac{d_2}{x-\beta}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} &= \int \left(\frac{d_1}{x-\alpha} + \frac{d_2}{x-\beta} \right) dx \\ &= d_1 \ln|x-\alpha| + d_2 \ln|x-\beta| + d_3 \end{aligned}$$

avec $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.6 *Calculer* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$.

<u>Solution</u> : On a

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

Finalement

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} &= \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x-1} \\ &= \ln|x-2| - \ln|x-1| + \ln|C| \\ &= \ln\left| \frac{C(x-1)}{x-2} \right|. \end{aligned}$$

<u>$2^{\text{ème}}$ cas</u> : $\Delta = 0$.

Dans ce cas l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une racine double α, donc on peut écrire formalement $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2$ donc

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{(x-\alpha)^2} dx = -\frac{1}{a} \times \frac{1}{x-\alpha} + C.$$

Exemple 1.7 *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 4}$.

On a : $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$,
d'où

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 4} = \int \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x-2} + C.$$

Exemple 1.8 *Calculer* $I = \int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 1}$.

On a : $\Delta = 0$, *donc* $4x^2 - 4x + 4$ *admet une racine double* $x = \frac{1}{2}$, *donc* $4x^2 - 4x + 4 = (2x-1)^2$, *alors*

$$I = \int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 1} = \int \frac{dx}{(2x-1)^2}.$$

En faisant le changement de variable

$$y = 2x - 1 \Longrightarrow dy = 2dx.$$

$$I = \int \frac{dx}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{y}\right) + C = -\frac{1}{2}\frac{1}{2x-1} + C.$$

<u>**$3^{\text{ème}}$ cas**</u> **:** $\Delta < 0$.

Dans ce cas l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de racines réelles, donc on a

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + k^2\right], \quad k^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2} > 0 \text{ car } \Delta = b^2 - 4ac < 0 \\
&= a\left[k^2\left(\frac{1}{k^2}\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + 1\right)\right] \\
&= ak^2\left[\left(\frac{1}{k}x + \frac{b}{2ak}\right)^2 + 1\right].
\end{aligned}$$

Donc

$$I = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c}dx = \frac{1}{ak^2}\int \frac{1}{\left(\frac{1}{k}x + \frac{b}{2ak}\right)^2 + 1}dx.$$

En faisant le changement de variable

$$\begin{aligned}
y = \frac{1}{k}x + \frac{b}{2ak} &\Longrightarrow dy = \frac{1}{k}dx \\
&\Longrightarrow dx = kdy.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{ak^2}\int \frac{kdy}{y^2+1} \\ &= \frac{1}{ak}\int \frac{dy}{y^2+1} \\ &= \frac{1}{ak}\operatorname{Arctan} y + C. \end{aligned}$$

Finalement

$$I = \frac{1}{ak}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k}x + \frac{b}{2ak}\right) + C.$$

Exemple 1.9 *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

On a : $x^2+4x+5 = (x+2)^2+1$, *donc*

$$I = \int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1}.$$

En faisant le changement de variable $y = x+2 \Longrightarrow dy = dx$, *donc*

$$I = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \int \frac{dy}{y^2+1} = \operatorname{Arctan} y + C.$$

Finalement

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \operatorname{Arctan}(x+2) + C.$$

Exemple 1.10 *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+1}$.

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] \\ &= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]. \end{aligned}$$

Donc

$$I = \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}.$$

En faisant le changement de variable

$$\begin{aligned} y = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} &\Longrightarrow dy = \frac{2}{\sqrt{3}}dx \\ &\Longrightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dy, \end{aligned}$$

Donc

$$I = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{y^2+1}dy = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{Arctan}\, y + C.$$

Finalement

$$I = \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

1.2.3.2 Intégrale sous la forme $I = \int \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}dx$

On dérive le dénominateur et on écrit le numérateur en fonction de la dérivée du dénominateur.
On a :

$$\alpha x + \beta = \frac{\alpha}{2a}(2ax+b) + \beta - \frac{\alpha b}{2a},$$

donc

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}dx \\ &= \frac{\alpha}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx + \left(\beta - \frac{\alpha b}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx \\ &= \frac{\alpha}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(\beta - \frac{\alpha b}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx \\ &= \frac{\alpha}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(\beta - \frac{\alpha b}{2a}\right)J, \end{aligned}$$

où $J = \int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ (déja traitée dans la sous section 1.2.3.1).

Exemple 1.11 *Calculer* $I = \int \frac{2x+2}{x^2-3x+2}dx$.

On a : $2x+2 = 2x-3+5$ *donc*

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx + 5\int \frac{dx}{x^2-3x+2} \\ &= \ln|x^2-3x+2| + 5J. \end{aligned}$$

Calculons J.

On a :

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-1},$$

après calcule on trouve $a = 1, b = -1$ *donc*

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{dx}{x^2-3x+2} \\ &= \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{x-1}dx \\ &= \ln|x-2| - \ln|x-1| + c. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
I &= \ln|x^2-3x+2|+5\ln|x-2|-5\ln|x-1|+\ln|C| \\
&= \ln|(x-1)(x-2)|+5\ln|x-2|-5\ln|x-1|+\ln|C| \\
&= \ln|x-1|+\ln|x-2|+5\ln|x-2|-5\ln|x-1|+\ln|C| \\
&= 6\ln|x-2|-4\ln|x-1|+\ln|C| \\
&= 2\left[3\ln|x-2|-2\ln|x-1|\right]+\ln|C| \\
&= 2\ln\left|\frac{(x-2)^3}{(x-1)^2}\right|+\ln|C| \\
&= 2\ln\left|\frac{C(x-2)^3}{(x-1)^2}\right|.
\end{aligned}$$

Exemple 1.12 *Calculer* $I=\displaystyle\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx.$

On a : $x+2=\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{3}{2}$, *donc*

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{3}{2}J,
\end{aligned}$$

où $J=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C$ *(déja fait dans l'exemple 1.10).*
D'où

$$I=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|+\sqrt{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

1.2.3.3 Intégrale sous la forme $I=\displaystyle\int\frac{\alpha}{(x-a)^n}dx,\ n\neq 1$

En fait le changement de variable

$$y=x-a\Longrightarrow dy=dx.$$

D'où

$$\begin{aligned}
I &= \alpha\int\frac{dy}{y^n}=\alpha\int y^{-n}dy=\alpha\frac{y^{1-n}}{1-n}+C \\
&= \frac{\alpha}{(1-n)y^{n-1}}+C \\
&= \frac{\alpha}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C
\end{aligned}$$

Exemple 1.13 *Calculer* $I=\displaystyle\int\frac{1}{(x-2)^3}dx.$

On pose

$$y = x - 2 \Longrightarrow dy = dx.$$

D'où

$$I = \int \frac{dy}{y^3} = \int y^{-3} dy = \frac{-1}{2y^2} + C = \frac{-1}{2(x-2)^2} + C.$$

1.2.4 Intégration des fonctions rationnelles

(i) Intégration d'un élément simple de première espèce

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction : $x \longrightarrow \dfrac{1}{(x-x_0)^n}$ est appelé élément de première espèce, son intégrale est donnée par :

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^n} = \begin{cases} \ln|x - x_0| + c, & \text{si } n = 1\,; \\ \\ \dfrac{1}{(1-n)(x-x_0)^{n-1}}, & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

(ii) Intégration d'un élément simple de second espèce

Soienta, b, c et d des nombres réels et $n \in \mathbb{N}^*$. La fraction

$$\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$$

est appelé élément simple de seconde espèce si

$$c^2 - 4d < 0.(\Delta < 0).$$

L'intégrale

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n} dx$$

peut être calculée par la méthode suivante :

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n} dx = \frac{a}{2} \int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^n} dx + \Big(b - \frac{ac}{2}\Big) \int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^n}.$$

On pose

$$I_1 = \int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^n} dx, \;\; et \;\; I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^n}.$$

On sait que

$$I_1 = \begin{cases} \ln(x^2+cx+d) + c, & \text{si } n = 1\,; \\ \\ \dfrac{1}{(1-n)(x^2+cx+d)^{n-1}}, & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

D'autre part, on a

$$I_2 = \int \frac{dx}{\left[(x+\frac{c}{2})^2 + d - \frac{c^2}{4}\right]^n} = \int \frac{dy}{(y^2+k^2)^n},$$

où

$$y = x + \frac{c}{2} \ et \ k = \sqrt{d - \frac{c^2}{4}}.$$

D'où, si $n = 1$ on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dy}{(y^2+k^2)} \\ &= \frac{1}{k}\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{k}\right) + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}}\operatorname{Arctan}\left[\frac{2x+c}{2\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}}\right] + c,\ \ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Si $n > 1$, on pose $z = \operatorname{Arctan}\frac{y}{k}$, alors $y = k\tan z$ et $dz = k(1+\tan^2 z)$. On obtient donc

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{k(1+\tan^2 z)}{(k^2\tan^2 z + k^2)^n}dz \\ &= k^{1-2n}\int \frac{1}{(1+\tan^2 z)^{n-1}}dz \\ &= k^{1-2n}\int (\cos^2 z)^{n-1}dz. \end{aligned}$$

On calcule la dernère intégrale par linéarisation.

Exemple 1.14 *Calculer* $I = \int \frac{5x+2}{(x^2+x+1)^2}dx.$

On a

$$I = \frac{5}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

On pose

$$I_1 = \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx,\ \ I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

On a donc

$$I_1 = \frac{-1}{x^2+x+1} + c,\ \ I_2 = \int \frac{dx}{[(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]^2}.$$

Si on pose $z = \operatorname{Arctan}\frac{2y}{\sqrt{3}}$, *on trouve*

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan z, \quad dy = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2 z)dz.$$

D'où

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1+\tan^2 z}{\left[\frac{3}{4}\tan^2 z+\frac{3}{4}\right]^2}dz\\
&= \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{1}{(1+\tan^2 z)}dz\\
&= \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \cos^2 z dz\\
&= \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{1}{2}(1+\cos 2z)dz\\
&= \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(z+\frac{1}{2}\sin 2z\right)+c\\
&= \frac{4\sqrt{3}}{9}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(2\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]+c,\ \ c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta},$$

alors on obtient en remplaçant θ *par* $\operatorname{Arctan}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{4\sqrt{3}}{9}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{2}\frac{\frac{4x+2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]+c, c\in\mathbb{R}\\
&= \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+c,\ \ c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Après regroupement, on obtient

$$I = \frac{-5}{2(x^2+x+1)}-\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{6}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)}+c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

(iii) Décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simples

Pour calculer l'intégrale d'une fonction rationnelle quelconque, il faut la décomposer en une somme des éléments simples dont on sait calculer les primitives. Cette méthode est appelée décomposition en éléments simples.

Soient P, Q deux polynômes de degrés respectifs m, n tels que $m < n$. On distingue trois cas.

Cas 1 **:** Si le polynôme Q possède m racines simples $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ alors il existe m réels $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ tels que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{x-x_i}$$

par conséquent

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \sum_{i=1}^{m}\left(A_i\int \frac{dx}{x-x_i}\right) = \sum_{i=1}^{m} A_i \ln|x-x_i| + c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Pour calculer une constante $A_i (1 \le i \le m)$ nous multiplions l'équation précédente par $(x - x_i)$ puis en faisant tendre x vers x_i, c'est-à-dire :

$$A_i = \lim_{x\longrightarrow x_i} \frac{P(x)}{Q(x)}(x-x_i).$$

Exemple 1.15 *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x-2}$.

On a :

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2).$$

Alors il existe deux constants A_1 *et* A_2 *telles que*

$$\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-2}.$$

On a

$$A_1 = \lim_{x\longrightarrow -1} \frac{1}{x^2-x-2}(x+1) = \lim_{x\longrightarrow -1}\frac{1}{x-2} = \frac{-1}{3}$$
$$A_2 = \lim_{x\longrightarrow 2} \frac{1}{x^2-x-2}(x-2) = \lim_{x\longrightarrow 2}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}.$$

D'où

$$\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{-1}{3}\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{3}\frac{1}{(x-2)}.$$

Par conséquent

$$I = \frac{-1}{3}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-2} = \frac{-1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}|x-2| + c, c\in\mathbb{R}.$$

Cas 2 ***:*** *Si le polynôme* Q *possède une racine unique* x_0*, multiple d'ordre* m*, alors il existe* m *réels* $\{B_i\}_{1\le i\le m}$ *tel que*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m}\frac{B_i}{(x-x_0)^i}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx &= \sum_{i=1}^{m}\left(B_i\int\frac{dx}{(x-x_0)^i}\right)\\ &= B_1\ln|x-x_0| + \sum_{i=2}^{m}\frac{B_i}{(1-i)(x-x_0)^{i-1}} + c,\ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Les constantes B_i sont calculées par la méthode suivante :
On a

$$\frac{P(x)}{Q(x)}(x-x_0) = B_1 + \sum_{i=2}^{m} \frac{B_i}{(x-x_0)^{i-1}}.$$

Donc

$$B_1 = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{P(x)}{Q(x)}(x-x_0)\right)$$

D'autre part, on a

$$\frac{P(x)}{Q(x)}(x-x_0)^m = \sum_{i=1}^{m-1}(B_i(x-x_0)^{m-i} + B_m.$$

Donc

$$B_m = \lim_{x\longrightarrow x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)}(x-x_0)^m\right).$$

En plus, si on dérive la fonction $\frac{P(x)}{Q(x)}(x-x_0)^m$ et on calcule sa limite au point x_0, on trouve

$$B_{m-1} = \lim_{x\longrightarrow x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)}(x-x_0)^m\right)'.$$

En général, la limite

$$B_i = \lim_{x\longrightarrow x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)}(x-x_0)^m\right)^{m-i},$$

nous donne la constante B_i avec $2 \leq i \leq m-1$.

Remarque 1.4 *Si $m = 3$ on calcule B_1, B_3 par la méthode précédente puis on calcule B_2 en remplaçant x par une valeur quelconque différente de x_0.*

Exemple 1.16 *Calculer $I = \displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^3}dx$.*

Il existe trois constantes A_1, A_2 et A_3 telles que

$$\frac{x}{(x-1)^3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3}$$

On a

$$A_1 = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \left(\frac{x}{(x-1)^3}(x-1)\right) = 0,$$

$$A_3 = \lim_{x\longrightarrow 1} \left(\frac{x}{(x-1)^3}(x-1)^3\right) = 1,$$

et pour $x = 0$ on a

$$0 = -A_1 + A_2 - A_3.$$

D'où $A_2 = 1$, *par conséquent*

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-1)^3}dx &= \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{dx}{(x-1)^3}\\ &= \frac{-1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + c, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Cas 3 **:** Si le polynôme Q admet la factorisation suivante

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{q}(x^2 + a_j x + b_j)^{m_j},$$

avec $q \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq q$, $m_j \in \mathbb{N}$ et a_j sont des réels vérifiant pour tout entier j : $a_j - 4b_j < 0$.
Alors il existe des contantes $B_{j,l}$ et $C_{j,l}$ telles que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{q}\sum_{l=1}^{m_i} \frac{B_{j,l}x + C_{j,l}}{(x^2 + a_j x + b_j)^l}.$$

Exemple 1.17 *Calculer l'intégrale suivante* $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)^2}dx.$

On voit que le polynôme $x^2 + x + 1$ *ne s'annule pas. Donc on va chercher des constantes* A_1, A_2, A_3, A_4 *et* A_5 *telles que*

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2 x + A_3}{x^2+x+1} + \frac{A_4 x + A_5}{(x^2+x+1)^2}. \qquad (*)$$

On a

$$A_1 = \lim_{x\longrightarrow 0}\left[\frac{x}{x(x^2+x+1)^2}\right] = 1.$$

Pour trouver A_2, *on multiplie l'équation* $(*)$ *par* x *et on fait tendre* x *vers* $+\infty$, *on obtient*

$$A_1 + A_2 = 0 \Longrightarrow A_2 = -1,$$

pour trouver A_4 *et* A_5, *on multiplie l'équation* $(*)$ *par* $(x^2+x+1)^2$, *puis on fait tendre* x *vers* $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ *qui est une solution complexe de l'équation* x^2+x+1, *on obtient*

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{A_4}{2} - A_5 - \frac{A_4}{2}\sqrt{3}i$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\dfrac{A_4}{2} - A_5 = -\dfrac{1}{2} \\ \\ -\dfrac{A_4}{2}\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A_5 = -1 \\ \\ A_4 = -1, \end{cases}$$

pour trouver A_3, on remplace x par 1 dans l'équation on obtient $A_3 = -1$. D'où

$$\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx - \int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}dx.$$

On a

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c,\ \ c \in \mathbb{R},$$

et

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2+k^2},\ \ (y = x+\frac{1}{2}, k = \frac{\sqrt{3}}{2}) \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

On a

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{-1}{x^2+x+1} + c,\ \ c \in \mathbb{R},$$

et dans un exemple précédent on a trouvé que

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Après regroupement on obtient

$$I = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1-x}{3(x^2+x+1)} - \frac{5}{3\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Cas Général

Soient f, g deux fonctions polynômiales telles que
degré $f(x) \geq$ degré $g(x)$.
Pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$, on effectue la division euclidienne de f par g, on obtient

$$\frac{f(x)}{g(x)} = P(x) + \frac{R(x)}{g(x)},$$

où R est un polynôme de degré inférieur au degré de g.
Donc

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int P(x)dx + \int \frac{R(x)}{g(x)}dx.$$

L'intégrale de P est triviale, et pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int \frac{R(x)}{g(x)}dx$, on décompose en éléments simples.

Exemple 1.18

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x(x^2+1)}$$

1. *Décomposer $f(x)$ en éléments simples sur $\mathbb{R}^*$*
2. *Calculer $\displaystyle\int f(x)dx$.*

<u>Solution</u> :
1. *Puisque le degré du numérateur est superieur à celui du dénominateur, on fait une division eucludienne.*

$$f(x) = x + 1 + \frac{2x^2 + x + 1}{x(x^2+1)},$$

on a aussi

$$\frac{2x^2 + x + 1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1}, A,\ B \text{ et } C \text{ des constantes à déterminer.}$$

Pour trouver A on multiplie l'équation pécédente par x, puis en faisant tendre x vers 0, on obtient

$$A = 1.$$

Ensuite pour calculer B,on multiplie l'équation pécédente par x, puis en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient

$$B = 1,$$

pour calculer C, on remplace x par 1 dans l'équation pécédente, on obtient

$$C = 1.$$

Donc

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

2. *Calculons*

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \int \left(x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1} \right) dx \\
&= \int \left(x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\
&= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{Arctan} x + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

1.2.5 Intégrale des fonctions trigonomitriques

1.2.5.1 Intégrale sous la forme $I = \int \sin(ax+b)\cos(cx+d)dx$

ou bien $I = \int \cos(ax+b)\cos(cx+d)dx$

ou bien $I = \int \sin(ax+b)\sin(cx+d)dx$.

Pour calculer l'intégrale I, on utilise les transformations suivantes :

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right] \\
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right] \\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right].
\end{aligned}$$

Exemple 1.19 *Calculer* $I = \int (\sin x)(\sin 2x)(\sin 3x)dx$.

<u>Solution :</u>

$$\sin x \sin 2x = \frac{1}{2}\left(\cos x - \cos 3x\right),$$

donc

$$\begin{aligned}
(\sin x)(\sin 2x)(\sin 3x) &= \frac{1}{2}\left(\cos x \sin 3x - \cos 3x \sin 3x\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\sin 4x + \sin 2x\right) - \frac{1}{2}\sin 6x\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(\sin 4x + \sin 2x - \sin 6x\right),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4}\int \left(\sin 4x + \sin 2x - \sin 6x\right)dx \\
&= \frac{-1}{16}\cos 4x - \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{24}\cos 6x + C,\ \ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exemple 1.20 *Calculer* $I = \int (\sin 3x \sin 2x)dx$.

On a

$$\sin 3x \sin 2x = \frac{1}{2}\left(\cos x - \cos 5x\right),$$

donc

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int \left(\cos x - \cos 5x\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin 5x + C.
\end{aligned}$$

Exemple 1.21 *Calculer* $I = \int (\sin 5x \cos x) dx$.

On a

$$\sin 5x \cos x = \frac{1}{2} (\sin 6x + \sin 4x),$$

donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int (\sin 6x + \sin 4x)\, dx \\ &= \frac{-1}{12} \cos 6x - \frac{1}{8} \cos 4x + C. \end{aligned}$$

Exemple 1.22 *Calculer* $I = \int (\cos 3x \cos 2x) dx$.

On a

$$\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2} (\cos 5x + \cos x),$$

donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int (\cos 5x + \cos x)\, dx \\ &= \frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x + C. \end{aligned}$$

1.2.5.2 Intégrale sous la forme $I = \int (\cos^p x \sin^q x)\, dx, \; p, q \in \mathbb{N}$

On distingue deux cas.
1^{er} **cas :** Si l'un des nombres p ou q impair.
On suppose que $q = 2k + 1$ et p quelconque, $k \in \mathbb{N}$. Alors dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} I &= \int (\cos^p x \sin^q x)\, dx \\ &= \int (\cos^p x) \sin^{2k+1} x dx \\ &= \int \cos^p x (\sin^2 x)^k \sin x dx \\ &= \int \cos^p x (1 - \cos^2 x)^k \sin x dx. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable

$$t = \cos x \implies dt = -\sin x dx.$$

Alors

$$I = -\int t^p (1 - t^2)^k dt.$$

Exemple 1.23 *Calculer* $I = \int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

Alors

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^3 x \cos^2 x dx \\ &= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x dx. \end{aligned}$$

On pose

$$t = \cos x \implies dt = -\sin x dx.$$

D'où

$$\begin{aligned} I &= -\int (1-t^2)t^2 dt \\ &= \int (t^4 - t^2) dt \\ &= \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 + C \\ &= \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C, \ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$2^{\text{ème}}$ cas : Si p et q sont pairs.

$$\begin{aligned} I &= \int (\cos^p x \sin^q x)\, dx \\ &= \int \left(\cos^{2l} x \sin^{2k} x\right) dx. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on distingue deux cas :

i) Si p et q sont petits, on utilise les transformations connues pour écrire $\cos^{2l} x$ et $\sin^{2k} x$ en sommes et puis en intègre.

Exemple 1.24 $I = \int \sin^4 x \cos^2 x dx$.
On a :

$$\begin{aligned} \sin^4 x \cos^2 x &= \frac{1}{4}\sin^2 x \sin^2(2x) \\ &= \frac{1-\cos(2x)}{2}.\frac{1-\cos(4x)}{8} \\ &= \frac{1}{16}[1-\cos(2x)-\cos(4x)+\cos(2x).\cos(4x)] \\ &= \frac{1}{16}\left[1-\cos(2x)-\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(6x)+\frac{1}{2}\cos(2x)\right]. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{16}\int\left[1-\cos(2x)-\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(6x)+\frac{1}{2}\cos(2x)\right]dx \\ &= \frac{1}{16}\left[x-\frac{1}{2}\sin(2x)-\frac{1}{4}\sin(4x)+\frac{1}{12}\sin(6x)+\frac{1}{4}\sin(2x)\right]+C,\ C\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

ii) Dans le cas général, on utilise l'intégration par parties pour calculer l'intégrale

$$I_{l,k}=\int\left(\cos^{2l}x\sin^{2k}x\right)dx.$$

On pose

$$\begin{aligned} f(x)=\cos^{2l-1}x &\implies f'(x)=-(2l-1)\cos^{2l-2}x\sin x dx \\ g'(x)=\sin^{2k}x\cos x dx &\implies g(x)=\frac{1}{2k+1}\sin^{2k+1}x, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} I_{l,k} &= \frac{1}{2k+1}\sin^{2k+1}x.\cos^{2l-1}x+\frac{2l-1}{2k+1}\int\cos^{2l-2}x\sin^{2k+2}x dx \\ &= \frac{1}{2k+1}\sin^{2k+1}x.\cos^{2l-1}x+\frac{2l-1}{2k+1}I_{l-1,k+1}. \end{aligned}$$

De cette relation de récurrence, on peut calculer l'intégrale

$$I_{0,k+1}=\int\sin^{2(k+1)}x dx,\quad k\geq 0.$$

Exemple 1.25 *Calculer l'intégrale* $J_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx,\ n>1.$
En utilise l'intégration par parties.

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin x dx \\ &= -\left[\sin^{n-1}x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x dx, \end{aligned}$$

et par suite

$$nJ_n=(n-1)J_{n-2}.$$

De cette relation de récurrence, on peut calculer les differentes valeurs J_n*, pour tout* $n\geq 2$.

1.2.5.3 Forme générale $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Où R est une fonction rationnelle.
On suppose qu'on n'est pas dans l'une des deux situations précédentes, alors on utilise le changement de variable suivant

$$t = \tan\frac{x}{2} \Longrightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt,$$

et donc on a les formules

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Exemple 1.26 *Calculer* $I = \int \frac{1}{\sin x}dx.$

On pose $t = \tan\frac{x}{2}$*, donc par suite* $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ *et notre intégrale devient*

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sin x}dx \\ &= \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \int \frac{dt}{t} \\ &= \ln|t| + C \\ &= \ln|\tan\frac{x}{2}| + C, \ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.2.6 Intégrale des fonctions irrationnelles

1.2.6.1 Intégrale sous la forme $I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ a > 0$

On distingue deux cas.

1^{er} cas : $\Delta < 0$.

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k^2\right] \\
&= ak^2\left[\frac{1}{k^2}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+1\right] \\
&= ak^2\left[\left(\frac{1}{k}x+\frac{b}{2ak}\right)^2+1\right],
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{ak^2\left[\left(\frac{1}{k}x+\frac{b}{2ak}\right)^2+1\right]}} \\
&= \frac{1}{|k|\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{k}x+\frac{b}{2ak}\right)^2+1}}.
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable

$$y = \frac{1}{k}x+\frac{b}{2ak} \Longrightarrow dy = \frac{1}{k}dx \Longrightarrow dx = kdy.$$

D'où

$$\begin{aligned} I &= \frac{k}{|k|\sqrt{a}} \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Argsh} y + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Argsh}\left(\frac{1}{k}x + \frac{b}{2ak}\right) + C. \end{aligned}$$

Exemple 1.27 *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

On a :

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] \\ &= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right], \end{aligned}$$

d'où

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}}.$$

En faisant le changement de variable

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow dy = \frac{2}{\sqrt{3}}dx \Longrightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dy.$$

Alors

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} \\ &= \operatorname{Argsh} y + C \\ &= \operatorname{Argsh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

2ème cas : $\Delta > 0$.

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-k^2\right], \quad avec \quad k^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\\
&= ak^2\left[\frac{1}{k^2}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-1\right]\\
&= ak^2\left[\left(\frac{1}{k}x+\frac{b}{2ak}\right)^2-1\right],
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{ak^2\left[\left(\frac{1}{k}x+\frac{b}{2ak}\right)^2-1\right]}}\\
&= \frac{1}{|k|\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{k}x+\frac{b}{2ak}\right)^2-1}}.
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable

$$y=\frac{1}{k}x+\frac{b}{2ak} \Longrightarrow dy=\frac{1}{k}dx \Longrightarrow dx=kdy.$$

D'où

$$\begin{aligned}
I &= \frac{k}{|k|\sqrt{a}}\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right|+C\\
&= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{1}{k}x+\frac{b}{2ak}+\sqrt{\left(\frac{1}{k}x+\frac{b}{2ak}\right)^2-1}\right|+C.
\end{aligned}$$

Exemple 1.28 *Calculer* $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 3x - 5}}$.

On a :

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x - 5 &= 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\right) \\ &= 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right] \\ &= \frac{49}{8}\left[\left(\frac{4}{7}x - \frac{3}{7}\right)^2 - 1\right], \end{aligned}$$

d'où

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 3x - 5}} = \frac{2\sqrt{2}}{7} \int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{4}{7}x - \frac{3}{7})^2 - 1}}.$$

En faisant le changement de variable

$$y = \frac{4}{7}x - \frac{3}{7} \Longrightarrow dy = \frac{4}{7}dx \Longrightarrow dx = \frac{7}{4}dy.$$

Alors

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\sqrt{2}}{7} . \frac{7}{4} \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| y + \sqrt{y^2 - 1} \right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{4}{7}x - \frac{3}{7} + \sqrt{\left(\frac{4}{7}x - \frac{3}{7}\right)^2 - 1} \right| + C. \end{aligned}$$

1.2.6.2 Intégrale sous la forme $I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $a < 0$

Dans cette formule on a un seul cas $\Delta > 0$.

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] \\
&= -a\left[\frac{b^2-4ac}{4a^2}-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right] \\
&= -a\left[k^2-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right], \quad avec \quad k^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \\
&= -ak^2\left[1-\frac{1}{k^2}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right] \\
&= -ak^2\left[1-\left(\frac{1}{k}x+\frac{b}{2ak}\right)^2\right],
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{-ak^2[1-(\frac{1}{k}x+\frac{b}{2ak})^2]}} \\
&= \frac{1}{|k|\sqrt{-a}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{1}{k}x+\frac{b}{2ak})^2}}.
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable

$$y = \frac{1}{k}x+\frac{b}{2ak} \Longrightarrow dy = \frac{1}{k}dx \Longrightarrow dx = kdy.$$

D'où

$$\begin{aligned}
I &= \frac{k}{|k|\sqrt{-a}}\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{Arcsin} y + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{k}x+\frac{b}{2ak}\right)+C.
\end{aligned}$$

Exemple 1.29 *Calculer* $I = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 4x + 5}}$.

On a

$$\begin{aligned}
-x^2 - 4x + 5 &= -\left(x^2 + 4x - 5\right) \\
&= -\left[(x+2)^2 - 9\right] \\
&= -9\left[\frac{1}{9}(x+2)^2 - 1\right] \\
&= -9\left[\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)^2 - 1\right] \\
&= 9\left[1 - \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)^2\right],
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 4x + 5}} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1 - (\frac{1}{3}x + \frac{2}{3})^2}}.
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Longrightarrow dy = \frac{1}{3}dx \Longrightarrow dx = 3dy.$$

Alors

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3}\int \frac{3dy}{\sqrt{1 - y^2}} \\
&= \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} \\
&= \operatorname{Arcsin} y + C \\
&= \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) + C.
\end{aligned}$$

1.2.6.3 Intégrale sous la forme $F(x) = \int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,\ n \in \mathbb{N}^*$

Pour calculer $F(x)$, on pose

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Longrightarrow x = \frac{b - dy^n}{cy^n - a},$$

donc

$$\begin{aligned} dy &= \frac{1}{n}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}-1}.\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}dx \\ &= \frac{1}{n}y^{1-n}(ad-bc).\left(\frac{a-cy^n}{ad-bc}\right)^2dx \\ &= \frac{1}{n}y^{1-n}.\frac{(a-cy^n)^2}{ad-bc}dx, \quad ad-bc\neq 0, \end{aligned}$$

d'où

$$dx = \frac{ad-bc}{(cy^n-a)^2}ny^{n-1}dy.$$

Alors

$$F(x) = \int f\left(\frac{b-dy^n}{cy^n-a}, y\right).\frac{ad-bc}{(cy^n-a)^2}ny^{n-1}dy,$$

est une intégrale d'une fonction fractionnelle.

Exemple 1.30 *Calculer* $I = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.\frac{dx}{2x-1}$. *On pose*

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \ x \in [-1, 1[,$$

alors

$$x = \frac{y^2-1}{y^2+1}, \ y \in \mathbb{R} \quad et \ dx = \frac{4y}{(y^2+1)^2}dy.$$

On remplace, on trouve

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4y^2}{(y^2-3)(y^2+1)}dy \\ &= 3\int \frac{dy}{y^2-3} + \int \frac{dy}{y^2+1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{y-\sqrt{3}}{y+\sqrt{3}}\right| + \operatorname{Arctan} y + C \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{3}}\right| + \operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C, \ C\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.3 Exercices

Exercice 1.1 *Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable :*

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.
2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{xdx}{1+x^4}$.
3. $I_3 = \displaystyle\int x^3(1-5x^2)^{10}dx$.
4. $I_4 = \displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$.
5. $I_5 = \displaystyle\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$.
6. $I_6 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$, $(a>0)$.
7. $I_7 = \displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x}$.
8. $I_8 = \displaystyle\int \frac{dx}{5\operatorname{ch} x+3\operatorname{sh} x+4}$.
9. $I_9 = \displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}dx$.

Solution

1) Posons $x = t^6 \Longrightarrow dx = 6t^5dt$. Alors

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int \frac{t^{2+1-1}}{1+t^2}dt \\ &= 6\left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2}\right) = 6(t-\operatorname{Arctan} t)+C \\ &= 6(\sqrt[6]{x}-\operatorname{Arctan}\sqrt[6]{x})+C, x>0. \end{aligned}$$

2) Posons $x^2 = t \Longrightarrow xdx = \frac{1}{2}dt$. Alors

$$I_2 = \int \frac{xdx}{1+x^4} = \int \frac{dt}{2(1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x^2 + C,\ C\in\mathbb{R}.$$

3) Posons $1-5x^2 = t \Longrightarrow -10xdx = dt \Longrightarrow xdx = -\dfrac{dt}{10}$, $\ x^2 = \dfrac{1-t}{5}$. Alors

$$\begin{aligned} I_3 &= \int x^3(1-5x^2)^{10}dx = \int x^2(1-5x^2)^{10}xdx = \int \frac{1-t}{5}t^{10}\left(-\frac{dt}{10}\right) \\ &= \frac{1}{50}\int (t^{11}-t^{10})dt = \frac{1}{50}\left(\frac{t^{12}}{12}-\frac{t^{11}}{11}\right)+C \\ &= \frac{1}{600}(1-5x^2)^2 - \frac{1}{550}(1-5x^2)^{11}+C,\ C\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

4) Posons $\sqrt{1-x^2} = t \Longrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -dt, \quad x^2 = 1-t^2$. Alors

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}xdx = -\int (1-t^2)^2 dt \\
&= \int (1-2t^2+t^4)dt = -\left(t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\right) + C \\
&= -\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R} \ et \ (|x|<1).
\end{aligned}$$

5) Posons $t = 1+\cos^2 x \Longrightarrow dt = -2\sin x \cos x dx$. Alors

$$\begin{aligned}
I_5 &= \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\cos^2 x \sin x \cos x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{t-1}{t}\left(-\frac{dt}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}(t - \ln|t|) + C = \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) - \frac{1}{2}(1+\cos^2 x) + C, \ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

6) Posons $x = a\tan t \Longrightarrow dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}dt$. Alors

$$\begin{aligned}
I_6 &= \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \int \frac{1}{\sqrt{(a^2\tan^2 t + a^2)^3}}.\frac{a}{\cos^2 t}dt \\
&= \frac{1}{a^2}\int \cos t dt = \frac{1}{a^2}\sin t + C = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C.
\end{aligned}$$

7) $I_7 = \displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x} = \int \frac{\cos^3 x}{\sin x}dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin^3 x}dx.$

On pose le changement de variable

$$t = \sin x \Longrightarrow dt = \cos x dx.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
I_7 &= \int \left(\frac{1-t^2}{t^3}\right) dt \\
&= \int \frac{1}{t^3}dt - \int \frac{1}{t}dt \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{t^2} - \ln|t| + C \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2 x} - \ln|\sin x| + C, \ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

8) $I_8 = \displaystyle\int \frac{dx}{5\operatorname{ch} x + 3\operatorname{sh} x + 4}.$

On a

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

donc
$$5\,\mathrm{ch}\,x + 3\,\mathrm{sh}\,x + 4 = 4e^x + e^{-x} + 4.$$
Alors
$$\begin{aligned} I_8 &= \int \frac{dx}{4e^x + e^{-x} + 4} \\ &= \int \frac{e^x}{4e^{2x} + 4e^x + 1}dx \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + \frac{1}{4}}dx \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{e^x}{\left(e^x + \frac{1}{2}\right)^2}dx. \end{aligned}$$
En faisant le changement de variable
$$y = e^x + \frac{1}{2} \Longrightarrow dy = e^x dx,$$
d'où
$$\begin{aligned} I_8 &= \frac{1}{4}\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{y} + C \\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{e^x + \frac{1}{2}}\right) + C \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2e^x + 1}\right) + C,\ \ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
$I_9 = \displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x)\cos x}{\sin x}dx.$

On pose
$$t = \sin x \Longrightarrow dt = \cos x dx.$$
Alors
$$\begin{aligned} I_9 &= \int \frac{(1 - t^2)}{t}dt \\ &= \int \frac{1}{t}dt - \int t dt \\ &= \ln|t| - \frac{1}{2}t^2 + C \\ &= \ln|\sin x| - \frac{1}{2}\sin^2 x + C,\ \ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 1.2 *Calculer les intégrales suivantes en utilisant la méthode d'intégration par parties :*

1. $I_1 = \int x \operatorname{Arcsin} x dx.$
2. $I_2 = \int x \sin x \cos x dx.$
3. $I_3 = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$
4. $I_4 = \int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx.$
5. $I_5 = \int x^n \ln x dx.$
6. $I_6 = \int \operatorname{Arcsin} x dx.$

Solution

1)$I_1 = \int x \operatorname{Arcsin} x dx.$

On pose

$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{Arcsin} x \\ g'(x) = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g(x) = \dfrac{1}{2}x^2. \end{cases}$$

Donc

$$I_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}.$$

Calculons $J = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $(-1 < x < 1)$. Posons

$$x = \sin \varphi \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right).$$

Alors

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \sin^2 \varphi d\varphi = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) d\varphi \\ &= \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi + C_2 = \frac{\operatorname{Arcsin} x}{2} - \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x \operatorname{Arcsin} x dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{Arcsin} x - \frac{1}{4}\left(\operatorname{Arcsin} x - x\sqrt{1-x^2} \right) + C \\ &= \frac{1}{4}\left((2x^2 - 1) \operatorname{Arcsin} x + x\sqrt{1-x^2} \right) + C,\ C \in \mathbb{R}\ et\ -1 < x < 1. \end{aligned}$$

2)$I_2 = \int x \sin x \cos x = \frac{1}{2} \int x \sin 2x$. On pose

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \sin 2x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$$

Donc

$$I_2 = \frac{1}{4}\left(-x\cos 2x + \int \cos 2x dx\right) = -\frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

3)$I_3 = \displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$
On pose

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = -\frac{\cos x}{\sin x} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} I_3 &= -x\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= -x\cot x + \ln|\sin x| + C,\ (C \in \mathbb{R},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

4) $I_4 = \displaystyle\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx.$
On pose

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 5 \\ g'(x) = e^{-x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(x) = 2x - 2 \\ g(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} I_4 &= -(x^2 - 2x + 5)e^{-x} + \int (2x - 2)e^{-x} dx \\ &= -(x^2 - 2x + 5)e^{-x} + J, \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{cases} f(x) = 2x - 2 \\ g'(x) = e^{-x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(x) = 2 \\ g(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} J &= -2(x-1)e^{-x} + 2\int e^{-x} dx \\ &= -2(x-1)e^{-x} - 2e^{-x} + C, \end{aligned}$$

donc

$$I_4 = -(x^2 - 2x + 5)e^{-x} - 2(x-1)e^{-x} - 2e^{-x} + C = -(x^2 + 5)e^{-x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

5) $I_5 = \displaystyle\int x^n \ln x dx.$

En intègre par parties, on pose

$$\begin{cases} u = \ln x \\ \\ v' = x^n dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} I_5 &= \int x^n \ln x dx \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

6) $I_6 = \displaystyle\int \operatorname{Arcsin} x dx.$

En utilisant l'intégration par parties, on pose

$$\left\{\begin{array}{l} u = \operatorname{Arcsin} x \\ \\ v' = dx \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u' = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ \\ v = x, \end{array}\right.$$

alors

$$\begin{aligned} I_6 &= x \operatorname{Arcsin} x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

7) $I_7 = \displaystyle\int x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx.$

L'application $x \longmapsto f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ est définie sur l'intervalle $]-1,1[$, $D_f =]-1,1[$. D'où

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \ln(1-x) - \ln(1+x).$$

Donc

$$\begin{aligned} I_7 &= \int x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx \\ &= \int x\left[\ln(1-x) - \ln(1+x)\right] dx \\ &= \int x\ln(1-x)dx - \int x\ln(1+x)dx \\ &= J_1 - J_2. \end{aligned}$$

Calculons J_1 : En intègre par parties, on pose

$$\left\{\begin{array}{l} u = \ln(1-x) \\ \\ dv = xdx \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} du = -\dfrac{1}{1-x}dx \\ \\ v = \dfrac{x^2}{2}, \end{array}\right.$$

donc

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int x\ln(1-x)dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1-x}dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\left[\int \frac{x^2-1}{1-x}dx + \int \frac{1}{1-x}dx\right] \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\int \frac{1-x^2}{1-x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\int (1+x)dx - \frac{1}{2}\ln(1-x) + c_1 \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{4}(1+x)^2 - \frac{1}{2}\ln(1-x) + c_1.
\end{aligned}$$

Calculons J_2 : En intègre aussi par parties, on pose

$$\begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = xdx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{1+x}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2}, \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int x\ln(1+x)dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x}dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\left[\int \frac{x^2-1}{1+x}dx + \int \frac{1}{1+x}dx\right] \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{1+x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\int (x-1)dx - \frac{1}{2}\ln(1+x) + c_2 \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x) + c_2.
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
I_7 &= J_1 - J_2 \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{4}(1+x)^2 - \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{x^2}{2}\ln(1+x) \\
&+ \frac{1}{4}(x-1)^2 dx + \frac{1}{2}\ln(1+x) \\
&= \frac{x^2}{2}\left[\ln(1-x) - \ln(1+x)\right] - \frac{1}{2}\left[\ln(1-x) - \ln(1+x)\right] \\
&- \frac{1}{4}\left[(1+x)^2 - (x-1)^2\right] \\
&= \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \frac{1}{4}(4x) + C \\
&= \left(\frac{x^2-1}{2}\right)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x + C,\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exercice 1.3 *Calculer les intégrales des fonctions irrationnelles suivantes :*

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx.$
2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{x+2}{x^2\sqrt{2x+3}} dx.$
3. $I_3 = \displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx.$
4. $I_4 = \displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+2}}.$

Solution

1)Posons $t = x - 1 \Longrightarrow x = t + 1 \Longrightarrow dx = dt$. Alors

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{(t+1)^3}{t^{\frac{1}{2}}} dt = \int \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t^{\frac{1}{2}}} dt \\
&= \int t^{\frac{5}{2}} dt + 3\int t^{\frac{3}{2}} dt + \int t^{\frac{-1}{2}} dt \\
&= \frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} + \frac{6}{5}t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} + 2t^{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{2}{7}(x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{6}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + 2(x-1)^{\frac{3}{2}} + 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} + \frac{6}{5}t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} + 2t^{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{2}{7}\sqrt{x-1}(x-1)^3 + \frac{6}{5}\sqrt{x-1}(x-1)^2 + 2\sqrt{x-1}(x-1) + 2\sqrt{x-1} + C \\
&= \sqrt{x-1}\left(\frac{(x-1)^3}{7} + \frac{3}{5}(x-1)^2 + x\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2)Posons $t = \sqrt{2x+3} \Longrightarrow x = \dfrac{t^2-3}{2} \Longrightarrow dx = tdt$ Alors

$$I_2 = \int \frac{\frac{t^2-3}{2}}{\left(\frac{t^2-3}{2}\right)^2} tdt = 2\int \frac{t^2+1}{(t^2-3)^2}dt.$$

Décomposons la fraction $\dfrac{t^2+1}{(t^2-3)^2}$ en éléments simples. On a

$$\frac{t^2+1}{(t^2-3)^2} = \frac{t^2+1}{(t-\sqrt{3})^2(t+\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{A}{t-\sqrt{3}} + \frac{B}{t+\sqrt{3}} + \frac{C}{(t-\sqrt{3})^2} + \frac{D}{(t+\sqrt{3})^2}. \tag{1.1}$$

En multipliant les deux menbres de l'égalité (1.1) par $(t-\sqrt{3})^2$, on obtient

$$\frac{t^2+1}{(t+\sqrt{3})^2} = A(t-\sqrt{3}) + \frac{B(t-\sqrt{3})^2}{t+\sqrt{3}} + C + \frac{D(t-\sqrt{3})^2}{(t+\sqrt{3})^2},$$

et en posant $t = \sqrt{3}$, on trouve $C = \frac{1}{3}$. De même en multipliant les deux membres de l'égalité (1.1) par $(t+\sqrt{3})^2$ et en posant $t = -\sqrt{3}$, on obtient $D = \frac{1}{3}$. Il reste à déterminer A et B. Pour cela, on pose $t = 0$ dans l'égalité (1.1), on aura

$$\frac{1}{9} = -\frac{A}{\sqrt{3}} + \frac{B}{\sqrt{3}} + \frac{C}{3} + \frac{D}{3} \Longrightarrow A - B = \frac{\sqrt{3}}{9}. \tag{1.2}$$

En multipliant les deux menbres de l'égalité (1.1) par t, on obtient

$$\frac{t^3+t}{(t^2-3)^2} = \frac{At}{t-\sqrt{3}} + \frac{Bt}{t+\sqrt{3}} + \frac{Ct}{(t-\sqrt{3})^2} + \frac{Dt}{(t+\sqrt{3})^2}$$

et en faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient

$$A + B = 0 \tag{1.3}$$

De (1.1) et (1.3) on a le système

$$\begin{cases} A+B = \frac{\sqrt{3}}{9} \\ A+B = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \frac{\sqrt{3}}{18} \\ B = -\frac{\sqrt{3}}{18}. \end{cases}$$

Donc la relation (1.1) devient

$$\frac{t^3+1}{(t^2-3)^2} = \frac{\sqrt{3}}{18(t-\sqrt{3})} - \frac{\sqrt{3}}{1}8(t+\sqrt{3}) + \frac{1}{3(t-\sqrt{3})^2} + \frac{1}{3(t+\sqrt{3})^2},$$

d'où

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{x+2}{x^2\sqrt{2x+3}}dx = 2\int\left(\frac{\sqrt{3}}{18(t-\sqrt{3})} - \frac{\sqrt{3}}{18(t+\sqrt{3})} + \frac{1}{3(t-\sqrt{3})^2} + \frac{1}{3((t+\sqrt{3})^2}\right)dt \\
&= \frac{\sqrt{3}}{9}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| - \frac{2}{3(t-\sqrt{3})} - \frac{2}{3(t+\sqrt{3})} + C \\
&= \frac{\sqrt{3}}{9}\ln\left|\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}}\right| - \frac{2}{3(\sqrt{2x+3}-\sqrt{3})} - \frac{2}{3(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3})} + C, (x > -\frac{3}{2},\ et\ x \neq 0).
\end{aligned}$$

3)Posons $t = \sqrt{x}$ $(0 \leq x < 1) \Longrightarrow dx = 2tdt$. Alors

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx = \int \sqrt{\frac{t^2}{1-t^2}}2tdt = \int \frac{2t^2}{\sqrt{1-t^3}}dt \\
&= -\frac{2}{3}\int \frac{-3t2}{\sqrt{1-t^3}} = -\frac{2}{3}.2\sqrt{1-t^3} + C \\
&= -\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}} + C,\ (C \in \mathbb{R}\ et\ 0 \leq x \leq 1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+2}} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+x+2}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}}dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}}dx \\
&= \sqrt{x^2+x+2} - \frac{1}{2}J.
\end{aligned}$$

Calculons J.

$$\begin{aligned}
J &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}} \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}} \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{7}{4}[\frac{4}{7}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1]}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{7}}x+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}}.
\end{aligned}$$

On pose

$$y = \frac{2}{\sqrt{7}}x + \frac{1}{\sqrt{7}} \Longrightarrow dy = \frac{2}{\sqrt{7}}dx,$$

d'où

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} \\ &= \operatorname{Argsh} y + C \\ &= \operatorname{Argsh}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}x + \frac{1}{\sqrt{7}}\right) + C. \end{aligned}$$

Finalement

$$I_6 = \sqrt{x^2+x+2} - \frac{1}{2}\operatorname{Argsh}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}x + \frac{1}{\sqrt{7}}\right) + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 1.4 *Calculer les intégrales des fonctions rationnelles suivantes :*

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}dx.$
2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{x-2}{x^2+x+1}dx.$
3. $I_3 = \displaystyle\int \frac{x^2+2x}{(x-1)(x^2+x+1)}dx.$

Solution

1)$I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}dx.$

On a

$$x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4},$$

donc $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$, on fait le changement de variable $y = x + \frac{1}{2} \Longrightarrow dy = dx$, donc

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dy}{y^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{dy}{y^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2y}{\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2(x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} + C, \ C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2)

$$I_2 = \int \frac{x-2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-5}{x^2+x+1}dx,$$

donc

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx,$$

par suite

$$I_2 = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + C, \ C \in \mathbb{R}$$

3)$I_3 = \displaystyle\int \frac{x^2+2x}{(x-1)(x^2+x+1)}dx$. On décompose la fration en éléments simples, donc

$$\frac{x^2+2x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}, \tag{1.4}$$

avec a, b et c trois réels à déterminer. Pour trouver a, on mulitiplie l'équation (1.4) par $x-1$ et ensuite on fait tendre $x \longrightarrow 1$, on trouve $a=1$. Pour trouver b, on multiplie l'équation (1.4) par x et ensuite on fait tendre $x \longrightarrow \infty$, on trouve $a+b=1 \Longrightarrow b=0$. Pour trouver c, on remplace x par 0 dans l'équation (1.4), on trouve alors

$$0 = -a + c \Longrightarrow c = 1,$$

ainsi

$$\frac{x^2+2x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+x+1},$$

et donc

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x_2+x+1} \\ &= \ln|x-1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + c, \ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 1.5 *Calculer les intégrales suivantes :*

$I_1 = \displaystyle\int \cos^4 x dx, \ I_2 = \int \sin 3x \cos x dx, t \in \mathbb{R},$

$I_3 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}, \ I_4 = \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6}dx.$

Solution :

• $I_1 = \displaystyle\int \cos^4 x dx.$

On sait que

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8},$$

donc

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \cos^4 x dx \\ &= \frac{1}{8}\int \cos 4x dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{3}{8}\int dx \\ &= \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x. \end{aligned}$$

• $I_2 = \displaystyle\int \sin 3x \cos x dx, \ t \in \mathbb{R}.$

On a

$$\sin 3x \cos x = \frac{1}{2}\left(\sin 4x + \sin 2x\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \sin 3x \cos x dx \\
&= \frac{1}{2}\int (\sin 4x + \sin 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \sin 4x dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x dx \\
&= -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x.
\end{aligned}$$

• $I_3 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

On pose $t = \tan\frac{x}{2}$, donc $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. Alors

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int \frac{dx}{\sin^3 x} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{(1+t^2)^2}{t^3} dt \\
&= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + t\right) dt \\
&= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2t^2} + 2\ln t + \frac{t^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2\tan^2\frac{x}{2}} + 2\ln(\tan\frac{x}{2}) + \frac{\tan^2\frac{x}{2}}{2}\right).
\end{aligned}$$

• $I_4 = \displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} dx$.
On pose

$$y = \sin x \Longrightarrow dy = \cos x dx,$$

donc

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} dx \\
&= \int \frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} dx \\
&= \int \frac{2y}{y^2 - 5y + 6} dy,
\end{aligned}$$

or

$$\frac{2y}{y^2-5y+6} = \frac{2y}{(y-3)(y-2)} = \frac{a}{y-3} + \frac{b}{y-2}$$

après un calcul simple, on trouve $a = 6, b = 4$. Par suite

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int \frac{2y}{y^2-5y+6} dy \\
&= \int \left(\frac{6}{y-3} - \frac{4}{y-2}\right) dy \\
&= 6\ln|y-3| - 4\ln|y-2|.
\end{aligned}$$

Exercice 1.6 *Calculer les intégrales suivantes :*

$$I_1 = \int \frac{e^x}{2+e^x}dx,\ \ I_2 = \int \sqrt{1-e^{-2x}}dx, I_3 = \int \frac{x^3}{(x+1)(x^2+4)^2}dx.$$

Solution :

• $I_1 = \displaystyle\int \frac{e^x}{2+e^x}dx = \ln(2+e^x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$

• $I_2 = \displaystyle\int \sqrt{1-e^{-2x}}dx.$

En fait le changement de variable

$$t = \sqrt{1-e^{-2x}} \Longrightarrow dt = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}dx \Longrightarrow dx = \frac{\sqrt{1-e^{-2x}}}{e^{-2x}}dt.$$

On a

$$t = \sqrt{1-e^{-2x}} \Longrightarrow t^2 = 1-e^{-2x} \Longrightarrow e^{-2x} = 1-t^2$$

donc

$$dx = \frac{t}{1-t^2}dt.$$

Par suite

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \sqrt{1-e^{-2x}}dx \\
&= \int \frac{t^2}{1-t^2}dt \\
&= \int \frac{-1+t^2+1}{1-t^2}dt \\
&= \int \frac{t^2-1}{1-t^2}dt + \int \frac{1}{1-t^2}dt \\
&= -\int dt + \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt \\
&= -t + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right).
\end{aligned}$$

• $I_3 = \displaystyle\int \frac{x^3}{(x+1)(x^2+4)^2}dx.$

On pose

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)(x^2+4)^2}.$$

La décomposition de f en éléments simples donc

$$\frac{x^3}{(x+1)(x^2+4)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+4} + \frac{dx+e}{(x^2+4)^2},$$

après un calcul simple, on trouve

$$a = -\frac{1}{25}, b = \frac{1}{25}, c = \frac{24}{25}, d = -\frac{4}{5}, e = \frac{16}{5},$$

par suite

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int \frac{x^3}{(x+1)(x^2+4)^2}dx \\
&= -\frac{1}{25}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{25}\int \frac{x+24}{x^2+4}dx - \frac{1}{5}\int \frac{4x+16}{(x^2+4)^2}dx \\
&= -\frac{1}{25}\ln|x+1| + \frac{1}{25}J_1 - \frac{1}{5}J_2.
\end{aligned}$$

Calculons J_1 :

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int \frac{x+24}{x^2+4}dx \\
&= \int \frac{x}{x^2+4}dx + 24\int \frac{1}{x^2+4}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx + 24\int \frac{1}{x^2+4}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + 24J_3.
\end{aligned}$$

Calculons J_3 :

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int \frac{1}{x^2+4}dx \\
&= \int \frac{dx}{4\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right]}dx \\
&= \frac{dx}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx,
\end{aligned}$$

on pose

$$y = \frac{x}{2} \Longrightarrow dy = \frac{1}{2}dx \Longrightarrow dx = 2dy,$$

donc

$$\begin{aligned}
J_3 &= \frac{1}{2}\int \frac{2dy}{y^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} y \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right),
\end{aligned}$$

d'où

$$J_1 = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + 12\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + c_1.$$

Calculons J_2 :

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int \frac{4x+16}{(x^2+4)^2}dx \\
&= \int \frac{4x}{(x^2+4)^2}dx + 16\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} \\
&= 2\int \frac{2x}{(x^2+4)^2}dx + 16\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} \\
&= -\frac{2}{x^2+4} + 16\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} \\
&= -\frac{2}{x^2+4} + 16J_4.
\end{aligned}$$

Calculons J_4 :

$$J_4 = \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \int \frac{dx}{\left[(x-0)^2+2^2)\right]^2},$$

on pose

$$\begin{aligned}
x = 2\tan t &\implies dx = 2\left(1+\tan^2 t\right)dt \\
&\implies dx = \frac{2}{\cos^2 t}dt,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
x = 2\tan t &\implies x^2 = 4\tan^2 t \\
&\implies x^2+4 = 4\left(1+\tan^2 t\right) = \frac{4}{\cos^2 t},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
J_4 &= \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} \\
&= \int \frac{\frac{2dt}{\cos^2 t}}{\frac{16}{\cos^4 t}} \\
&= \frac{1}{8}\int \cos^2 t dt \\
&= \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt \\
&= \frac{1}{16}\int (1+\cos 2t)\,dt \\
&= \frac{1}{16}t + \frac{1}{32}\sin 2t \\
&= \frac{1}{16}t + \frac{1}{16}\sin t\cos t,
\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}
x = 2\tan t &\implies \frac{x}{2} = \tan t \\
&\implies t = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sin t\cos t &= \frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{\frac{1}{\cos^2 t}} \\
&= \frac{\tan t}{1+\tan^2 t} \\
&= \frac{\frac{x}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\
&= \frac{2x}{x^2+4},
\end{aligned}$$

donc

$$J_4 = \frac{1}{16}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{8}\frac{x}{x^2+4}.$$

Par suite

$$J_2 = -\frac{2}{x^2+4} + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2x}{x^2+4}.$$

Finalement

$$\begin{aligned}
I_3 &= -\frac{1}{25}\ln|x+1| + \frac{1}{25}J_1 - \frac{1}{5}J_2 \\
&= -\frac{1}{25}\ln|x+1| + \frac{1}{25}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + 12\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)\right] \\
&- \frac{1}{5}\left[-\frac{2}{x^2+4} + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2x}{x^2+4}\right] + C \\
&= -\frac{1}{25}\ln|x+1| + \frac{1}{50}\ln(x^2+4) + \frac{7}{25}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{5}\left(\frac{x-1}{x^2+4}\right) + C,\ C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Intégrales définies

Notre but principal est de donner les concepts de base dans le calcul intégral et les différentes techniques d'intégrations qui seront utiles tout le long de ce semestre à savoir les intégrales définies et la résolution des équations différentielles.

2.1 Intégrale de Riemann

2.1.1 Subdivision et sommes de Darboux

Définition 2.1 ***(Subdivision d'un ségment)*** *Soit $[a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. On appelle subdivision de l'intervalle $[a, b]$, toute suite finie strictement croissante de nombres $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ telle que*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

On notera $S_{a,b}$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

Exemple 2.1 *Si $I = [0, 1]$, on peut considérer les subdivisions suivantes :*
$X_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $X_2 = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\}$.

Définition 2.2 *Soit $X = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$.*
On appelle " pas" de X, le nombre réel positif noté
$P(X) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$.

Définition 2.3 *Si $P(X) = \dfrac{b-a}{n}$, alors on dit que X est une subdivision équidistante de $[a, b]$.*

Exemple 2.2 *$X = \{1, 2, 3, 4\}$ est une subdivision de $[1, 4]$ et on a :*
$1 = x_0 < x_1 = 2 < x_2 = 3 < x_3 = 4$. *En plus,*

$$P(X) = \max_{1 \leq i \leq 4} (x_i - x_{i-1}) = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2\} = 1,$$

et $\dfrac{b-a}{n} = \dfrac{4-1}{3} = 1$ *donc* $P(X) = \dfrac{b-a}{n} = 1$ *et X est une subdivision équidistante.*

Remarque 2.1 *Soit $X = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a,b]$.*
Puisque f est bornée sur $[a,b]$ alors $\inf\limits_{[a,b]} f$ et $\sup\limits_{[a,b]} f$ existent.
En plus, f est bornée sur chaque intervalle $[x_{i-1},x_i]$ avec $i \in \{1,2,.....,n\}$, donc $\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$ et $\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$ existent.

Notation Désignons par

$$m := \inf_{[a,b]} f, \quad M := \sup_{[a,b]} f, \quad m_i := \inf_{[x_{i-1},x_i]} f, \quad M_i := \sup_{[x_{i-1},x_i]} f,$$

pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Lemme 2.1 *$\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, on a : $m \leq m_i \leq M_i \leq M$.*

Preuve
On a l'ensemble $\{f(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\} \subset \{f(x) : x \in [a,b]\}$ donc

$$\inf\{f(x) : x \in [a,b]\} \leq \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\}$$

et

$$\sup\{f(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\} \leq \sup\{f(x) : x \in [a,b]\},$$

et puisque

$$m := \inf_{a\leq x\leq b} f(x), \quad M := \sup_{a\leq x\leq b} f(x), \quad m_i := \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x), \quad M_i := \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x),$$

donc $m \leq m_i$ et $M_i \leq M$ et puisque $m_i \leq M_i$, alors $m \leq m_i \leq M_i \leq M$.

Définition 2.4 ***(Les sommes de Darboux inférieure et superieure de f)***
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et $X = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a,b]$.

$$S(f,X) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \qquad s(f,X) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Les nombres réels $S(f,X)$ et $s(f,X)$ sont appelées respectivement sommes de Darboux supérieure et inférieure de f, associées à la subdivision X de $[a,b]$.

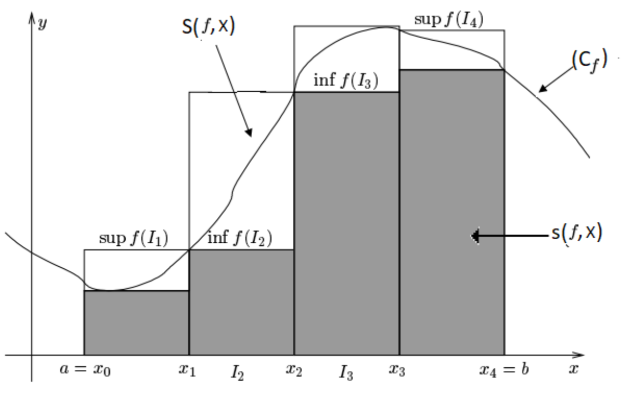

Figure : Somme de Darboux inférieure (colorée en gris) et supérieure (en blanc) de f pour une subdivision de $[a,b]$.

Exemple 2.3 *Si $f(x) = c$ (la fonction constante) et $X \in S_{a,b}$, alors*

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \ m_i := \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = c \text{ et } M_i := \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = c,$$

donc

$$S(f, X) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}),$$

et

$$s(f, X) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}).$$

Mais

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = (x_1 - x_0) + ... + x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

Donc $S(f, X) = s(f, X) = c(b - a)$.

Remarque 2.2 *Lorsque $X \subset Y$, on dit que Y est plus fine que X. (c'est une relation d'ordre partiel sur $S_{a,b}$).*

2.1.2 Propriétés des sommes de Darboux

1. $\forall X \in S_{a,b}$, on a $m(b - a) \le s(f, X) \le S(f, X) \le M(b - a)$.
2. L'ensemble $\{s(f, X) : X \in S_{a,b}\}$ est majoré dans $\mathbb{R}$ et $\{S(f, X) : X \in S_{a,b}\}$ est minoré dans $\mathbb{R}$. (Ainsi $\sup\{s(f, X) : X \in S_{a,b}\}$ et $\inf\{S(f, X) : X \in S_{a,b}\}$ existent.
3. Si on note $d_{a,b}(f) := \sup\{s(f, X) : X \in S_{a,b}\}$ et $D_{a,b}(f) := \inf\{S(f, X) : X \in S_{a,b}\}$, alors $d_{a,b}(f) \le D_{a,b}(f)$.
4. $\forall X, Y \in S_{a,b}$, on a $s(f, X) \le S(f, Y)$.
5. $\forall X, Y \in S_{a,b} : X \subset Y \Longrightarrow s(f, X) \le s(f, Y) \le S(f, X) \le S(f, Y)$.
6. $\forall Z \in S_{a,b}$ tel que $Z = X \cup Y$ donc $s(f, X) \le s(f, Z) \le S(f, Z) \le S(f, Y)$.

Preuve : (1) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, on a :$m \le m_i \le M_i \le M$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \ m(x_i - x_{i-1}) \le m_i(x_i - x_{i-1}) \le M_i(x_i - x_{i-1}) \le M(x_i - x_{i-1}) \\
&\Longrightarrow \ \sum_{i=1}^{n} m(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M(x_i - x_{i-1}) \\
&\Longrightarrow \ m(b - a) \le s(f, X) \le S(f, X) \le M(b - a).
\end{aligned}$$

(2) De la propriété précédente, on déduit que :
$M(b - a)$ est un majorant de $\{s(f, X) : X \in S_{a,b}\}$ et
$m(b - a)$ est un minorant de $\{S(f, X) : X \in S_{a,b}\}$.
(3) Soient X et Y deux subdivisions quelconques de $[a, b]$: $s(f, X) \in d_{a,b}$ et $S(f, Y) \in D_{a,b}$, donc $s(f, X) \le S(f, Y)$ d'où $S(f, Y)$ est un majorant de $\{s(f, X) : X \in S_{a,b}\}$, et puisque $d_{a,b}(f)$ est le plus petit des majorants de $\{s(f, X) : X \in S_{a,b}\}$, on déduit que :

$$d_{a,b}(f) \le S(f, Y),$$

et puisque
$D_{a,b}(f)$ est le plus grand des minorants de $\{S(f, X) : X \in S_{a,b}\}$, alors

$$d_{a,b}(f) \le D_{a,b}(f).$$

2.1.3 Fonctions Riemann intégrables, intégrale de Riemann

Définition 2.5 *On dit que f est intégrable au sens de Riemann (ou R-intégrable) sur l'intervalle $[a,b]$ si $d_{a,b}(f) = D_{a,b}(f)$.*
Cette quantité, notée par $\int_a^b f(x)dx$, est appelée intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$.

Remarque 2.3 *La variable d'intégration x dans $\int_a^b f(x)dx$ est une variable muette, c'est à dire, elle peut être remplacée par n'importe quelle autre variable.*

Notation
On note par $R_{a,b}$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $[a,b]$

Exemple 2.4 ***(Fonction de Dirichlet)***
La fonction de Dirichlet définie sur $[a,b]$ par :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in \mathbb{Q}\,; \\ \\ 0, & si\ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Soit $X \in S_{a,b}$ une subdivision de $[a,b]$ dont le pas $P(x)$ tend vers 0, alors on a :
$\forall i = 1, \ldots, n.$

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \chi(x) = 0, \quad M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \chi(x) = 1,$$

donc $s(\chi, X) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = 0$ et
$S(\chi, X) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = b - a$.
Alors

$$d_{a,b}(\chi) = \sup\{s(\chi, X) : X \in S_{a,b}\} = \sup\{0\} = 0,$$

et

$$D_{a,b}(\chi) = \inf\{S(\chi, X) : X \in S_{a,b}\} = \inf\{b - a\} = b - a.$$

Donc $d_{a,b}(\chi) \neq D_{a,b}(\chi)$, par suite χ n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Exemple 2.5 *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ par $f(x) = 4$ et $X \in S_{a,b}$ une subdivision de $[a,b]$ dont le pas $P(x)$ tend vers 0, alors on a :*

$$M_I = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = 4 = inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \quad \forall i \in \{1, ..., n\},$$

donc

$$s(f, X) = S(f, X) = 4 \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = 4(b - a),$$

alors

$$d_{a,b}(f) = \sup\{s(f, X) : X \in S_{a,b}\} = \sup\{4(b - a)\} = 4(b - a),$$

$$D_{a,b}(f) = \inf\{s(f, X) : X \in S_{a,b}\} = \inf\{4(b - a)\} = 4(b - a).$$

Alors $d_{a,b}(f) = D_{a,b}(f)$ ce qui implique que f est intégrable au sens de Riemann et de plus $\int_a^b f(x)dx = 4(b - a)$.

Théorème 2.1 ***(Théorème de Darboux)***
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soit (X_n) une suite d'éléments de $S_{a,b}$ telle que la suite numérique des pas, associée (P_n), converge vers 0 quand n tend vers l'infini. Alors on a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} s(f, X_n) = d_{a,b}(f),$$

et

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} S(f, X_n) = D_{a,b}(f).$$

De plus f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si et seulement si

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} s(f, X_n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} S(f, X_n) = \int_a^b f(x)dx.$$

Remarque 2.4 *Pour montrer si une fonction est intégrable au sens de Riemann en utilusant les sommes de Darboux, on doit considérer une subdivision $X \in S_{a,b}$ dont le pas $P(X)$ tend vers 0.*

Théorème 2.2 ***(Critère d'intégration)***
Une fonction $f \in R_{a,b}$ si et seulement si on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists X \in S_{a,b} : \quad S(f, X) - s(f, X) < \epsilon.$$

Preuve La condition nécéssaire :
Soit $\epsilon > 0$, on veut trouver $X \in S_{a,b}$ telle que $S(f, X) - s(f, X) < \epsilon$.
Puisque $d_{a,b}(f) = \sup\{s(f, X) : X \in S_{a,b}\}$ et $D_{a,b}(f) = \inf\{s(f, X) : X \in S_{a,b}\}$, en appliquant la propiété caractéristique de la borne supérieure et inférieure pour $\frac{\epsilon}{2}$, on choisit $X_1, X_2 \in S_{a,b}$ telles que
$d_{a,b}(f) < s(f, X_1) + \frac{\epsilon}{2}$ et $S(f, X_2) - \frac{\epsilon}{2} < D_{a,b}(f)$.
Mais puisque f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ donc $d_{a,b}(f) = D_{a,b}(f)$, alors

$$S(f, X_2) - \frac{\epsilon}{2} < D_{a,b}(f) = d_{a,b}(f) < s(f, X_1) + \frac{\epsilon}{2},$$

donc $S(f, X_2) - s(f, X_1) < \epsilon$.
Posons maintenant $X = X_1 \cup X_1$, il vient que

$$S(f, X) - s(f, X) < S(f, X_2) - s(f, X_1) < \epsilon.$$

Alors $S(f, X) - s(f, X) < \epsilon$.
Pour la condition suffisante :
Supposons que $\forall \epsilon > 0, \exists X \in S_{a,b}$ telle que

$$\begin{aligned} S(f, X) - s(f, X) < \epsilon &\implies S(f, X) - \epsilon < s(f, X) < S(f, X) \\ &\implies S(f, X) = d_{a,b}(f) \\ &\implies s(f, X) < S(f, X) < s(f, X) + \epsilon \\ &\implies s(f, X) = D_{a,b}(f) \\ &\implies D_{a,b}(f) \leq d_{a,b}(f), \end{aligned}$$

et puisqu'on a déja montré que : $d_{a,b}(f) \leq D_{a,b}(f)$, on déduit alors que $d_{a,b}(f) = D_{a,b}(f)$ donc f est intégrable au sens de Riemann.

Définition 2.6 *Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux, s'il existe un entiet n et une une subdivision $X = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que f soit continue sur chaque intervalle partiel $]x_{i-1}, x_i[$ et admette une limite finie à droite de x_{i-1} et une limite finie à gauche de x_i pour $i \in \{1, \ldots, n\}$*

Corollaire 2.1 *Les fonctions continues par morceaux sont intégrables.*

Définition 2.7 ***(Subdivision équidistante)*** *Une subdivision équidistante $X = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de l'intervalle $[a, b]$ est une subdivision telle que tous les intervalles partiels sont de longueur égale et*

$$\begin{cases} x_i = a + \dfrac{i}{n}(b-a), & i = 0, 1, 2, \ldots, n \\[2ex] x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}, & \forall i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Théorème 2.3 ***(Classe des fonctions R-intégrables)***

1. *Toute fonction continue sur $[a, b]$ est une fonction R-intégrable sur $[a, b]$.*
2. *Toute fonction monotone sur $[a, b]$ est une fonction R-intégrable sur $[a, b]$.*
3. *Si la fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est R-intégrable sur $[a, b]$, alors la restriction de f à tout intervalle $[\alpha, \beta]$ est aussi R-intégrable.*
4. *Si f et g sont deux fonctions bornées et définies de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que f est R-intégrable sur $[a, b]$ et l'ensemble $\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ est fini, alors g est une fonction R-intégrable sur $[a, b]$ et on a :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Preuve
(1) Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est uniformément continue sur $[a, b]$, donc : $\forall \epsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, telque.

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < 0 \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{b-a},$$

alors pour toute subdivision X vérifiant $P(X) < \alpha$, en particulier la subdivision régulière où $P(X) = \dfrac{b-a}{n}$, on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^* telque \;\; \forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \frac{b-a}{n} \Longleftrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{b-a},$$

en particulier pour $b_i, c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ telque

$$f(b_i) = M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \qquad f(c_i) = m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x),$$

donc

$$\begin{aligned}
|b_i - c_i| < \frac{b-a}{n} &\Longrightarrow |f(b_i) - f(c_i)| < \frac{\epsilon}{b-a} \\
&\Longrightarrow M_i - m_i < \frac{\epsilon}{b-a} \\
&\Longrightarrow (M_i - m_i)\frac{b-a}{n} < \frac{\epsilon}{n} \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\frac{b-a}{n} < \epsilon,
\end{aligned}$$

donc $S(f,X) - s(f,X) < \epsilon$
on déduit alors que
f est R-intégrable sur $[a,b]$.
(2) On suppose que f est croissante sur $[a,b]$ et on considère la subdivision régulière sur $[a,b]$, donc $m_i = f(x_{i-1})$ et $M_i = f(x_i)$, $\forall i = 1,\ldots,n$, donc

$$\begin{aligned}
S(f,X) - s(f,X) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\frac{b-a}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)\frac{b-a}{n} \\
&= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) \\
&= \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right).
\end{aligned}$$

Donc pour que f soit intégrable sur $[a,b]$, il suffit de choisir X telle que :

$$n > \frac{\left(f(b) - f(a)\right)(b-a)}{\epsilon}.$$

Exemple 2.6 *Les fonctions usuelles* $x \longrightarrow x^n (n \in \mathbb{N})$, $x \longrightarrow e^x, \cos x$ *et* $\sin x$ *sont continues sur chaque intervalle* $[a,b]$ *donc elles sont intégrables au sens de Riemann sur* $[a,b]$

Exemple 2.7 *Soit* f *une fonction définie sur* $[a,b]$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x}, & si\ -3 \leq x \leq 0\,; \\ \\ x^3 - 1, & si\ 0 < x \leq 3. \end{cases}$$

f est R-intégrable sur $[-3,3]$ du fait qu'elle est croissante sur $[-3,3]$ malgré qu'elle n'est pas continue sur $[-3,3]$.

2.1.4 Sommes de Riemann

Définition 2.8 *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction bornée et* $X = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ *et une une subdivision de* $[a,b]$ *et soient* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *des nombres réels, tels que :* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$ *alors le nombre*

$$S(f,X,\xi) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i),$$

est appelé somme de Riemann de f associée à X et au système de points $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Si on pose de plus $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, on a

$$S(f, X, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

c'est de là que vient la notation $\int_a^b f(x)dx$.
Dans le cas d'une subdivision régulière

$$P(X) = \frac{b-a}{n} \Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} P(X) = 0.$$

Par conséquent, si f est intégrable sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + \frac{i}{n}(b-a)). \qquad (\star)$$

Exemple 2.8 *Calculer les intégrales suivantes, en utilusant les sommes de Riemann.*
(1) $I = \int_2^4 c\ dx$, *avec* $c \in \mathbb{R}^*$.
On pose $f(x) = c$, *on considère la subdivision régulière* $X = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ *de* $[2, 5]$, *donc*

$$= \begin{cases} x_i = 2 + \dfrac{3i}{n} \\ x_i - x_{i-1} = \dfrac{3}{n} \end{cases}, \forall i = 1, \ldots, n,$$

alors $f(x_i) = f(2 + \frac{3i}{n}) = c$, $\forall i = 1, ..., n$. *Puisque* f *est continue sur* $[2, 5]$, *alors* f *est intégrable sur* $[2, 5]$, *alors d'après* $(\star)$ *on a :*

$$\int_2^5 cdx = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} c = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{3}{n}(nc) = 3c, \ c \in \mathbb{R}^*.$$

(2) $I = \int_0^2 xdx$.
On pose $f(x) = x$, *on considère la subdivision régulière* $X = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ *de* $[0, 2]$, *donc*

$$\begin{cases} x_i = \frac{2i}{n} \\ x_i - x_{i-1} = \frac{2}{n} \end{cases}, \forall i = 1, \ldots, n,$$

alors $f(x_i) = f(\frac{2i}{n}) = c, \forall i = 1, \ldots, n$. *Puisque* f *est continue sur* $[0, 2]$, *alors* f *est intégrable sur* $[0, 2]$, *alors d'après* $(\star)$ *on a :*

$$\int_0^2 xdx = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{2n(n+1)}{2n^2} = 1.$$

Car $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$

2.2 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Théorème 2.4 ***(Relation de Chasles)***
Soient a, b et c trois nombres réels ($a < c < b$). Alors

$$f \in R_{a,b} \Longrightarrow (f \in R_{a,c} \wedge f \in R_{c,b}),$$

et on a la relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Définition 2.9 *Pour $b < a$, on définit :*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

et pour $b = a$, $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Proposition 2.1 *$R_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{[a,b]}$ des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, et $I : R_{a,b} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto \int_a^b f(x)dx$ est une fonction linéaire sur $R_{a,b}$.*
Autrement dit, $0 \in R_{a,b}$ et

$$\forall f, g \in R_{a,b},\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \quad \alpha f + \beta g \in R_{a,b},$$

et

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Théorème 2.5 ***(Ordre et intégration)***
Soient $f, g \in R_{a,b}$ ($a < b$), on a :

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0, \tag{2.1}$$

$$f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx, \tag{2.2}$$

$$|f(x)| \in R_{a,b} \quad \textit{et} \quad \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx, \tag{2.3}$$

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a,b] \Longrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \tag{2.4}$$

Preuve
(1) On a : $\forall x \in [a,b] : f(x) \geq 0 \Longrightarrow \forall X \in S_{a,b} :\ s(f,X) > 0$ et $s(f,X) \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Donc $\int_a^b |f(x)|dx \geq 0$.
(2) On a : $\forall x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} g(x) \geq f(x) &\Longrightarrow (g-f)(x) \geq 0 \\ &\Longrightarrow \int_a^b (g-f)(x)dx \geq 0 \\ &\Longrightarrow \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0 \\ &\Longrightarrow \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

(3) On a : $\forall x \in [a,b] : -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow -\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \\ &\Longrightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \end{aligned}$$

(4) On a : $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a,b]$,
alors $m \leq f(x_i) \leq M,\ \forall x_i \in [a,b]$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow m(x_i - x_{i-1}) \leq f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M(x_i - x_{i-1}),\ \forall i = 1,\ldots,n \\ &\Longrightarrow m\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \\ &\Longrightarrow m(b-a) \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M(b-a), \end{aligned}$$

par suite

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

2.3 Théorème de la moyenne

Théorème 2.6 *Soient $f, g \in R_{a,b}$, g ayant un signe constant sur $[a,b]$, alors il existe un nombre réel $\alpha \in [m,M]$, où $m = \inf\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$ et $M = \sup\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$,*
tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \alpha \int_a^b g(x)dx.$$

Si de plus f est continue sur $[a,b]$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que : $\alpha = f(c)$.

Preuve
On suppose que $g(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$.
• Si $\int_a^b g(x)dx = 0$ alors on a

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sup_{a\leq x\leq b} |f(x)| \int_a^b |g(x)|dx,$$

alors $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, ainsi α est quelconque.
• Si $\int_a^b g(x)dx > 0$ alors on a $\forall x \in [a,b]$

$$\begin{aligned} m \le f(x) \le M &\Longrightarrow mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x) \\ &\Longrightarrow m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx \\ &\Longrightarrow m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M, \end{aligned}$$

alors il existe $\alpha \in [m,M]$, tel que

$$\alpha = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \Longleftrightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = \alpha\int_a^b g(x)dx.$$

Si de plus f est continue sur $[a,b]$, alors elle atteint toutes les valeurs comprises entre m et M d'où

$$\exists c \in [a,b] \ telque \ \alpha = f(c).$$

Corollaire 2.2 *Si f est continue sur $[a,b]$ alors*

$$\exists c \in [a,b], \ \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Exemple 2.9 *Soit $I = \int_0^\pi \cos^2 xdx$, montrer en appliquant le théorème de la moyenne qu'il existe un réel $\alpha \in [-1,1]$, tel que $I = \alpha\int_0^\pi \cos xdx$ et trouver sa valeur.*
Solution
On pose $f(x) = g(x) = \cos x$, puisque $g(x) \ge 0$, $\forall x \in [0,\pi]$ et

$$\inf_{0\le x\le\pi} f(x) = -1, \quad \sup_{0\le x\le\pi} f(x) = 1$$

alors d'aprés le théorème de la moyenne, il existe $\alpha \in [-1,1]$ tel que

$$I = \alpha\int_0^\pi \cos xdx.$$

Sachant que : $\cos^2 xdx = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, d'où

$$\int_0^\pi \cos^2 xdx = \int_0^\pi \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

et on a $\int_0^\pi \cos xdx = 2$, donc $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2.3.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient f et g deux fonctions bornées et intégrables sur $[a,b]$, alors

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$$

Preuve
Comme $f, g \in R_{a,b}$, donc $kf + g \in R_{a,b}$, pour tout $k \in \mathbb{R}$.
Posons
$$F(k) = \int_a^b [kf(x) + g(x)]^2 \, dx.$$
Notons que d'aprés le théorème(Ordre et intégration), $F(k) \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$.
Or, $F(k)$ garde le signe positif, pour tout $k \in \mathbb{R}$ si et seulement le discriminant du trinôme $F(k)$ est négatif, ce qui nous donne
$$\Delta = 4\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\left(\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx\right) \leq 0.$$
Donc
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right).$$

2.4 Intégrales de Riemann et primitives

2.4.1 Intégrale définie en fonction de sa borne supérieure

Définition 2.10 *Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$.*
On appelle $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, l'intégrale de f définie en fonction de sa borne supérieure.

Proposition 2.2 *Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et F son intégrale définie en fonction de sa borne supérieure, alors*

1. *F est continue sur $[a, b]$.*
2. *Si de plus f est continue sur $[a, b]$, F est dérivable sur $[a, b]$ et on a*
$$F'(x) = f(x), \text{ pour tout } x \in [a, b]$$

Preuve

1. Montrons que F est continue sur $[a, b]$, pour cela, il suffit de montrer que $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} F(x_0 + h) = F(x_0)$, pour $x_0 \in [a, b]$ et $h \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}
|F(x_0 + h) - F(x_0)| &= \left|\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right| \\
&= \left|\int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right| \\
&= \left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt\right| \\
&\leq \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)| \int_{x_0}^{x_0+h} dt = h \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|,
\end{aligned}$$
et si on pose $\sup\limits_{a \leq t \leq b} |f(t)| = M$, alors
$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| \leq Mh,$$

par passage à la limite quand $h \longrightarrow 0$, on a :

$$\lim_{h\longrightarrow 0} F(x_0+h) = F(x_0).$$

2. Montrons que F est dérivable sur $[a,b]$, calculons donc $\lim\limits_{h\longrightarrow 0} \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$, pour $x_0 \in [a,b]$ et $h \in \mathbb{R}$.
Puisque $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h}$
Mais, d'aprés le théorème de la moyenne, il existe $c \in [x_0, x_0+h]$ telle que $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = [(x_0+h)-x_0]f(c)$, par suite

$$\frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h} = \frac{hf(c)}{h},$$

donc

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0} f(c) = \lim_{c\longrightarrow x_0} f(c) = f(x_0).$$

Alors F est dérivable sur $]a,b[$.
De même on trouve :

$$\lim_{h\longrightarrow^{>} 0} \frac{F(a+h)-F(a)}{h} = f(a) \; et \; \lim_{h\longrightarrow^{<} 0} \frac{F(b+h)-F(b)}{h} = f(b),$$

donc F est dérivable à droite de a, à gauche de b, ainsi F est dérivable sur $[a,b]$.

2.4.2 Théorème de Newton-Leibnitz

Théorème 2.7 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et F une primitive de f sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Preuve
Soit $H(t) = \int_a^t f(x)dx$ une autre primitive de f sur $[a,b]$, alors

$$\forall t \in [a,b] : H(t) - F(t) = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

donc, $H(a) = F(a) + c = \int_a^a f(x)dx = 0$, alors $c = -F(a)$,
d'un autre côté

$$H(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Exemple 2.10 *Calculer les intégrales suivantes :*

$$I_1 = \int_{-1}^0 e^x dx = [e^x]_{-1}^0 = 1 - \frac{1}{e}.$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\text{Arctan}\, x]_0^1 = \text{Arctan}\, 1 - \text{Arctan}\, 0 = \frac{\pi}{4}.$$

2.5 Intégration par parties dans une intégrale définie

Théorème 2.8 *Soient f et g deux fonctions dérivables sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Preuve : On a

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),\ \forall x \in [a, b],$$

en intégrant les deux membres de la dernière égalité de a à b on arrive à

$$\int_a^b (f(x)g(x))'dx = [f(x)g(x)]_a^b,$$

et d'autre part

$$\int_a^b (f(x)g(x))'dx = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx,$$

donc

$$[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx,$$

par conséquent

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Exemple 2.11 *Calculer*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin x dx.$$

On pose

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \sin x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = -\cos x \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} I &= -[x \cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx \\ &= -\frac{\pi}{6} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

2.6 Changement de variables dans une intégrale définie

Théorème 2.9 *Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ une fonction continûment dérivable, telle que $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))(\varphi'(t))dt.$$

Preuve :

En faisant le changement de variable

$$x = \varphi(t) \Longrightarrow dx = \varphi'(t)dt \ et \ \begin{cases} x = a \Leftrightarrow t = \alpha \\ x = b \Leftrightarrow t = \beta. \end{cases}$$

Exemple 2.12 *Calculer*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos x}{1+\sin^2 x} dx.$$

On fait le changement de variable

$$t = \sin x \Longrightarrow dt = \cos x dx$$

et par suite

$$I = 3\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = 3[\arctan t]_0^1 = \frac{3\pi}{4}.$$

2.7 Exercices

Exercice 2.1 *En utilusant les sommes de Riemann, calculer l'intégrale suivant :*

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

On rappelle que :
$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solution

On va utiluser le résultat suivant :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx,$$

où f est une fonction continue sur $[0, 1]$, pour calculer l'intégrale donée.
On a $f(x) = x$, d'où

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2n^3}{6n^3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 2.2 *Calculer*

$$(1) \int_{-1}^{4} [x]dx, \quad (2) \int_0^1 [3x^2]dx,$$

où $[.]$ est la fonction partie entière.

Solution

(1) La fonction partie entière $x \longmapsto [x]$ est bornée et croissante sur $[0,1]$ est donc elle est intégrable. On a

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{4}[x]dx &= \int_{-1}^{0}[x]dx+\int_{0}^{1}[x]dx+\int_{1}^{2}[x]dx+\int_{2}^{3}[x]dx+\int_{3}^{4}[x]dx\\
&= \int_{-1}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{1}0dx+\int_{1}^{2}1dx+\int_{2}^{3}2dx+\int_{3}^{4}3dx\\
&= (-1).1+0.1+1.1+2.1+3.1\\
&= 5.
\end{aligned}$$

(2) La fonction $x \longmapsto [3x^2]$ est bornée et croissante sur $[0,1]$ est donc elle est intégrable. De plus, on peut écrire

$$[3x^2]=0 \Longleftrightarrow 0\leq x\leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$[3x^2]=1 \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\leq x<\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$[3x^2]=2 \Longleftrightarrow \sqrt{\frac{2}{3}}\leq x<1.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{1}[3x^2]dx &= \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}[3x^2]dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}}[3x^2]dx+\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{1}[3x^2]dx\\
&= \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}0dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}}1dx+\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{1}2dx\\
&= 0+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\\
&= 2-\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

Exercice 2.3 *Calculer les limites des suites suivantes, quand $n \longrightarrow +\infty$*

$$1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n+3k},\quad 2)\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n},\quad 3)\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{(n+k)^2},$$

$$4)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}},\quad 5)n^2\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{k^3}.$$

Solution

On va utiluser le résultat suivant :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_{0}^{1}f(x)dx,$$

où f est une fonction continue sur $[0,1]$, pour calculer les limites donées. Il faut savoir que

$$\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_a^b f(x)dx.$$

Pour une fonction définie sur $[a,b]$, on utiluse

$$\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx.$$

(1) On a

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n+3k}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n(2+3\frac{k}{n})}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2+3\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où $f(x)=\frac{1}{2+3x}$ laquelle est continue sur $[0,1]$. Ainsi

$$\begin{aligned}\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n+3k} &= \int_0^1\frac{dx}{2+3x}\\ &= \frac{1}{3}\int_0^1\frac{3dx}{2+3x}\\ &= \frac{1}{3}\left[\ln(2+3x)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{2}\right),\end{aligned}$$

(2) On a

$$\begin{aligned}\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n} &= \frac{2}{\pi}\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(0+\frac{k}{n}\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx,\end{aligned}$$

mais

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1.$$

Ainsi

$$\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}=\frac{2}{\pi}.$$

(3) On a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2(1+\frac{k}{n})^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2}\longrightarrow\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}$$

lorsque $n\longrightarrow\infty$ car $x\longmapsto\frac{1}{(1+x)^2}$ est continue sur $[0,1]$.
Puisque

$$\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}=\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1=\frac{1}{2},\quad alors\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}=\frac{1}{2}.$$

(4) Le symbole $\prod$ désigne le produit. On a

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

mais

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\int_0^1\ln(1+x)dx=[(x+1)\ln(x+1)-x]_0^1,$$

donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)\right)=2\ln 2-1.$$

Ainsi

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{2\ln 2-1}.$$

(5) On a, en posant $p=k-n$,

$$\begin{aligned} n^2\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k^3}=n^2\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{(p+n)^3}=n^2\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{n^3(\frac{p}{n}+1)^3} &= \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{(\frac{p}{n}+1)^3}\\ &\longrightarrow \int_0^1\frac{dx}{(1+x)^3}, \end{aligned}$$

lorsque $n\longrightarrow\infty$. Mais

$$\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^3}=\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^2}\right]_0^1=\frac{3}{8}=\lim_{n\longrightarrow+\infty}n^2\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k^3}.$$

Exercice 2.4 *Trouver $F'(x)$ (où $x>0$) dans les cas suivants :*

$$(1)F(x)=\int_0^x\cos(t^2)dt,\quad 2)F(x)=\int_{2x}^1\sqrt{1+t^3}dt.$$

Solution

Les deux fonctions à intégrer sont continues sur $]0,+\infty[$ (par exemple) et donc F est dérivable dans les deux cas.

(1) Soit G une primitive de $\cos(t^2)$ (bien sûr on ne connaît pas sa forme explicitement, mais ce n'est pas important car on a besoin de G'). D'où

$$F(x)=G(x)-G(0)\Longrightarrow F'(x)=G'(x)=\cos(x^2)\quad car\ (G(0))'=0$$

(car c'est une constante).

(2) Soit G une primitive de $\sqrt{1+t^3}$. On a

$$F(x)=G(1)-G(2x)\Longrightarrow F'(x)=-(2x)'G'(2x)=-2\sqrt{1+8x^3}.$$

Exercice 2.5 *Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
Trouver $F'(x)$ où

$$F(x)=\int_{2x+1}^{x^2+2}f(t)dt.$$

Solution
Soit G une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (donc $G' = f$). On a :

$$F(x) = \int_{2x+1}^{x^2+2} f(t)dt \Longrightarrow F(x) = G(x^2+2) - G(2x+1).$$

D'où

$$F'(x) = 2xG'(x^2+2) - 2G'(2x+1) = 2xf(x^2+2) - 2f(2x+1).$$

Exercice 2.6 *Trouver*

$$l = \underset{x \longrightarrow 0}{lim} \frac{\int_0^x \sin(t^3)dt}{x^4}.$$

Solution
En utilusant la règle de l'Hospital, on a

$$\begin{aligned} l &= \underset{x \longrightarrow 0}{lim} \frac{\int_0^x \sin(t^3)dt}{x^4} \\ &= \frac{\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(t^3)dt}{\frac{d}{dx}(x^4)} \\ &= \underset{x \longrightarrow 0}{lim} \frac{\sin(x^3)}{4x^3} \\ &= 1.\frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 2.7 *Calculer*

$$\underset{x \longrightarrow 0}{lim} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt, \quad \underset{x \longrightarrow 1^+}{lim} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

Solution
(1) Nous allons utiluser le théorème de la moyenne. On doit calculer la limite à gauche et à droite de 0 pour avoir une fonction de signe constant sur $]x, 2x[$. On a

$$\underset{x \longrightarrow 0^+}{lim} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt = \underset{x \longrightarrow 0^+}{lim} \cos c \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = \underset{x \longrightarrow 0^+}{lim} \cos c \ln 2,$$

car $\frac{1}{t}$ a un signe constant sur $]x, 2x[$ et où $c \in]x, 2x[$.
Maintenant, on a

$$x < c < 2x \Longrightarrow \underset{x \longrightarrow 0^+}{lim} c = 0 \Longrightarrow \underset{x \longrightarrow 0^+}{lim} \cos c = 1,$$

et donc

$$\underset{x \longrightarrow 0^+}{lim} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt = \ln 2.$$

De la même manière, on obtient

$$\underset{x \longrightarrow 0^-}{lim} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt = \ln 2,$$

et donc

$$\underset{x \longrightarrow 0}{lim} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt = \ln 2.$$

(2) On pose $t = e^y$, d'où $dt = e^y dy$ et $(t = x \Longleftrightarrow y = \ln x)$ et $(t = x^2 \Longleftrightarrow y = \ln x^2 = 2\ln x)$. On a donc

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{e^y dy}{y},$$

et puisque $y \longrightarrow \frac{1}{y}$ est continue sur $]\ln x, 2\ln x[$ (car $\ln x > 0$ du fait que $x > 1$) et elle est positive (donc elle garde un signe constant) et bien entendu la fonction exponentielle est continue, alors le théorème de la moyenne nous permet d'avoir, pour un c dans $]\ln x, 2\ln x[$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow 1^+} \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{e^y dy}{y} &= \lim_{x \longrightarrow 1^+} e^c \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{dy}{y} = \lim_{x \longrightarrow 1^+} e^c [\ln(2\ln x) - \ln(\ln x)] \\ &= \lim_{x \longrightarrow 1^+} e^c \ln 2 = \ln 2, \ \textit{car } x \longrightarrow 1^+ \Longrightarrow c \Longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \ln 2.$$

De la même manière, on traite le cas $x \longrightarrow 1^-$ et ça nous donne aussi $\ln 2$. Donc

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \ln 2.$$

Exercice 2.8 *Montrer que :*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2} dx = 0.$$

Solution

On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} :\ x^2 + n^2 \geq n^2 \Longrightarrow \frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

De plus on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} :\ |\sin nx| \leq 1,$$

et que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Donc

$$0 \leq \left| \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2} dx \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin nx}{n^2 + x^2} \right| dx \leq \int_0^{2\pi} \frac{dx}{n^2} = \frac{2\pi}{n^2} \longrightarrow 0$$

quand $n \longrightarrow \infty$. Ainsi

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2} dx = 0.$$

Exercice 2.9 *Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Montrer que les deux inégalités suivantes ne sont pas compatibles*

$$\int_0^1 (f(x) + e^x)^2 dx \leq 1 \quad \textit{et} \quad \int_0^1 (f(x) - e^{-x})^2 dx \leq 1$$

(Indication : utiluser l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Solution
Les deux intégrales existent car les fonctions $x \longrightarrow (f(x)+e^x)^2$ et $x \longrightarrow (f(x)-e^{-x})^2$ sont continues.
On a alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^1 |f(x)+e^x|dx = \int_0^1 |f(x)+e^x|.1dx \leq \sqrt{\int_0^1 (f(x)+e^x)^2 dx}\sqrt{\int_0^1 1^2 dx}$$

d'où

$$\int_0^1 |e^x+f(x)|dx = \int_0^1 |f(x)+e^x|dx \leq 1.$$

D'une façon similaire on obtient

$$\int_0^1 |f(x)-e^{-x}|dx = \leq \sqrt{\int_0^1 (f(x)-e^{-x})^2 dx}\sqrt{\int_0^1 1^2 dx} \leq 1$$

On a aussi pour tout réel x

$$|e^x+e^{-x}| = |e^x+f(x)-f(x)+e^{-x}| \leq |e^x+f(x)|+|f(x)+e^{-x}|.$$

Il vient que

$$\int_0^1 |e^x+e^{-x}|dx \leq \int_0^1 |e^x+f(x)|dx + \int_0^1 |f(x)-e^{-x}|dx \leq 1+1=2,$$

et ceci est la contradiction cherchée. En effet, comme pour tout réel x, on a $e^x+e^{-x}>0$, alors on aura :

$$\int_0^1 |e^x+e^{-x}|dx = \int_0^1 (e^x+e^{-x})dx = \left[e^x-e^{-x}\right]_0^1 = e-e^{-1} \simeq 2,35 \nleq 2.$$

Exercice 2.10 *On considère les intégrales suivantes :*

$$I_1 = \int_0^\pi (x\cos x)^2 dx, \quad I_2 = \int_0^\pi (x\sin x)^2 dx.$$

Calculer I_1+I_2 et I_1-I_2 puis en déduire I_1 et I_2.

Solution :
1)Calculons I_1+I_2 :

$$\begin{aligned} I_1+I_2 &= \int_0^\pi (x\cos x)^2 dx + \int_0^\pi (x\sin x)^2 dx \\ &= \int_0^\pi x^2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx \\ &= \int_0^\pi x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{3}. \end{aligned}$$

2)Calculons $I_1 - I_2$:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= \int_0^\pi (x\cos x)^2 dx - \int_0^\pi (x\sin x)^2 dx \\ &= \int_0^\pi x^2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) dx \\ &= \int_0^\pi x^2 \cos 2x dx. \end{aligned}$$

En intègre par parties, on pose

$$\begin{aligned} u = x^2 &\implies u' = 2xdx \\ v' = \cos 2xdx &\implies v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= \frac{1}{2}\left[x^2 \sin 2x\right]_0^\pi - \int_0^\pi x\sin 2xdx \\ &= \int_0^\pi x\sin 2xdx. \end{aligned}$$

En intègre encore par parties, on pose

$$\begin{aligned} u = x &\implies u' = dx \\ v' = \sin 2xdx &\implies v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= -\left[-\frac{1}{2}\left[x\cos 2x\right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos 2xdx\right] \\ &= \left[\frac{x\cos 2x}{2}\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2xdx \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

3)Déduisons I_1 et I_2 :

On a le système suivant :

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = \dfrac{\pi^3}{3} & (*) \\ I_1 - I_2 = \dfrac{\pi}{2}. & (**) \end{cases}$$

$(*) + (**)$ donne

$$2I_1 = \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2},$$

donc

$$I_1 = \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4},$$

et

$$I_2 = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2.11 *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$.

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$.
2. *Trouver une relation entre* I_n *et* I_{n+2}.
3. *Montrer que la suite* $(I_n)_n$ *est convergente et calculer sa limite.*
4. *Calculer* I_1 *et en déduire* I_3.

Solution :

1. **Montrons que** $I_n \geq 0, \forall n$
   On sait que
   $$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad \tan x \geq 0,$$
   d'où
   $$\tan^n x \geq 0$$
   ainsi
   $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx \geq 0,$$
   donc
   $$I_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. **Trouvons une relation entre** I_n **et** I_{n+2}
   On a :
   $$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \times \tan^2 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \times \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x} dx - I_n, \end{aligned}$$
   d'où
   $$I_{n+2} + I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x} dx.$$
   On pose
   $$y = \tan x \Longrightarrow dy = \frac{1}{\cos^2 x} dx,$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x} dx &= \int_0^1 y^n dy \\ &= \left[\frac{1}{n+1} y^{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Finalement

$$I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \geq 0.$$

3. **Montrons que $(I_n)_n$ est convergente**

On a

$$\begin{aligned}I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^{n+1} x - \tan^n x\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \left(\tan x - 1\right) dx.\end{aligned}$$

On sait bien que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad 0 \leq \tan x \leq 1 \Longrightarrow \tan x - 1 \leq 0,$$

alors

$$\tan^n x \left(\tan x - 1\right) \leq 0$$

et par suite

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \left(\tan x - 1\right) dx \leq 0$$

c'est-à-dire

$$I_{n+1} - I_n \leq 0$$

donc $(I_n)_n$ est décroissante.

D'après la question (1), on a $I_n \geq 0$ c'est-à-dire I_n est une suite minorée.

Conclusion :

$$\left\{\begin{array}{ll} (I_n) & \text{est décroissante} \\ & \quad\quad \textit{et} \\ (I_n) & \text{est minorée} \end{array}\right. \Longrightarrow (I_n)\text{est convergente}$$

Calculons sa limite

On a

$$(I_n) \quad \textit{convergente} \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} I_{n+2} = \lim_{n \to +\infty} I_n = l,$$

d'autre part on a

$$I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1},$$

par passage à la limite on trouve que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(I_{n+2} + I_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} (I_{n+2} + I_n) = \lim_{n\to+\infty} I_{n+2} + \lim_{n\to+\infty} I_n = l + l = 0,$$

d'où

$$2l = 0,$$

ainsi

$$l = 0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

4. **Calculons I_1 et déduisons I_3**
On a

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \\ &= -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) + \ln(\cos 0) \\ &= -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \ln 1 \\ &= \ln\sqrt{2} = \ln 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

Déduisons I_3 :
On a

$$I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1} \implies I_3 + I_1 = \frac{1}{2},$$

d'où

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2} - I_1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 \\ &= \frac{1}{2}(1 - \ln 2). \end{aligned}$$

Exercice 2.12 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x dx$.*

1. *Calculer I_0 et I_2.*
2. *Trouver une relation entre I_n et I_{n+2}.*
3. *Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante et en déduire qu'elle convergente.*

Solution :

1. **Calculons I_0 et I_2 :**

$$I_0 = \int_0^1 \sin \pi x dx = -\frac{1}{\pi}\left[\cos \pi x\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

• $I_2 = \int_0^1 x^2 \sin \pi x dx.$
En intègre par parties on pose :

$$u = x^2 \Longrightarrow u' = 2xdx$$

$$v' = \sin \pi x dx \Longrightarrow v = -\frac{1}{\pi} \cos \pi x$$

d'où

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 x^2 \sin \pi x dx \\
&= -\frac{1}{\pi} \left[x^2 \cos \pi x\right]_0^1 + \frac{2}{\pi} \int_0^1 x \cos \pi x dx \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 x \cos \pi x dx.
\end{aligned}$$

On pose

$$u = x \Longrightarrow u' = dx$$

$$v' = \cos \pi x dx \Longrightarrow v = \frac{1}{\pi} \sin \pi x$$

donc

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{\pi} [x \sin \pi x]_0^1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin \pi x dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin \pi x dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{\pi^2} [\cos \pi x]_0^1\right) \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{-2}{\pi^2}\right) = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}.
\end{aligned}$$

2. **Trouvons une relation entre I_n et I_{n+2} :**
$I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2} \sin \pi x dx.$
L'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
u = x^{n+2} &\Longrightarrow u' = (n+2)x^{n+1} dx \\
v' = \sin \pi x dx &\Longrightarrow v = -\frac{1}{\pi} \cos \pi x
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= -\left[\frac{1}{\pi} x^{n+2} \cos \pi x\right]_0^1 + \frac{n+2}{\pi} \int_0^1 x^{n+1} \cos \pi x dx \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{n+2}{\pi} \int_0^1 x^{n+1} \cos \pi x dx.
\end{aligned}$$

Calculons $\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\cos\pi x dx$ **:**
On pose

$$\begin{aligned} u = x^{n+1} &\implies u' = (n+1)x^n dx \\ v' = \cos\pi x dx &\implies v = \frac{1}{\pi}\sin\pi x \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{n+1}\cos\pi x dx &= \left[\frac{1}{\pi}x^{n+1}\sin\pi x\right]_0^1 - \frac{n+1}{\pi}\int_0^1 x^n\sin\pi x dx \\ &= -\frac{n+1}{\pi}\int_0^1 x^n \sin\pi x dx \\ &= -\frac{n+1}{\pi}I_n. \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \frac{1}{\pi} + \frac{n+2}{\pi}\int_0^1 x^{n+1}\cos\pi x dx \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{n+2}{\pi}\left(-\frac{n+1}{\pi}I_n\right) \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2}I_n. \end{aligned}$$

3. **Montrons que la suite $(I_n)_n$ est décroissante :**

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 x^{n+1}\sin\pi x dx - \int_0^1 x^n \sin\pi x dx \\ &= \int_0^1 x^n(x-1)\sin\pi x dx. \end{aligned}$$

• On a :

$$\forall x \in [0,1], \quad \pi x \in [0,1],$$

d'où

$$\sin\pi x \geq 0$$

et donc

$$x^n \sin\pi x \geq 0$$

or

$$x - 1 \leq 0 \ car \ x \in [0,1].$$

Ainsi

$$\begin{aligned} x^n(x-1)\sin\pi x \leq 0 &\implies \int_0^1 x^n(x-1)\sin\pi x dx \leq 0 \\ &\implies I_{n+1} - I_n \leq 0. \end{aligned}$$

D'où (I_n) est décroissante.

•**Déduisons que $(I_n)_n$ est convergente**

On a

$$x^n \sin \pi x \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

d'où

$$\int_0^1 x^n (x-1) \sin \pi x dx \geq 0 \Longrightarrow I_n \geq 0,$$

alors (I_n) est minorée par 0.

Conclusion :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (I_n) & \text{est décroissante} \\ & \quad et \\ (I_n) & \text{est minorée} \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow (I_n)\text{est convergente}$$

Chapitre 3

Équations différentielles du premier ordre

Plusieurs phénomènes surtout en chimie, physique, mécanique, éléctricité, biologie,..., sont modelisés par des équations différentielles.
Par exemple :

1. L'équation du déplacement $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t}x$, c'est une équation différentielle d'ordre 1.
2. En éléctricité, si on considère un circuit RLC, en fermant l'interrupteur au moment $t = 0$. Par les lois d'Ohm et Kurchloff, on trouve l'équation différentielle donnant la charge q à travers le circuit.
$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E.$$

Définition 3.1 *On appelle équation différentielle toute équation dans laquelle figurent une fonction inconnue (généralement notée $y(x)$ ou simplement y) d'une variable et certaines de ces dérivées, (dérivée première y', ou dérivées d'ordres supérieurs $y'', y^{(3)}, \ldots$).*

Définition 3.2 *On appelle ordre de l'équation différentielle, l'ordre de la dérivée le plus elevée figurant dans l'équation*
$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (E).$$

Exemple 3.1
1. *$xy' - y + 3 = 0$ est une équation différentielle du premier ordre.*
2. *$y'' - xy' + 2y = 0$ est une équation différentielle du second ordre.*

Définition 3.3 *On appelle solution (ou intégrale) de l'équation différentielle (E) tout couple (I, y) formé d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et d'une fonction y vérifiant les conditions suivantes*
1. *f est n-fois dérivable sur I.*
2. *$\forall x \in I : F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$.*

Exemple 3.2
1. *$y(x) = -\cos x + k/k \in \mathbb{R}$ est la solution de l'équation différentielle : $y' = \sin x$ sur $\mathbb{R}$.*
2. *$y(x) = x + e^x + k/k \in \mathbb{R}$ est la solution de l'équation différentielle : $y' = 1 + e^x$.*
3. *$y(x) = a.\cos x + b \sin x$ où $a, b \in \mathbb{R}$ est la solution de l'équation différentielle : $y'' + y = 0$.*

3.1 Équation différentielle du premier ordre

Définition 3.4 *On appelle équation différentielle du premier ordre toute relation de la forme*

$$F(x, y, y') = 0.$$

Remarque 3.1 *Il y'a plusieurs types d'équations différentielles d'ordre 1.*

(a) *Équations différentielles à variables séparables.*

(b) *Équations différentielles homogènes.*

(c) *Équations différentielles linéaires.*

(d) *Équations de Bernoulli.*

(e) *Équations différentielles totales.*

(f) *Équations de Riccati,....*

3.1.1 Type1 : Équations différentielles à variables séparables

Définition 3.5 *On appelle "équation différentielle à variables séparées" toute équation de la forme :*

$$f(y)y' = g(x) \tag{3.1}$$

où f et g sont deux fonctions numériques définies et continues respectivement sur I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Théorème 3.1 *Soient F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur J. Une fonction : $y : x \longrightarrow y(x)$, définie et dérivable sur un sous intervalle de J, est une solution de l'équation (3.1) si et seulement si :*

$$F(y) = G(x) + c$$

où c est une constante.

Preuve Pour que la fonction $H : x \to H(x) = F(y(x)) - G(x)$, soit constante sur l'intervalle de définition de la fonction g, il faut et il suffit que sa dérivée H' soit nulle sur cette intervalle. En effet,

$$H'(x) = F'(y(x))y'(x) - G'(x) = f(y)y' - g(x)$$

d'où le résultat.

Méthode de résolution : En remplaçant $y' = \dfrac{dy}{dx}$ dans (3.1), on trouve :

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

ainsi

$$f(y)dy = g(x)dx, \tag{3.2}$$

on intègre (3.2) terme à terme pour obtenir ainsi la solution générale de l'équation (3.1) sous la forme

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx.$$

Exemple 3.3 *Résoudre l'équation :* $x^2y' - y^2 = 0$ *sur le plan* $\mathbb{R}^2$ *privé des droites d'équation* $x = 0$ *et* $y = 0$,
cette équation est à variables séparées.

$$\begin{aligned} x^2y' - y^2 = 0 &\iff x^2y' = y^2 \\ &\iff x^2dy = y^2dx \\ &\iff \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2}. \end{aligned}$$

Ses solution sont $\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2}$ *ou encore* $\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + c$.
Soit $y = \frac{x}{1+cx}$ *où* c *est une constante.*

Exemple 3.4 *Résoudre l'équation :* $y' = y + 1 \qquad (*)$
$y \equiv -1$ *est une solution triviale de* $(*)$.
Supposons que $y \neq -1$.

$$\begin{aligned} y' = y + 1 &\iff \frac{dy}{dx} = y + 1 \\ &\iff \int \frac{dy}{y+1} = \int dx \\ &\iff \ln|y+1| = x + c, \ c \in \mathbb{R} \\ &\iff |y+1| = e^{x+c} \\ &\iff |y+1| = ke^x, \ k > 0 \\ &\iff y + 1 = \pm ke^x \\ &\iff y = \alpha e^x - 1, / \ \alpha = \pm k \text{ où } \alpha = 0. \end{aligned}$$

3.1.2 Type2 : Équations différentielles homogènes

Définition 3.6 *On appelle équation différentielle homogène toute équation de la forme :*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.3}$$

où f *est une fonction numérique définie et continue sur* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$.

Méthode de résolution : On fait un changement de variable $u = \frac{y}{x}$ donc $y = u.x$ alors $y' = u'x + u$.
En remplaçant dans l'équation (3.3), on obtient

$$u'x + u = f(u) \iff u'x = f(u) - u \qquad (**),$$

si $f(u) - u \neq 0$ dans I, alors l'équation $(**)$ sera équivalente à l'équation à variables séparées suivante :

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

et en intégrant :

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} \iff F(u) = \ln|x| + c, \ c \in \mathbb{R}$$

où $F(u)$ est une primitive de $\dfrac{1}{f(u)-u}$. Si F est inversible alors :

$$u = F^{-1}(\ln|x| + c)$$

et la solution générale de (3.3) est :

$$y = xu = xF^{-1}(\ln|x| + c)\,.$$

Si $f(u) = u$, l'équation (3.3) devient $y' = \dfrac{y}{x}$ qui est une équation à variables séparables dont la solution générale est $y = kx,\ k \in \mathbb{R}\ (x \neq 0)$.

Exemple 3.5 *Integrer l'équation* $x^2y' = xy - y^2 \qquad (***)$
Pour $x \neq 0$,

$$(***) \Longleftrightarrow y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

on pose $u = \dfrac{y}{x}$ *donc* $y = u.x$ *alors* $y' = u'x + u$,
en remplaçant dans $(***)$, *on obtient :*

$$\begin{aligned}
u'x + u = u - u^2 &\Longleftrightarrow u'x = -u^2\\
&\Longleftrightarrow \frac{du}{dx}x = -u^2\\
&\Longleftrightarrow -\int \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x} \quad si\ u \neq 0\\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{u} = \ln|x| + C\\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{u} = \ln|x| + \ln C'/C = \ln C', C' > 0\\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{u} = \ln(C'|x|)/C' > 0\\
&\Longleftrightarrow \frac{x}{y} = \ln(C'|x|)/C' > 0\\
&\Longleftrightarrow y = \frac{x}{\ln(C'|x|)}/C' > 0.
\end{aligned}$$

$u = 0$ *est aussi solution, d'où* $y = 0$ *est solution de* $(***)$.

3.1.3 Type3 : Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 3.7 *On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation de la forme :*

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{3.4}$$

où a *et* b *sont deux fonctions numériques définies et continues sur un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$.
Si $b = 0$, *l'équation (3.4) est dite linéaire homogène.*
L'équation : $y' = a(x)y$ *est appelée l'équation homogène associée à l'équation (3.4).*

1.2.3.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre homogène

Théorème 3.2 *Soient $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $A : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une primitive de a. Soit l'équation différentielle :*

$$y' = a(x)y. \qquad (H)$$

Les solutions sur I de (H) sont les fonctions y définies par :

$$y_H(x) = ke^{A(x)}$$

où k est une constante quelconque.

Preuve : Pour $y \neq 0$,

$$\begin{aligned} l'quation\ (H)\ devient\ \frac{y'}{y} = a(x) &\iff \ln|y(x)| = A(x) + b \\ &\iff |y(x)| = e^{A(x)} + b \\ &\iff y(x) = \pm e^b e^{A(x)} \\ &\iff y(x) = ke^{A(x)} \qquad avec \quad k = \pm e^b, \end{aligned}$$

$y = 0$ est aussi solution, elle correspond à $k = 0$.
Donc les solutions de l'équation homogène sont : $y_H(x) = ke^{A(x)}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exemple 3.6 *Comment résoudre l'équation différentielle $x^2y' = y$? On se place sur l'intervalle $I_+ =]0, +\infty[$ ou $I_- =]-\infty, 0[$. L'équation devient $y' = \frac{1}{x^2}y$. Donc $a(x) = \frac{1}{x^2}$, dont une primitive est $A(x) = -\frac{1}{x}$. Ainsi les solutions cherchées sont $y_H(x) = ke^{-\frac{1}{x}}$, où $k \in \mathbb{R}$.*

1.2.3.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre non homogène

Proposition 3.1 *Si y_p est une solution de (3.4), alors les solutions de (3.4) sont les fonctions $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :*

$$\begin{aligned} y(x) &= y_p(x) + y_H(x) \\ y(x) &= y_p(x) + ke^{A(x)} \qquad avec \quad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où $x \longmapsto A(x)$ est une primitive de $x \longmapsto a(x)$.

Preuve :
Soit y_p une solution pqrticulière de (3.4) et y une solution générale de (3.4), alors $y - y_p$ est une solution de l'équation homogène (H), en effet,
y_p vérifie (3.4) donc $y_p'(x) = a(x)y_p(x) + b(x)$
y est la solution générale de (3.4) donc $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$
en faisant la différence membre à membre on obtient :

$$y'(x) - y_p'(x) = a(x)\left(y(x) - y_p(x)\right)$$

d'où $y(x) - y_p(x)$ est une solution de (H), si on pose

$$y(x) - y_p(x) = y_H(x) \Longrightarrow y(x) = y_p(x) + y_H(x).$$

Exemple 3.7 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y' \cos x + y \sin x = 1 \tag{3.5}$$

L'équation homogène associée est :

$$y' \cos x + y \sin x = 0 \qquad (H)$$

$$\begin{aligned}
(H) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = -\frac{\sin x}{\cos x} \\
&\Longleftrightarrow \quad y_H(x) = ke^{\int -\frac{\sin x}{\cos x} dx} \\
&\Longleftrightarrow \quad y_H(x) = ke^{\ln|\cos x|} \\
&\Longleftrightarrow \quad y_H(x) = c\cos x / \ c = \pm k.
\end{aligned}$$

On remarque que $y_p(x) = \sin x$ est une solution particulière de (3.5) donc

$$y(x) = y_p(x) + y_H(x),$$

alors

$$y(x) = \sin x + c\cos x / \ c \in \mathbb{R}.$$

Remarque 3.2 *Si la solution particulière n'est pas évidente, on utilise la méthode de variation de la constante.*

Recherche d'une solution particulière : méthode de variation de la constante.
La solution générale de (H) est $y(x) = ke^{A(x)}$, $k \in \mathbb{R}$. La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = k(x)e^{A(x)}$, où k est maintenant une fonction à déterminer pour que y_p soit une solution de (3.4) $y' = a(x)y + b(x)$. Puisque $A' = a$, on a :

$$y_p'(x) = a(x)k(x)e^{A(x)} + k'(x)e^{A(x)} = a(x)y_p(x) + k'(x)e^{A(x)}.$$

Ainsi :

$$y_p'(x) - a(x)y_p(x) = k'(x)e^{A(x)}.$$

Donc y_p est une solution de (3.4) si et seulement si

$$k'(x)e^{A(x)} = b(x) \Longleftrightarrow k'(x) = b(x)e^{-A(x)} \Longleftrightarrow k(x) = \int b(x)e^{-A(x)}dx.$$

Ce qui donne une solution particulière $y_p(x) = \left(\int b(x)e^{-A(x)}dx\right) e^{A(x)}$ de (3.4) sur I.
La solution générale de (3.4) est donnée par

$$y(x) = y_p(x) + ke^{A(x)}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.8 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y' - y = e^x \qquad (E).$$

L'équation homogène est $y' - y = 0$ dont les solutions sont les

$$y_H(x) = ke^x, k \in \mathbb{R}.$$

Cherchons la solution particulière y_p de (E) par la méthode de la variation de la constante donc $y_p(x) = k(x)e^x$ avec $k(x)$ est une fonction à déterminer

$$y_p' = k'(x)e^x + k(x)e^x$$

en remplaçant dans (E), on obtient

$$\begin{aligned} k'(x)e^x + k(x)e^x - k(x)e^x = e^x &\iff k'(x)e^x = e^x \\ &\iff k'(x) = 1 \\ &\iff k(x) = x + c. \end{aligned}$$

On fixe $c = 0$ (n'importe quelle valeur convient) : donc

$$y_p(x) = xe^x,$$

alors la solution générale de (E) est :

$$y(x) = y_p(x) + y_H(x) = xe^x + ke^x = e^x(x + k), \ k \in \mathbb{R}.$$

3.1.4 Type4 : Équations de Jacob Bernoulli

Définition 3.8 *On appelle équation différentielle de Bernoulli toute équation de la forme :*

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \tag{3.6}$$

où $n \in \mathbb{R}$, a et b sont des fonctions continues de la variable x avec $n \neq 0$ et $n \neq 1$.

Remarque 3.3

- *Si $n = 0$, l'équation (3.6) devient une équation linéaire avec second membre :*

$$y' + a(x)y = b(x).$$

- *Si $n = 1$, l'équation (3.6) devient une équation linéaire sans second membre :*

$$y' + a(x)y = 0.$$

Méthode de résolution :
Elle se ramène à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 par les transformations suivantes :

- Divisons tous les termes d'équation par $y^n (y \neq 0)$, on obtient

$$\frac{y'}{y^n} + a(x)\frac{y}{y^n} = \frac{b(x)}{y^n}.$$

- Faisons le changement de variable suivant $z(x) = y^{1-n}(x) \Longrightarrow z'(x) = (1 - n)y'y^{-n}(x)$.

- Substituons ces transformations dans l'équation (3.6), il vient

$$z'(x) + (1-n)a(x)z(x) = (1-n)b(x).$$

Donc l'équation de Bernoulli devient une équation différentielle linéaire.
$y = 0$ est toujours solution de (3.6).

Exemple 3.9 *Résoudre l'équation :*

$$y' + \frac{y}{x} = -xy^2. \tag{3.7}$$

C'est une équation de Bernoulli avec $n = 2$, divisons tous les termes par $y^2 (y \neq 0)$, on obtient

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = -x, \tag{3.8}$$

on fait un changement de variable, on pose

$$z = \frac{1}{y} \Longrightarrow z' = -\frac{y'}{y^2} \Longrightarrow y' = -\frac{z'}{z^2},$$

en remplaçant dans l'équation (3.8), on aurra

$$-z' + \frac{z}{x} = -x \Longleftrightarrow z' - \frac{z}{x} = x \tag{3.9}$$

on obtient une équation linéaire, son équation homogène associée est :

$$z' - \frac{z}{x} = 0 \qquad\qquad (H)$$

$$z_H(x) = ke^{\int \frac{dx}{x}} = ke^{\ln|x|} = cx \quad \text{avec } c = \pm k.$$

Cherchons la solution particulière $z_p(x)$ de l'équation (3.9) par la méthode de la variation de la constante

$$z_p(x) = c(x)x \Longrightarrow z_p'(x) = c'(x)x + c(x),$$

en remplaçant dans l'équation (3.9), on obtient

$$c'(x)x + c(x) - c(x) = x \Longleftrightarrow c'(x) = 1 \Longleftrightarrow c(x) = x + \alpha.$$

On fixe $(\alpha = 0)$,
donc $z_p(x) = x^2$, alors la solution générale de l'équation (3.9) est :

$$z(x) = z_p(x) + z_H(x) = x^2 + cx, \ c \in \mathbb{R}.$$

Puis que $y(x) = \dfrac{1}{z(x)} \Longrightarrow \begin{cases} y(x) = \dfrac{1}{x^2 + cx}, \\ \text{ou } y = 0, \end{cases}$
qui est la solution générale de l'équation (3.7).

Exemple 3.10 *Résoudre l'équation :* $y' = xy(x^2y^2 - 1)$

$$y' = xy(x^2y^2 - 1) \Longleftrightarrow y' + xy = x^3y^3, \tag{3.10}$$

c'est une équation de Bernoulli avec $n = 3$. *Divisons tous les termes par* $y^3(y \neq 0)$, *on obtient*

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{x}{y^2} = x^3, \tag{3.11}$$

posons

$$z = \frac{1}{y^2} \Longrightarrow z' = -\frac{2yy'}{y^4} = -\frac{y'}{y^3}.$$

En remplaçant dans l'équation (3.11), on obtient

$$-\frac{z'}{2} + xz = x^3 \Longleftrightarrow z' - 2xz = -2x^3 \tag{3.12}$$

on obtient une équation différentielle linéaire, son équation homogène associée est :

$$z' - 2xz = 0 \qquad\qquad (H)$$

$$z_H(x) = ke^{\int 2xdx} = ke^{x^2}, \ k \in \mathbb{R}.$$

Utilisant la méthode de la variation de la constante pour trouver la solution particulière $z_p(x)$ *de l'équation (3.12)*

$$z_p(x) = k(x)e^{x^2} \Longrightarrow z_p'(x) = k'(x)e^{x^2} + 2xe^{x^2}k(x),$$

en remplaçant dans l'équation (3.12), on obtient

$$k'(x)e^{x^2} + 2xe^{x^2}k(x) - 2xe^{x^2}k(x) = -2x^3 \Longleftrightarrow k'(x)e^{x^2} = -2x^3 \Longleftrightarrow k'(x) = -2x^3e^{-x^2}.$$

Alors

$$k(x) = -2\int x^3e^{-x^2}.$$

En intègre par parties, on pose

$$f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2$$

et

$$g'(x) = e^{-x^2} \Longrightarrow g(x) = -\frac{1}{2x}e^{-x^2}$$

donc

$$\begin{aligned} k(x) &= x^2e^{-x^2} + \frac{3}{2}\int -2xe^{-x^2} \\ &= x^2e^{-x^2} + \frac{3}{2}e^{-x^2} + c \\ &= e^{-x^2}\left[x^2 + \frac{3}{2}\right] + c, \end{aligned}$$

on fixe $(c = 0)$,
donc

$$z_p(x) = e^{-x^2}(x^2 + \frac{3}{2})e^{x^2} = x^2 + \frac{3}{2}.$$

Alors la solution générale de l'équation (3.12) est :

$$z(x) = z_p(x) + z_H(x) = x^2 + \frac{3}{2} + ke^{x^2}, \; k \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de l'équation (3.10) est donc

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{z(x)}} = \pm\sqrt{\frac{1}{x^2 + \frac{3}{2} + ke^{x^2}}}, \; k \in \mathbb{R},$$

$$ou \; y = 0.$$

3.1.5 Type5 : Équations aux différentielles totales

Définition 3.9 *L'équation différentielle*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3.13}$$

est appelée équation aux différentielles totales si $M(x,y)$ et $N(x,y)$ sont des fonctions continues et dérivables telles que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Les dérivées partielles $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ sont continues dans un certain domaine.

Théorème 3.3 *Si (3.13) est une équation aux différentielles totales, alors il existe une fonction de deux variables $u(.,.)$ telle que $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = N$.*
De plus la solution de (3.13) est donnée sous la forme implicite

$$u(x,y) = c \quad où \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.11 *Résoudre l'équation suivante :*

$$(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0. \tag{3.14}$$

En posant $M(x,y) = x^3 + xy^2$ et $N(x,y) = x^2y + y^3$ on obtient

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy \; et \; \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Donc l'équation est une équation aux différentielles totales. Alors il existe une fonction $u(x,y)$ telle que $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = N$.

$$\begin{aligned} M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad &\Longleftrightarrow \quad u(x,y) = \int M(x,y)dx \\ &\Longleftrightarrow \quad u(x,y) = \int (x^3 + xy^2)dx + \varphi(y) \\ &\Longleftrightarrow \quad u(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \varphi(y). \end{aligned}$$

En dérivant $u(x,y)$ par rapport à y

$$\begin{aligned} N(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y} &\iff x^2y+y^3=\frac{\partial u}{\partial y}\\ &\iff x^2y+y^3=x^2y+\varphi'(y)\\ &\iff \varphi'(y)=y^3\\ &\iff \varphi(y)=\frac{y^4}{4}+c, \qquad c\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

et par conséquent on obtient

$$u(x,y)=\frac{1}{4}(x^4+y^4)+\frac{1}{2}x^2y^2+c, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

et par suite la solution générale de l'équation (3.14) est donnée sous la forme implicite

$$\begin{aligned} x^4+y^4+2x^2y^2 &= c, \quad c\geq 0\\ \left(x^2+y^2\right)^2 &= c\\ x^2+y^2 &= \sqrt{c}\\ x^2+y^2 &= r^2, \quad r\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ce sont des cercles.

Définition 3.10 *(Facteur intégrant)*
Supposons que le premier membre de l'équation

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{3.15}$$

ne soit pas une différentielle totale.
Si on multiplie (3.15) par une certaine fonction $\varphi(x,y)$ telle que

$$\varphi M(x,y)dx+\varphi N(x,y)dy=0 \tag{3.16}$$

devienne une équation aux différentielles totales, on dit que φ est un facteur intégrant.

Remarque 3.4 *Une équation $Mdx+Ndy=0$ (non totale) peut admettre une infinité de facteurs intégrants.*

Détermination d'un facteur intégrant
Pour que l'équation (3.16) soit une équation aux différentielles totales il est nécessaire et suffisant que l'on ait :

$$\frac{\partial(\varphi M)}{\partial y}=\frac{\partial(\varphi N)}{\partial x} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} (3.17) &\iff M\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\varphi\frac{\partial M}{\partial y}=N\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi\frac{\partial N}{\partial x}\\ &\iff M\frac{\partial\varphi}{\partial y}-N\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\varphi\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\\ &\iff \frac{M\frac{\partial\varphi}{\partial y}-N\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\varphi}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad M\frac{\partial \ln\varphi}{\partial y} - N\frac{\partial \ln\varphi}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \tag{3.18}$$

(3.18) est une équation aux dérivées partielles de fonction inconnue φ dépendant de deux variables x et y. La résolution de cette équation dans le cas général n'est pas toujours facile, mais il y a des cas particuliers où l'on arrive à déterminer φ.

1. **φ dépendant seulement de y :**
   On a

$$\begin{aligned} (3.18) \quad &\Longleftrightarrow \quad M\frac{d\ln\varphi}{dy} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{d\ln\varphi}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \end{aligned}$$

   d'où l'on détermine $\ln\varphi$ donc φ.

   Remarque 3.5 *Il est évident que l'on ne peut procéder ainsi que si l'expression* $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ *ne dépend pas de x.*

2. **φ dépendant seulement de x :**
   D'une manière analogue à celle du cas précédent si l'expression $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N}$ ne dépend pas de y.
   Alors

$$\begin{aligned} N\frac{d\ln\varphi}{dx} &= -\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} \\ \frac{d\ln\varphi}{dx} &= \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \end{aligned}$$

   d'où on peut déterminer $\ln\varphi$ et par la suite on détermine φ.

Exemple 3.12 *Résoudre l'équation suivante en déterminant un facteur intégrant*

$$(x + y^2)dx - 2xydy = 0. \tag{3.19}$$

Soit $M(x,y) = x + y^2$, et $N(x,y) = -2xy$,
on a $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -2y$. Comme $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ alors l'équation (3.19) n'est pas exacte.
Cherchons maintenant un facteur intégrant en calculant

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{4y}{-2xy} = -\frac{2}{x}.$$

Alors, on peut chercher un facteur intégrant qui dépend seulement de x. Donc

$$\frac{d\ln\varphi}{dx} = -\frac{2}{x} \Longrightarrow \ln\varphi(x) = -2\ln|x| \Longrightarrow \varphi(x) = \frac{1}{x^2}.$$

L'équation

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx - \frac{2xy}{x^2}dy = 0$$

est une équation aux différentielles totales son intégrale générale est

$$x = ce^{\frac{y^2}{x}}, \quad c = Const.$$

3.1.6 Type6 : Équations différentielles de Riccati

Définition 3.11 *On appelle équation différentielle de Riccati toute équation de la forme :*

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x), \tag{3.20}$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Méthode de résolution :
Il faut connaître une solution particulière y_p de l'équation de Riccati. On pose

$$U = y - y_p \Longleftrightarrow y = U + y_p \Longrightarrow y' = U' + y_p'$$

Comme y est une solution de l'équation (3.20), on a

$$\begin{aligned} & U' + y_p' + a(x)\left(U + y_p\right) + b(x)\left(U^2 + y_p^2 + 2Uy_p\right) = c(x) \\ \Longrightarrow\ & U' + y_p' + a(x)U + a(x)y_p + b(x)U^2 + b(x)y_p^2 + 2b(x)Uy_p = c(x) \\ \Longrightarrow\ & U' + a(x)U + b(x)U^2 + y_p' + a(x)y_p + b(x)y_p^2 + 2b(x)Uy_p = c(x) \\ \Longrightarrow\ & U' + a(x)U + b(x)U^2 + 2b(x)Uy_p + c(x) = c(x), \end{aligned}$$

du fait que y_p est une solution particulière de (3.20) c'est à dire

$$y_p' + a(x)y_p + b(x)y_p^2 = c(x),$$

donc on obtient
$U' + a(x)U + b(x)U^2 + 2b(x)Uy_p = 0$
$\Longrightarrow U' + U\left(a(x) + 2b(x)y_p\right) + b(x)U^2 = 0$, qui est une équation de type Bernoulli avec $n = 2$.

Exemple 3.13 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1 \tag{3.21}$$

sachant que $y_p = x$ est solution.
(3.21) $\Longleftrightarrow y' + 2xy - y^2 = x^2 + 1$ *c'est une équation de Riccati,*
on pose $U = y - y_p$ avec $y_p = x$ est une solution particulière de (3.21) car $1 + 2x^2 - x^2 = x^2 + 1$,
donc $U = y - x \Longrightarrow y = U + x \Longrightarrow y' = U' + 1$, en remplaçant dans (3.21), on obtient

$$\begin{aligned} & U' + 1 + 2x(U + x) - (U + x)^2 = x^2 + 1 \\ \Longrightarrow\ & U' + 1 + 2xU + 2x^2 - U^2 - x^2 - 2Ux = x^2 + 1 \\ \Longrightarrow\ & U' = U^2 \qquad\qquad (*) \\ \Longrightarrow\ & \frac{dU}{dx} = U^2 \\ \Longrightarrow\ & \frac{dU}{U^2} = dx \\ \Longrightarrow\ & \int \frac{dU}{U^2} = \int dx \\ \Longrightarrow\ & -\frac{1}{U} = x + c \quad / \ c \in \mathbb{R} \\ \Longrightarrow\ & U = -\frac{1}{x + c} \quad / \ c \in \mathbb{R} \\ & U = 0 \text{ est aussi solution de } (*) \end{aligned}$$

et comme $y = U + x$*, alors la solution générale de (3.21) est :*

$$y(x) = -\frac{1}{x+c} + x \quad / \ c \in \mathbb{R}$$
$$\text{ou } y = x.$$

3.2 Exercices

Exercice 3.1 *(Équations à variables séparées)*
Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $xy' = y$ *(2)* $(x^2+1)y' = 2xy$

(3) $xyy' = y^2 + 1$ *(4)* $y' = y\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

Solution :
(1) $xy' = y$

- $y \equiv 0$ est une solution triviale de **(1)**.
- Supposons que $y \neq 0$

$$\begin{aligned}
\textbf{(1)} \iff & y' = \frac{y}{x} \\
\iff & \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\
\iff & \ln|y| = \ln|x| + c, c \in \mathbb{R} \\
\iff & |y| = e^{\ln|x|+c} \\
\iff & y = kx \text{ avec } k = \pm e^c.
\end{aligned}$$

(2) $(x^2+1)y' = 2xy$

- $y \equiv 0$ est une solution triviale de **(2)**.
- Supposons que $y \neq 0$

$$\begin{aligned}
\textbf{(2)} \iff & y' = \frac{2xy}{x^2+1} \\
\iff & \int \frac{y'}{y} = \int \frac{2x}{x^2+1} \\
\iff & \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2xdx}{x^2+1} \\
\iff & \ln|y| = \ln(x^2+1) + c, c \in \mathbb{R} \\
\iff & |y| = e^{\ln(x^2+1)+c} \\
\iff & y = k(x^2+1) \text{ avec } k = \pm e^c \text{ ou } k = 0.
\end{aligned}$$

(3) $xyy' = y^2 + 1$

$$\begin{aligned}
\textbf{(3)} \iff & \frac{yy'}{y^2+1} = \frac{1}{x} \\
\iff & \frac{ydy}{y^2+1} = \frac{dx}{x} \\
\iff & \frac{1}{2}\int \frac{2ydy}{y^2+1} = \int \frac{dx}{x} \\
\iff & \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \ln|x| + c, c \in \mathbb{R} \\
\iff & \ln(y^2+1) = 2\ln|x| + 2c \\
\iff & \ln(y^2+1) = \ln|x^2| + c', c' = 2c \\
\iff & y^2 + 1 = e^{\ln(x^2)+c'} \\
\iff & y^2 + 1 = kx^2 \ /k = e^{c'} \\
\iff & y^2 = kx^2 - 1, k \in \mathbb{R} \\
\iff & y = \pm\sqrt{kx^2-1}, k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(4) $y' = y\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

- $y \equiv 0$ est une solution triviale de **(4)**.
- Supposons que $y \neq 0$

$$\begin{aligned}
\textbf{(4)} \iff & \frac{y'}{y} = 1 - \frac{1}{x^2} \\
\iff & \int \frac{dy}{y} = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx \\
\iff & \ln|y| = x + \frac{1}{x} + c \text{ où } c \in \mathbb{R} \\
\iff & |y| = e^{x+\frac{1}{x}+c}, c \in \mathbb{R} \\
\iff & y = ke^{x+\frac{1}{x}} \ \textit{avec}\ k = \pm e^c.
\end{aligned}$$

Exercice 3.2 *(Équations à variables séparées)*
Intégrer

- **(1)** $y' = y\cos x$
- **(2)** $2yy'(1+e^x) = e^x$
- *(3)* $y'\sin x = y\ln y$.

Solution :
(1) $y' = y\cos x$

- $y \equiv 0$ est une solution triviale de **(1)**.

- Supposons que $y \neq 0$

$$\begin{aligned}
\textbf{(1)} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \cos x \\
&\Longleftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \cos x dx \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln|y| = \sin x + c, c \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad |y| = e^{\sin x + c} \\
&\Longleftrightarrow \quad y = ke^{\sin x} \text{ où } k = \pm e^c \ ou \ k = 0.
\end{aligned}$$

(2) $2yy'(1+e^x) = e^x$

$$\begin{aligned}
\textbf{(2)} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2yy' = \frac{e^x}{1+e^x} \\
&\Longleftrightarrow \quad \int 2ydy = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx \\
&\Longleftrightarrow \quad y^2 = \ln(1+e^x) + c \\
&\Longleftrightarrow \quad y^2 = \ln(1+e^x) + \ln k / \ c = \ln k, k > 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad y^2 = \ln k(1+e^x), k > 0.
\end{aligned}$$

(3) $y' \sin x = y \ln y$

- $y \equiv 1$ est une solution triviale de **(3)**.
- $y \equiv 0$ est aussi solution.
- Supposons que $y \neq 1$ et $y \neq 0, y > 0$ sur $\mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{aligned}
\textbf{(3)} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{y'}{y \ln y} = \frac{1}{\sin x} \\
&\Longleftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dx}{\sin x} \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln|\ln y| = \ln|\tan(\frac{x}{2})| + c, c \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln y = k \tan(\frac{x}{2}) \text{ où } k = \pm e^c \\
&\Longleftrightarrow \quad y = e^{k \tan(\frac{x}{2})} \text{ où } k \in \mathbb{R} \ ou \ y \equiv 0 \\
& \qquad\quad (k = 0 \ correspond \ \ la \ solution \ y \equiv 1).
\end{aligned}$$

Exercice 3.3 *(Equations différentielles homogènes)*
Résoudre les équations suivantes :

(1) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

(2) $2x^2y' = x^2 + y^2$

(3) $xyy' = y^2 - x\sqrt{x^2 - y^2}$

Solution :
(1) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$

Posons $z = \dfrac{y}{x} \Longleftrightarrow y = zx \Longrightarrow y' = z'x + z$

$$\begin{aligned}
\textbf{(1)} &\Longleftrightarrow z'x + z = e^z + z \\
&\Longleftrightarrow z'x = e^z \\
&\Longleftrightarrow \frac{dz}{e^z} = \frac{dx}{x} \\
&\Longleftrightarrow \int e^{-z}dz = \int \frac{dx}{x} \\
&\Longleftrightarrow -e^{-z} = \ln|x| + c, c \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow e^{-z} = -\ln|x| + k /\ k = -c \\
&\Longleftrightarrow e^{-z} = \frac{1}{\ln|x|} + \ln k' /\ k = \ln k'\ et\ k' > 0 \\
&\Longleftrightarrow e^{-z} = \ln\left(\frac{k'}{|x|}\right) \\
&\Longleftrightarrow z = -\ln\left(\ln\left(\frac{k'}{|x|}\right)\right)\ k' > 0.
\end{aligned}$$

et puisque $y = zx \Longrightarrow y = -x\ln\left(\ln\left(\frac{k'}{|x|}\right)\right)$.

(2) $2x^2y' = x^2 + y^2 \Longrightarrow 2y' = 1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2, x \neq 0.$

Soit $z = \dfrac{y}{x} \Longleftrightarrow y = zx \Longrightarrow y' = z'x + z$, en remplaçant dans l'équation (2) on obtient :

$$\begin{aligned}
\textbf{(2)} &\Longleftrightarrow 2(z'x + z) = 1 + z^2 \\
&\Longleftrightarrow 2z'x = (1 - z)^2 \\
&\Longleftrightarrow \frac{2z'}{(1-z)^2} = \frac{1}{x} \quad si\ z \neq 1 \\
&\Longleftrightarrow \int \frac{2dz}{(1-z)^2} = \int \frac{dx}{x} \\
&\Longleftrightarrow \frac{2}{1-z} = \ln|x| + c, c \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \frac{2}{1-z} = \ln k|x| /\ c = \ln k, k > 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{2}{\ln k|x|} = 1 - z \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} z = 1 - \frac{2}{\ln k|x|} \\ z = 1 \text{ est aussi solution} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} y = x - \frac{2x}{\ln k|x|} \\ y = x \text{ est aussi solution de } \textbf{(2)}. \end{cases}
\end{aligned}$$

(3) $xyy' = y^2 - x\sqrt{x^2 - y^2}$ où $|y| \leq |x| \Longrightarrow y' = \dfrac{x}{y}\left[\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - \dfrac{|x|}{x}\sqrt{1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\right]$,

on a alors deux cas :

$$f_1(x, y) = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\frac{y}{x}}, D_{f_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y \neq 0\ et\ \left|\frac{y}{x}\right| \leq 1$$

$$f_2(x,y) = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\frac{y}{x}}, D_{f_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0, y \neq 0 \ et \ \left|\frac{y}{x}\right| \leq 1$$

1^{er} ***cas :***
$y' = f_1(x,y)$ et

$$\begin{aligned} z = \frac{y}{x} &\iff z + xz' = z - \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \\ &\iff \frac{-zz'}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{x} \\ &\iff \frac{-zdz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{dx}{x} \\ &\iff \sqrt{1-z^2} = \ln kx \text{ où } k > 0 \end{aligned}$$

donc

$$\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \ln kx \iff \sqrt{x^2-y^2} = |x| \ln kx.$$

$2^{\text{ème}}$ ***cas :***
$y' = f_2(x,y)$ et

$$\begin{aligned} z = \frac{y}{x} &\iff z + xz' = z + \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \\ &\iff \frac{zz'}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{x} \\ &\iff \frac{zdz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{dx}{x} \\ &\iff -\sqrt{1-z^2} = \ln Ax \text{ où } A < 0 \\ &\iff \sqrt{1-z^2} = -\ln Ax \\ &\iff \sqrt{1-z^2} = \ln \frac{1}{Ax} \end{aligned}$$

donc

$$\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \ln \frac{k}{x} \ avec \ k = \frac{1}{A} < 0 \iff \sqrt{x^2-y^2} = |x| \ln \frac{k}{x}.$$

Exercice 3.4 *(Equations différentielles linéaires du 1^{er} ordre)*
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ *sur* $]0, +\infty[$.
2. $y' - y = x^k \exp(x)$ *sur* $\mathbb{R}$, *avec* $k \in \mathbb{N}$.
3. $x(1 + \ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ *sur* $]0, +\infty[$.

Solution :
1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0, +\infty[$.

(a) **Résolution de l'équation homogène :** $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 0$.

Une primitive de $a(x) = 2x - \dfrac{1}{x}$ est $A(x) = x^2 - \ln x$, donc les solutions de l'équation homogène sont les $y(x) = \lambda \exp(x^2 - \ln x) = \lambda \dfrac{1}{x} \exp(x^2)$, pour λ une constante réelle quelconque.

(b) **Recherche d'une solution particulière.**

Nous allons utiliser la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière à l'équation $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$. $y_p(x) = \lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2)$ où $\lambda(x)$ est maintenant une fonction.

On calcule d'abord

$$y_p'(x) = \lambda'(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) + \lambda(x)\left(-\frac{1}{x^2} + 2\right)\exp(x^2)$$

Maintenant :

$$\begin{aligned}
& y_p \quad \textit{est solution de } y' - \left(2x - \frac{1}{x}\right) y = 1 \\
\iff & y_p' - \left(2x - \frac{1}{x}\right) y_p = 1 \\
\iff & \lambda'(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) + \lambda(x)\left(-\frac{1}{x^2} + 2\right)\exp(x^2) - \left(2x - \frac{1}{x}\right)\lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = 1 \\
\iff & \lambda'(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = 1 \qquad \text{cela doit se simplifier !} \\
\iff & \lambda'(x) = x\exp(-x^2)
\end{aligned}$$

Ainsi on peut prendre $\lambda(x) = -\frac{1}{2}\exp(x^2)$, ce qui fournit la solution particulière :

$$y_p(x) = \lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = -\frac{1}{2}\exp(-x^2)\frac{1}{x}\exp(x^2) = -\frac{1}{2x}.$$

Pour se rassurer, on n'oublie pas de vérifier que c'est bien une solution !

(c) **Solution générale :**

L'ensemble des solutions s'obtient par la somme de la solution particulière avec les solutions de l'équation homogène. Autrement dit, les solutions sont les :

$$y(x) = -\frac{1}{2x} + \lambda\frac{1}{x}\exp(x^2) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

2. $y' - y = x^k \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$.

(a) **Résolution de l'équation homogène** $y' - y = 0$.

Les solutions de l'équation homogène sont les $y(x) = \lambda \exp(x), \lambda \in \mathbb{R}$.

(b) **Recherche d'une solution particulière.**

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \lambda(x)\exp(x)$ où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction. Comme $y_p'(x) = \lambda'(x)\exp(x) + \lambda(x)\exp(x)$ alors

$$\begin{aligned}
& y_p \quad \textit{est solution de } y' - y = x^k\exp(x) \\
\iff & \lambda'(x)\exp(x) + \lambda(x)\exp(x) - l(x)\exp(x) = x^k\exp(x) \\
\iff & \lambda'(x)\exp(x) = x^k\exp(x) \\
\iff & \lambda'(x) = x^k.
\end{aligned}$$

On fixe $\lambda(x) = \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$, ce qui conduit à la solution particulière :

$$y_p(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x).$$

(c) Solution générale.
L'ensemble des solutions est formé des

$$y(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x) + \lambda\exp(x) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

3. $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0,+\infty[$.
Le coefficient de y_p ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$, l'équation peut donc se mettre sous la forme

$$y' + \frac{2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))}y = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))}.$$

(a) Les solutions de l'équation homogène associée sont les $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, où A est une primitive de $a(x) = -\dfrac{2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut donc choisir $A(x) = -\ln(u(x))$ avec $u(x) = 1+\ln^2(x)$. Les solutions de l'équation sont les

$$y(x) = \lambda e^{-\ln(1+\ln^2(x))} = \frac{l}{1+\ln^2(x)}.$$

(b) Utilisons la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre. On cherche $y_p(x) = \dfrac{\lambda(x)}{1+\ln^2(x)}$, avec λ une fonction dérivable. Or $z(x) = \dfrac{1}{1+\ln^2(x)}$ est solution de l'équation homogène et $y_p(x) = \lambda(x)z(x)$:

$$\begin{aligned}
& y_p \quad \text{est solution} \\
\iff & y_p' + \frac{2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))}y_p = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff & \lambda'(x)z(x) + \lambda(x)\left[z'(x) + \frac{2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))}z(x)\right] = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff & \frac{\lambda'(x)}{1+\ln^2(x)} = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff & \lambda'(x) = \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

On peut donc choisir $\lambda(x) = \ln x$, ce qui donne la solution particulière $y_0(x) = \dfrac{\lambda(x)}{1+\ln^2(x)}$.

(c) Les solutions sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène : ce sont les

$$y(x) = \frac{\ln x + \lambda}{1+\ln^2(x)} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Remarque 3.6 *Le choix d'une primitive de λ' se fait à constante additive près. Si on avait choisi par exemple $\lambda(x) = \ln x + 1$, la solution particulière aurait été différente, mais les solutions de l'équation avec second membre auraient été les*

$$y(x) = \frac{\ln x + 1 + \lambda}{1 + \ln^2(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Quitte à poser $\lambda'_0 = 1 + \lambda$, ce sont évidemment les mêmes que celles trouvées précédemment !

Exercice 3.5 *(Equations de Bernoulli)*
Résoudre les équations suivantes :

1. $xy' - y = y^2 \ln x$.
2. $y' = xy(1 - y^2)$.
3. $y' = 4\dfrac{y}{x} + x\sqrt{y}$.

Solution :

1. $xy' - y = y^2 \ln x \qquad (E)$
   c'est une équation de Bernoulli avec $n = 2$, divisons tous les termes par y^2, on obtient
   $$\frac{xy'}{y^2} - \frac{1}{y} = \ln x, \tag{3.22}$$
   on fait un changement de variable, on pose $z = \dfrac{1}{y} \Longrightarrow z' = \dfrac{-y'}{y^2}$, en remplaçant dans l'équation (3.22), on aurra :
   $$-xz' - z = \ln x \Longleftrightarrow xz' + z = -\ln x \tag{3.23}$$
   on obtient une équation linéaire, son équation homogène associée est
   $$z' + \frac{z}{x} = 0 \qquad (H).$$
   La solution de l'équation homogène est donnée par
   $$z_H(x) = ke^{-\int \frac{dx}{x}} = ke^{-\ln|x|} = \frac{k}{|x|} = \frac{c}{x} / \ c = \pm k.$$
   Cherchons la solution particulière $z_p(x)$ de l'équation (3.23) par la méthode de variation de la constante.
   $$z_p(x) = \frac{c(x)}{x} \Longrightarrow z'_p(x) = \frac{c'(x)x - c(x)}{x^2},$$
   en remplaçant dans (3.23), on obtient :
   $$\begin{aligned} x\frac{c'(x)x - c(x)}{x^2} + \frac{c(x)}{x} = -\ln x \quad &\Longleftrightarrow \quad c'(x) = -\ln x \\ &\Longleftrightarrow \quad c(x) = -\int \ln x dx = x - x\ln x + k / \ k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
   On fixe $(k = 0)$, donc $z_p(x) = 1 - \ln x$, alors la solution générale de (3.23) est :
   $$z(x) = z_p(x) + z_H(x) = 1 - \ln x + \frac{c}{x} / \ c \in \mathbb{R}.$$
   Puisque $y(x) = \dfrac{1}{z(x)} \Longrightarrow y(x) = \dfrac{x}{x - x\ln x + c}$, qui est la solution générale de (E).

2. $y' = xy(1-y^2) \Longrightarrow y' - xy = -xy^3 \qquad (E)$
   c'est une équation de Bernoulli avec $n = 3$, divisons tous les termes par $y^3 (y \neq 0)$, on obtient
$$\frac{y'}{y^3} - \frac{x}{y^2} = -x, \tag{3.24}$$
   on fait un changement de variable, on pose $z = \dfrac{1}{y^2} \Longrightarrow z' = \dfrac{-2y'}{y^3}$, en remplaçant dans l'équation (3.24), on aurra :
$$-\frac{z'}{2} - xz = -x \Longleftrightarrow z' + 2xz = 2x, \tag{3.25}$$
   on obtient une équation linéaire, son équation homogène associée est
$$z' + 2xz = 0 \qquad (H).$$
   La solution de l'équation homogène est donnée par
$$z_H(x) = ke^{-\int 2x dx} = ke^{-x^2} / \ k \in \mathbb{R}.$$
   Cherchons la solution particulière $z_p(x)$ de l'équation (3.25) par la méthode de variation de la constante.
$$z_p(x) = k(x)e^{-x^2} \Longrightarrow z_p'(x) = k'(x)e^{-x^2} - 2xk(x)e^{-x^2},$$
   en remplaçant dans (3.25), on obtient :
$$\begin{aligned} k'(x)e^{-x^2} - 2xk(x)e^{-x^2} + 2xk(x)e^{-x^2} = 2x \quad &\Longleftrightarrow \quad k'(x) = 2xe^{x^2} \\ &\Longleftrightarrow \quad k(x) = \int 2xe^{x^2} dx \\ &\Longleftrightarrow \quad k(x) = e^{x^2} + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
   On fixe $(\alpha = 0)$, donc $z_p(x) = e^{x^2} \times e^{-x^2} = 1$, alors la solution générale de (3.25) est :
$$z(x) = z_p(x) + z_H(x) = 1 + ke^{-x^2} / \ k \in \mathbb{R}.$$
   Puisque
$$y(x) = \frac{1}{z(x)} \Longrightarrow y(x) = (1 + ke^{-x^2})^{-1} / \ k \in \mathbb{R}.$$
3. $y' = 4\dfrac{y}{x} + x\sqrt{y} \qquad (E)$
   c'est une équation de Bernoulli avec $n = \dfrac{1}{2}$, divisons tous les termes par $\sqrt{y}(y > 0)$, on obtient
$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = 4\frac{\sqrt{y}}{x} + x, \tag{3.26}$$
   on pose $z = \sqrt{y} \Longrightarrow z' = \dfrac{y'}{2\sqrt{y}}$, en remplaçant dans l'équation (3.26), on obtient :
$$2z' = 4\frac{z}{x} + x, \tag{3.27}$$

on obtient une équation linéaire, son équation homogène associée est

$$2z' = 4\frac{z}{x} \qquad (H).$$

La solution de l'équation homogène est donnée par

$$z_H(x) = ke^{\int \frac{2}{x}dx} = kx^2 / \ k \in \mathbb{R},$$

en utilisant la méthode de variation de la constante

$$z_p(x) = k(x)x^2 \Longrightarrow z_p'(x) = k'(x)x^2 + 2xk(x),$$

en remplaçant dans (3.27), on obtient :

$$\begin{aligned}
2k'(x)x^2 + 4xk(x) = 4xk(x) + x &\iff 2k'(x)x = 1\\
&\iff k'(x) = \frac{1}{2x}\\
&\iff k(x) = \int \frac{1}{2x}dx\\
&\iff k(x) = \frac{1}{2}\ln|x| + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

On fixe $(c = 0)$, donc $z_p(x) = \frac{x^2}{2}\ln|x|$, alors la solution générale de (3.27) est :

$$z(x) = z_p(x) + z_H(x) = \frac{x^2}{2}\ln|x| + kx^2 = x^2\left(k + \frac{1}{2}\ln|x|\right) / \ k \in \mathbb{R}.$$

Puisque $z(x) = \sqrt{y}$, donc la solution générale de (E) est :

$$y(x) = x^4\left(k + \frac{1}{2}\ln|x|\right)^2, k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.6 *(Equations différentielles totales)*

1. *Montrer que les équations suivantes sont des équations aux différentelles totales, puis trouver ses solutions générales :*
   (1) $(y^2 - x^2)dx + 2xydy = 0$
   (2) $\cos y dx + (2y - x\sin y)dy = 0.$
2. *Résoudre les équations différentielles suivantes admettant un facteur intégrant :*
   (3) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$
   (4) $2xy\ln y dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})dy = 0.$

Solution :

1. **(1)** $(y^2 - x^2)dx + 2xydy = 0$

En posant $M(x, y) = y^2 - x^2$ et $N(x, y) = 2xy$ on obtient

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \ et \ \frac{\partial N}{\partial x} = 2y \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Donc l'équation **(1)** est une équation aux différentielles totales. Alors

$$\begin{aligned}
M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} &\iff u(x,y) = \int M(x,y)dx \\
&\iff u(x,y) = \int (y^2 - x^2)dx + \varphi(y) \\
&\iff u(x,y) = xy^2 - \frac{x^3}{3} + \varphi(y).
\end{aligned}$$

En dérivant $u(x,y)$ par rapport à y

$$\begin{aligned}
N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} &\iff 2xy = \frac{\partial u}{\partial y} \\
&\iff 2xy = 2xy + \varphi'(y) \\
&\iff \varphi'(y) = 0 \\
&\iff \varphi(y) = c, \qquad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

et par conséquent on obtient

$$u(x,y) = xy^2 - \frac{x^3}{3} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

et par suite la solution générale de l'équation **(1)** est donnée par

$$xy^2 - \frac{x^3}{3} = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

(2) $\cos y dx + (2y - x\sin y)dy = 0.$

En posant $M(x,y) = \cos y$ et $N(x,y) = 2y - x\sin y$ on obtient

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\sin y \ et \ \frac{\partial N}{\partial x} = -\sin y \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Donc l'équation **(2)** est une équation aux différentielles totales. Alors

$$\begin{aligned}
M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} &\iff u(x,y) = \int M(x,y)dx \\
&\iff u(x,y) = \int \cos y dx + \varphi(y) \\
&\iff u(x,y) = x\cos y + \varphi(y).
\end{aligned}$$

En dérivant $u(x,y)$ par rapport à y

$$\begin{aligned}
N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} &\iff 2y - x\sin y = \frac{\partial u}{\partial y} \\
&\iff 2y - x\sin y = x\sin y + \varphi'(y) \\
&\iff \varphi'(y) = 2y \\
&\iff \varphi(y) = y^2 + c, \qquad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

et par conséquent on obtient

$$u(x,y) = x\cos y + y^2 + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

et par suite la solution générale de l'équation **(2)** est donnée par

$$x\cos y + y^2 = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

2. **(3)** $(x^2+y^2)dx - 2xydy = 0$

Soit $M(x,y) = x^2+y^2$, et $N(x,y) = -2xy$,

on a $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -2y$. Comme $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ alors l'équation **(3)** n'est pas exacte. Cherchons maintenant un facteur intégrant en calculant

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{4y}{-2xy} = -\frac{2}{x}.$$

Donc

$$\frac{d\ln\varphi}{dx} = -\frac{2}{x} \Longrightarrow \ln\varphi(x) = -2\ln|x| \Longrightarrow \varphi(x) = \frac{1}{x^2}.$$

L'équation

$$\frac{x^2+y^2}{x^2}dx - \frac{2xy}{x^2}dy = 0$$

est une équation aux différentielles totales son intégrale générale est

$$x = ce^{\frac{y^2}{x}}, \quad c = Const.$$

(4) $2xy\ln y + dx(x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}) = 0$

Soit $M(x,y) = 2xy\ln y$, et $N(x,y) = (x^2+y^2\sqrt{y^2+1})$,

on a $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x(\ln y + 1)$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$. Comme $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ alors l'équation **(4)** n'est pas exacte. Cherchons maintenant un facteur intégrant en calculant

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{2x - 2x(\ln y + 1)}{2xy\ln y} = -\frac{1}{y}.$$

Donc

$$\frac{d\ln\varphi}{dy} = -\frac{1}{y} \Longrightarrow \ln\varphi(y) = -\ln|y| \Longrightarrow \varphi(y) = \frac{1}{y}.$$

L'équation

$$\frac{2xy\ln y}{y}dx + \frac{x^2+y^2\sqrt{y^2+1}}{y}dy = 0$$

est une équation aux différentielles totales son intégrale générale est

$$x^2\ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)\frac{3}{2} = c.$$

Exercice 3.7 *(Equations de Riccati)*
Considérons l'équation différentielle suivante :

$$(x^3-1)y' - y^2 - x^2y + 2x = 0 \qquad (E)$$

1. *Trouver une solution particulière de cette équation sous la forme* $y_0 = x^\alpha$
2. *A l'aide du changement de variable* $y = y_p + z$*, trouver la solution générale de l'équation donnée.*

Solution : C'est une équation de Riccati

1. $y_p(x) = x^\alpha$ est une solution particulière de (E) donc :

$$\begin{aligned}&(x^3-1)y_p'(x) - y_p^2(x) - x^2 y_p(x) + 2x = 0\\ &\Longrightarrow x^{2\alpha}\left[(\alpha-1)x^{2-\alpha} - 1\right] + x^{\alpha-1}(2x^{2-\alpha} - \alpha) = 0,\end{aligned}$$

   et on remarque que $\alpha = 2$ est une solution de l'équation précédente. Donc $y_p(x) = x^2$.

2. Posons $y = y_p + z = x^2 + z \Longrightarrow y' = 2x + z'$, en remplaçant dans (E), on trouve

$$(x^3-1)(2x+z') - (x^2+z)^2 - x^2(x^2+z) + 2x = 0$$

   ou bien

$$(x^3-1)z' = z^2 + 3x^2 z.$$

   Divisons la dernière équation par z^2, on trouve :

$$(x^3-1)\frac{z'}{z^2} = 1 + 3x^2\frac{1}{z},$$

   qui est une équation de Bernoulli. Mais on peut la résoudre directement. On a

$$\begin{aligned}(x^3-1)\frac{z'}{z^2} = 1 + 3x^2\frac{1}{z} &\iff (x^3-1)\frac{z'}{z^2} - 3x^2\frac{1}{z} = 1\\ &\iff (x^3-1)\frac{z'}{z^2} - 3x^2\frac{z}{z^2} = 1\\ &\iff \frac{-(x^3-1)z' + 3x^2 z}{z^2} = -1\\ &\iff \left(\frac{(x^3-1)}{z}\right)' = -1,\end{aligned}$$

   et alors

$$\frac{(x^3-1)}{z} = -x + c \Longrightarrow z = \frac{(x^3-1)}{c-x} \Longrightarrow y = x^2 + \frac{(x^3-1)}{c-x} = \frac{cx^2-1}{c-x},$$

   où $c \in \mathbb{R}$, et pour $x \neq c$.

Chapitre 4

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Ce chapitre ne contient pratiquement rien de théorique ; seulement des méthodes de calcul classiques, pour les équations différentielles du second ordre les plus simples. Quelle que soit l'orientation scientifique de l'étudiant.

Définition 4.1 *Une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, est une équation de la forme :*

$$ay'' + by' + cy = g(x) \tag{4.1}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et g est une fonction continue sur un intervalle ouvert I.
L'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{4.2}$$

est appelée l'équation homogène associée à (4.1).

Théorème 4.1 *L'ensemble des solutions de l'équation homogène (4.2) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.*

4.1 Équations différentielles linéaires du second ordre homogènes

On cherche une solution de (4.2) sous la forme $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{C}$ est une constante à déterminer. On trouve

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 \iff & (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \\ \iff & ar^2 + br + c = 0. \end{aligned}$$

Définition 4.2 *L'équation $ar^2+br+c = 0$ est appelée l'équation caractéristique associée à (4.2).*

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation caractéristique associée à (4.2).

Théorème 4.2

1. *Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1, r_2 et les solutions de (4.2) sont*

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \qquad \text{où} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. *Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double r_0 et les solutions de (4.2) sont*

$$y(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x} \qquad \text{où} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. *Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions de (4.2) sont*

$$y(x) = e^{\alpha x}(\lambda cos(\beta x) + \mu sin(\beta x)) \qquad \text{où} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Preuve

1. Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. On a donc deux solutions $y_1 = e^{r_1 x}$ et $y_2 = e^{r_2 x}$ qui sont linéairement indépendantes du fait que $r_1 \neq r_2$. Puisque l'espace des solutions est un espace verctoriel de dimension 2, alors $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$ est une base de l'espace des solutions de (4.2).
   La solution générales de (4.2) s'écrit

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \qquad \text{où} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine double r_0. On a donc une solution $y_1 = e^{r_0 x}$. vérifions que $y_2 = xe^{r_0 x}$ est aussi une solution

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= \left(2ar_0 + ar_0^2 x\right) e^{r_0 x} + (b + br_0 x)\, e^{r_0 x} + cxe^{r_0 x} \\ &= (ar_0^2 + br_0 + c)xe^{r_0 x} + (2ar_0 + b)\, e^{r_0 x} \\ &= (2ar_0 + b)\, e^{r_0 x} = 0 \end{aligned}$$

   où r_0 est une racine double de l'équation caractéristique $r_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
   Les deux solutions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes, alors $\{e^{r_0 x}, xe^{r_0 x}\}$ est une base de l'espace des solutions de (4.2).
   La solution générales de (4.2) s'écrit

$$y(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x} \qquad \text{où} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées
   $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}.e^{i\beta x}, y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}.e^{-i\beta x}$. Puisque les parties réelles et imaginaires sont des solutions reélles, on a donc deux solutions réelles
   $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, qui sont linéairement indépendantes.
   Alors $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$ est une base de l'espace des solutions de (4.2).
   La solution générales de (4.2) s'écrit

$$y(x) = e^{\alpha x}(\lambda cos(\beta x) + \mu sin(\beta x)) \qquad \text{où} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 4.1 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :*

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $y'' - 6y' + 9y = 0$
3. $y'' - 2y' + 5y = 0$

***Solution** :*

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$.
   Son équation caractéristique est $r^2 + 2r - 3 = 0$ $\Delta = 16 > 0$, *elle admet deux solutions distinctes* $r_1 = 1, r_2 = -3$. *Donc les solutions générales sont*
   $$y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-3x}, \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
2. $y'' - 6y' + 9y = 0$.
   Son équation caractéristique est $r^2 - 6r + 9 = 0$ $\Delta = 0$, *elle admet une solution double* $r_0 = 3$. *Donc les solutions générales sont*
   $$y(x) = (\lambda + \mu x)e^{3x}, \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
3. $y'' - 2y' + 5y = 0$.
   Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$ $\Delta = -16 < 0$, *elle admet deux solutions complexes conjuguées :* $r_1 = 1 + 2i$ *et* $r_2 = 1 - 2i$. *Donc les solutions générales sont*
   $$y(x) = e^x(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)), \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

4.2 Équations différentielles linéaires du second ordre avec second membre

Considérons le cas général d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants, mais avec un second membre g qui est une fonction continue sur un intervalle ouvert $I \in \mathbb{R}$:

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

Méthode de résolution de l'équation non homogène :

Théorème 4.3 *Les solutions générales de l'équation (4.1) s'obtiennent en ajoutant les solutions générales de l'équation homogène (4.2) à une solution particulière de (4.1). C'est à dire :*

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x).$$

Preuve On vérifie aisement que $y_H + y_p$ est solution de l'équation (4.1), en effet

$$\begin{aligned} a\,(y_H + y_p)'' + b\,(y_H + y_p)' + c\,(y_H + y_p) &= \left(ay_H'' + by_H' + cy_H\right) + \left(ay_p'' + by_p' + cy_p\right) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Réciproquement, si y_p est une solution particulière de l'équation (4.1) et y est une autre solution de l'équation (4.1), alors leur différence est solution de l'équation homogène, en effet

$$\begin{aligned} a\,(y - y_p)'' + b\,(y - y_p)' + c\,(y - y_p) &= \left(ay_H'' + by_H' + cy_H\right) - \left(ay_p'' + by_p' + cy_p\right) \\ &= g(x) - g(x) = 0. \end{aligned}$$

Recherche d'une solution particulière
On présente deux cas particuliers importants.
(a) Second membre du type $e^{\alpha x}P(x)$.
Si $g(x) = e^{\alpha x}P(x)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme, alors la solution particulière est sous la forme $y_p(x) = e^{\alpha x}x^m Q(x)$, où Q est un polynôme de même degré que P avec :

- $y_p(x) = e^{\alpha x}Q(x)$ $(m = 0)$, si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique,
- $y_p(x) = e^{\alpha x}xQ(x)$ $(m = 1)$, si α est une racine simple de l'équation caractéristique,
- $y_p(x) = e^{\alpha x}x^2Q(x)$ $(m = 2)$, si α est une racine double de l'équation caractéristique.

(b) Second membre du type $e^{\alpha x}\left(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)\right)$**.**
Si $g(x) = e^{\alpha x}\left(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)\right)$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et P_1, P_2 sont deux polynôme, alors la solution particulière est sous la forme :

- $y_p(x) = e^{\alpha x}\left(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)\right)$, si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique,
- $y_p(x) = xe^{\alpha x}\left(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)\right)$, si $\alpha + i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique.

Dans les deux cas, Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degré $n = \max\{degP_1, degP_2\}$. **2)Supperposition des solutions particulières où le second membre $g(x)$ est sous la forme d'une somme de fonction**
Si l'équation (4.1) est de la forme

$$ay'' + by' + cy = g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_n(x) \qquad (E_n)$$

alors une solution particulière de (E_n) est $y_p(x)$ / $y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + \ldots + y_{pn}(x)$ où $y_{p1}(x), y_{p2}(x), \ldots$ *et* $y_{pn}(x)$ sont, respectivement, des solutions particulières des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&ay'' + by' + cy = g(x) = g_1(x) && (E_1)\\
&ay'' + by' + cy = g(x) = g_2(x) && (E_2)\\
&ay'' + by' + cy = g(x) = g_3(x) && (E_3)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \\
&ay'' + by' + cy = g(x) = g_n(x) && (E_n)
\end{aligned}$$

Exemple 4.2 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*
(H) $y'' - 5y' + 6y = 0$, $\qquad (E_1)$ $y'' - 5y' + 6y = 4xe^x$.
(E_2) $y'' - 5y' + 6y = 4xe^{2x}$
(E_3) $y'' + 2y' + y = (x + 1)e^{-x}$.
(E_4) $y'' + y' + y = \cos xe^{-x}$.
(E_5) $y'' + 4y' + 5y = \sin xe^{2-x}$.
(E_6) $y'' + 2y' + y = (x + 1)e^{-x} + \cos 2x + e^{2x}$.

Solution :
1-(H) : $y'' - 5y' + 6y = 0$.
Son équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = (r - 2)(r - 3) = 0$, elle admet deux racines distinctes $r_1 = 2, r_2 = 3$. Donc l'ensemble des solutions de (H) est

$$y_H(x) = \{\lambda e^{2x} + \mu e^{3x} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

2-$(E_1) : y'' - 5y' + 6y = 4xe^x$.
$y_p(x) = (ax+b)e^x$ car $\alpha = 1$ n'est pas solution de l'équation caractéristique.

$$y_p'(x) = ae^x + (ax+b)e^x = (ax+a+b)e^x$$

$$y_p''(x) = ae^x + (ax+a+b)e^x = (ax+2a+b)e^x;$$

on injecte y_p dans l'équation (E_1), on obtient :

$$\begin{aligned}
& (ax+2a+b)e^x - 5(ax+a+b)e^x + 6(ax+b)e^x = 4xe^x \\
\iff \; & (a-5a+6a)x + 2a + b - 5(a+b) + 6b = 4x \\
\iff \; & 2ax - 3a + 2b = 4x \\
\iff \; & \begin{cases} 2a = 4, \\ -3a + 2b = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2, \\ b = 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $y_p(x) = (2x+3)e^x$.
Alors l'ensemble des solutions de (E_1) est

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = (2x+3)e^x + \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$(E_2) : y'' - 5y' + 6y = 4xe^{2x}$. Comme 2 est une racine de l'équation caractéristique, donc

$$y_p(x) = x(ax+b)e^{2x} = (ax^2+bx)e^{2x}.$$

$$y_p'(x) = (2ax+b)e^{2x} + (ax^2+bx)e^{2x} = [2ax^2 + (2a+2b)x + b]e^{2x}.$$

$$\begin{aligned}
y_p''(x) &= (4ax + 2a + 2b)e^{2x} + 2[2ax^2 + (2a+2b)x + b]e^{2x} \\
&= [4ax^2 + (8a+4b)x + 2a + 4b]e^{2x}
\end{aligned}$$

En remplace dans (E_2) on obtient

$$[4ax^2 + (8a+4b)x + 2a + 4b]e^{2x} - 5[2ax^2 + (2a+2b)x + b]e^{2x} + 6(ax^2+bx)e^{2x} = 4xe^{2x}$$

$$\begin{aligned}
\iff \; & 4ax^2 + (8a+4b)x + (2a+4b) - 10ax^2 - 5(2a+2b)x - 5b + 6ax^2 + 6bx = 4x \\
\iff \; & 2ax + 2a - b = 4x \\
\iff \; & \begin{cases} -2a = 4, \\ 2a - b = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2, \\ b = -4. \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $y_p(x) = -x(2x+4)e^{2x}$.
Alors l'ensemble des solutions de (E_2) est

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} - (2x^2+4)e^{2x} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$(E_3) : y'' + 2y' + y = (x+1)e^{-x}$. Son équation homogène associée est : $(E_H) : y'' + 2y' + y = 0$, son équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$, elle admet deux racines doubles $r_1 = r_2 = -1$, les solutions de (E_H) sont :

$$y_H(x) = (\lambda + \mu x)e^{-x} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

et comme $\alpha = -1$ est une racine de l'équation caractéristique alors

$$y_p(x) = (ax+b)x^2 e^{-x},$$

où a et b sont des constantes à déterminer. En introduisant l'expression de y_p dans l'équation (E_3) et en simplifiant les deux membres par e^{-x}, on obtient

$$6ax + 2b = x + 1 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6a = 1 \\ 2b = 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \dfrac{1}{6} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

d'où

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) e^{-x}.$$

Alors l'ensemble des solutions de (E_3) est :

$$y(x) = y_p(x) + y_H(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) e^{-x} + (\lambda + \mu x)e^{-x} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$(E_4) y'' + y' + y = \cos x e^{-x}$.
Son équation homogène associée est : (E_H) : $y'' + y' + y = 0$, son équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$, elle admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, les solutions de (E_4) sont :

$$y_H(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left[A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + B\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \right] \quad \textit{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

et comme $\alpha + i\beta = -1 + i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique alors

$$y_p(x) = e^{-x}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$$

où λ et μ sont des constantes à déterminer. En introduisant l'expression de y_p dans l'équation (E_4), et en identifiant on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{array} \right.$$

d'où

$$y_p(x) = -e^{-x} \sin x.$$

Alors l'ensemble des solutions de (E_4) est :

$$y(x) = y_p(x) + y_H(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-\frac{1}{2}x} \left[A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + B\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \right] \textit{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

(E_5) : $y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{2-x}$, son équation homogène associée est : (E_H) : $y'' + 4y' + 5y = 0$, son équation caractéristique $r^2 + 4r + 5 = 0$, elle admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = -2 + i$ et $r_2 = -2 - i$, les solutions de (E_H) sont :

$$y_H(x) = e^{-2x} (A\cos x + B\sin x) \quad \textit{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

et comme $\alpha + i\beta = -2 + i$ est une racine de l'équation caractéristique, alors

$$y_p(x) = xe^{-2x}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$$

où λ et μ sont des constantes à déterminer. En introduisant l'expression de y_p dans l'équation (E_5), on obtient

$$-2\lambda \sin x + 2\mu \cos x = \sin x.$$

D'où on tire le système

$$\begin{cases} -2\lambda = 1 \\ 2\mu = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{2} \\ \mu = 0, \end{cases}$$

d'où

$$y_p(x) = -\frac{1}{2} x e^{-2x} \cos x.$$

Alors l'ensemble des solutions de (E_5) est :

$$y(x) = y_p(x) + y_H(x) = -\frac{1}{2} x e^{-2x} \cos x + e^{-\frac{1}{2}x} e^{-2x} (A \cos x + B \sin x) \quad avec\ A, B \in \mathbb{R}.$$

(E_6) : $y'' + 2y' + y = (x+1)e^{-x} + \cos 2x + e^{2x}$, son équation homogène associée est : (E_H) : $y'' + 2y' + y = 0$, les solutions de (E_H) sont :

$$y_H(x) = (\lambda + \mu x)e^{-x} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

et

• $y'' + 2y' + y = (x+1)e^{-x}$ à comme solution particulière $y_{p_1}(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) e^{-x}$ (déjà trouvée).

• $y'' + 2y' + y = \cos 2x$ à comme solution particulière $y_{p_2}(x) = -\frac{3}{25}\cos 2x + \frac{4}{25}\sin 2x$ (facile à démontrer).

• $y'' + 2y' + y = e^{2x}$ à comme solution particulière $y_{p_3}(x) = \frac{1}{9}e^{2x}$ (facile à démontrer).

Alors la solution particulière de (E_6) est :

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + y_{p_3}(x) \\ &= \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) e^{-x} - \frac{3}{25}\cos 2x + \frac{4}{25}\sin 2x + \frac{1}{9}e^{2x}, \end{aligned}$$

alors l'ensemble des solutions de (E_6) est :

$$y(x) = y_p(x) + y_H(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) e^{-x} - \frac{3}{25}\cos 2x + \frac{4}{25}\sin 2x + \frac{1}{9}e^{2x} + (\lambda + \mu x)e^{-x} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3) Méthode de Lagrange dite méthode de variation des constantes.

Soit l'équation :

$$ay'' + by' + cy = g(x) \qquad (E)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}/\ a \neq 0$.

Lorsque le second membre n'a pas l'une des formes indiquées précédemment, on emploie la méthode dite de variation des constantes.

Soit $\{y_1\ et\ y_2\}$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (H)$$

donc $y_H(x) = \lambda y_1 + \mu y_2 \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_p = \lambda(x)y_1 + \mu(x)y_2$, mais λ et μ sont deux fonctions dérivables, donc

$$y_p' = \lambda'(x)y_1 + \lambda(x)y_1' + \mu'(x)y_2 + \mu(x)y_2'.$$

On impose la condition $\lambda'(x)y_1 + \mu'(x)y_2 = 0$, il reste alors

$$\begin{aligned} & y_p' = \lambda(x)y_1' + \mu(x)y_2' \\ \Longrightarrow \quad & y_p'' = \lambda'(x)y_1' + \mu'(x)y_2' + \lambda(x)y_1'' + \mu(x)y_2'', \end{aligned}$$

en reportant dans l'équation (E), on obtient

$$\begin{aligned} a\left(\lambda'(x)y_1' + \mu'(x)y_2' + \lambda(x)y_1'' + \mu(x)y_2''\right) & \\ + \quad & b\left(\lambda(x)y_1' + \mu(x)y_2'\right) + c\left(\lambda(x)y_1 + \mu(x)y_2\right) = g(x) \\ \Longrightarrow \quad & \lambda(x)\left[ay_1'' + by_1' + cy_1\right] + \mu(x)\left[ay_1'' + by_1' + cy_1\right] \\ +a\left[\lambda'(x)y_1' + \mu'(x)y_2'\right] = g(x) & \\ \Longrightarrow \quad & \lambda' y_1' + \mu' y_2' = \frac{g(x)}{a}, \end{aligned}$$

d'où le système qui détermine $\lambda(x)$ et $\mu(x)$

$$\begin{cases} \lambda'(x)y_1 + \mu'(x)y_2 = 0, \\ \\ \lambda'(x)y_1' + \mu'(x)y_2' = \dfrac{g(x)}{a}. \end{cases}$$

Exemple 4.3 *Résoudre l'équation suivante, sur l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ *:*

$$y'' + y = \frac{1}{cosx} \qquad\qquad (E).$$

Soit :$y'' + y = 0$ $\quad (H)$ *son équation caractéristique est* $r^2 + 1 = 0 \Longrightarrow r = \pm i$*, donc* $y_H(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x /\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière de (E) *sous la forme*

$$y_p(x) = \lambda(x)\cos x + \mu(x)\sin x$$

où cette fois $\lambda(x), \mu(x)$ *sont des fonctions à trouver et qui vérifient :*

$$\begin{cases} \lambda'(x)y_1 + \mu'(x)y_2 = 0, \\ \\ \lambda'(x)y_1' + \mu'(x)y_2' = \dfrac{g(x)}{a}. \end{cases} \quad donc \quad \begin{cases} \lambda'(x)\cos x + \mu'(x)\sin x = 0 \\ \\ -\lambda'(x)\sin x + \mu'(x)\cos x = \dfrac{1}{cosx} \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par $\sin x$ *et la seconde par* $\cos x$*, on obtient*

$$\begin{cases} \lambda'(x)\cos x \sin x + \mu'(x)(\sin x)^2 = 0 \\ \\ -\lambda'(x)\cos x \sin x + \mu'(x)(\cos x)^2 = \dfrac{1}{cosx} \end{cases}$$

En faisant la somme membre à membre on obtient

$$\mu' = 1 \Longrightarrow \mu(x) = x,$$

en remplaçant dans la première équation du système on obtient

$$\lambda'(x)\cos x + \sin x = 0$$

donc $\lambda'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$ *alors* $\lambda(x) = \ln(\cos x)$.
Alors

$$y_p(x) = \ln(\cos x)\cos x + x\sin x.$$

Ainsi les fonctions solutions sont de la forme :

$$y(x) = y_p(x) + y_H(x) = \ln(\cos x)\cos x + x\sin x + \lambda\cos x + \mu\sin x / \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

4.3 Exercices

Exercice 4.1 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $y'' - 4y' + 3y = 0$
2. $y'' + 4y = 0$
3. $y'' - 2y' + y = 0$
4. $y'' + 2y' + 2y = 0$
5. $2y'' - y' = 0$
6. $2y'' + 2y' + y = 0$

Solution : Les équations données sont des équations différentielles du second ordre à cœfficients constants sans second membre.
(1) L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 3 = 0$ qui admet deux racines réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$. Donc la solution générale de la première équation est :

$$y(x) = Ae^x + Be^{3x} \qquad \text{où } A, B \text{ sont 2 constantes réelles.}$$

(2) L'équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$ qui admet deux racines purement imaginaires qui sont $r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$. La solution générale de notre équation est donc :

$$y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x \qquad \text{où} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(3) L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui admet une racine double $r = 1$.
Donc la solution générale de notre équation est :

$$y(x) = (A + Bx)e^x \qquad \text{où} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(4) L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 2 = 0$ qui admet deux racine complexes conjuguées $r_1 = -1 + i$ et $r_2 = -1 + i$. La solution générale de notre équation est donc :

$$y(x) = e^{-x}\left(A\cos x + B\sin x\right) \qquad \text{où} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(5) L'équation caractéristique est $2r^2 - r = 0$, elle admet deux racines réelles $r_1 = 0$ et $r_2 = \frac{1}{2}$. La solution de l'équation donnée est :

$$y(x) = Ae^{\frac{x}{2}} + B / \ A, B \in \mathbb{R}.$$

Remarque 4.1 *On pouvait aussi résoudre l'équation de la question précédente en posant $y' = z$; donc $y'' = z'$.*
Elle devient alors $2z' - z = 0$ qui est une équation linéaire du premier ordre à cœfficients constants.

(6) L'équation caractéristique est $2r^2 + 2r + 1 = 0$. Elle admet deux racines complexes $r_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$ et $r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$. Donc la solution générale de notre équation est :

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(A \cos \frac{x}{2} + B \sin \frac{x}{2} \right), A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.2 *Trouver une équation différentielle dont la solution générale est :*

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{-3x} \quad \textit{où } A, B \textit{ sont deux constantes réelles.}$$

<u>Solution</u> : On a :

$$\begin{aligned} & y(x) = Ae^{2x} + Be^{-3x} \\ \Longrightarrow\ & y'(x) = 2Ae^{2x} - 3Be^{-3x} \\ \Longrightarrow\ & y''(x) = 4Ae^{2x} + 9Be^{-3x}, \end{aligned}$$

et on remarque que $y'' + y' - 6y = 0$ est l'équation recherchée.

Exercice 4.3 *Résoudre le problème suivant :*

$$y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = -1.$$

<u>Solution</u> : On doit trouver la solution de l'équation différentielle qui vérifie les deux conditions données.
L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 3 = 0$ elle admet deux racines réelles distinctes $r_1 = -1$ et $r_2 = -3$. La solution générale de notre équation est :

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{-3x} \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}.$$

Trouvons maintenant la seule solution qui vérifie les conditions données.
On a $y'(x) = -Ae^{-x} - 3Be^{-3x}$. D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 2 \\ \\ y'(0) = -1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A + B = 2 \\ \\ -A - 3B = -1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \dfrac{5}{2} \\ \\ B = -\dfrac{1}{2}. \end{array} \right.$$

L'unique solution qui vérifie notre équation avec les deux conditions est :

$$y(x) = \frac{5}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-3x}.$$

Exercice 4.4

1. *Résoudre le problème suivant :*

$$4y'' - y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = \alpha.$$

2. *Trouvons la valeur de α pour laquelle la solution tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.*

Solution :

1. L'équation caractéristique est $4r^2 - 1 = 0$ qui a pour deux racines réelles $r_1 = \frac{1}{2}$ et $r_2 = -\frac{1}{2}$.
La solution générale de notre équation est :
$$y(x) = Ae^{\frac{x}{2}} + Be^{\frac{-x}{2}} \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}.$$
Trouvons la solution qui vérifie les conditions données.
D'abors on a $y'(x) = \frac{A}{2}e^{\frac{x}{2}} - \frac{B}{2}e^{\frac{-x}{2}}$, donc
$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ \\ y'(0) = \alpha \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ \\ \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = \alpha \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ \\ A - B = 2\alpha, \end{cases}$$
d'où
$$\begin{cases} A = \alpha + 1 \\ \\ B = 1 - \alpha. \end{cases}$$
La solution du problème est donc donnée par :
$$y(x) = (\alpha + 1)e^{\frac{x}{2}} + (1 - \alpha)e^{\frac{-x}{2}}.$$
2. Il est clair que si $\alpha = -1$, alors la solution tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 4.5 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $y'' + y' - 2y = e^{-x}$
2. $y'' - 3y' + 2y = (1 - 2x)e^x$
3. $y'' - y' - 2y = (x^3 + 1)e^x$
4. $y'' + 4y = 2\sin x \cos x$
5. $y'' + 4y = e^{3x}\cos 2x$
6. $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$

Solution :

1) L'équation homogène associée est : $y'' + y' - 2y = 0$ qui a pour équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$, elle admet deux racines réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = -2$.
Donc les solutions de l'équation homogène sont :
$$y_H(x) = Ae^x + Be^{-2x} \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$
et comme $\alpha = -1$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique alors
$$\begin{aligned} & y_p(x) = ke^{-x} / \ k \in \mathbb{R} \\ & \Longrightarrow y_p'(x) = -ke^{-x} \Longrightarrow y_p''(x) = ke^{-x} \end{aligned}$$
on remplace dans (1), on obtient
$$\begin{aligned} ke^{-x} - ke^{-x} - 2ke^{-x} = e^{-x} &\Longleftrightarrow -2ke^{-x} = e^{-x} \\ &\Longrightarrow k = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

donc $y_p(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-x}$.
Alors les solutions de l'équation (1) sont :

$$y(x) = y_p(x) + y_H(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + Ae^{x} + Be^{-2x} /\ A, B \in \mathbb{R}.$$

2) L'équation homogène associée est : $y'' - 3y' + 2y = 0$ qui a pour équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$, elle admet deux racines réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$.
Donc les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_H(x) = Ae^{x} + Be^{2x} \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

et $y_p(x) = x(ax+b)e^{x}$ car $\alpha = 1$ est une solution de l'équation caractéristique

$$\begin{aligned} y_p(x) = (ax^2 + bx)e^{x} \quad &\Longrightarrow \quad y_p'(x) = \left[ax^2 + (2a+b)x + b\right] e^{x} \\ &\Longrightarrow \quad y_p''(x) = \left[ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b\right] e^{x} \end{aligned}$$

on remplace dans (2), on obtient

$$\begin{aligned} &\left[ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b\right] e^{x} - 3\left[ax^2 + (2a+b)x + b\right] e^{x} + 2(ax^2 + bx)e^{x} = (1-2x)e^{x} \\ &\Longleftrightarrow -2ax + 2a - b = 1 - 2x \\ &\Longrightarrow \begin{cases} -2a = -2 \\ \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \\ b = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $y_p(x) = (x^2 + x)e^{x}$.
Alors les solutions de l'équation (2) sont :

$$y(x) = y_p(x) + y_H(x) = (x^2 + x)e^{x} + Ae^{x} + Be^{2x} /\ A, B \in \mathbb{R}.$$

3) L'équation homogène associée est : $y'' - y' - 2y = 0$ qui a pour équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$, elle admet deux racines réelles $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$.
Donc les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_H(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

et comme $\alpha = 1$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique donc on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{x}$$

où a, b, c et d sont des constantes à déterminer. En introduisant l'expression de y_p dans l'équation (3) et en simplifiant les deux membres par e^{x}, on obtient

$$-2ax^3 + (3a - 2b)x^2 + (6a + 2b - 2c)x + 2b + c - 2d = x^3 - 1.$$

On en déduit un système d'équations linéaires en a, b, c, d

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ 3a - 2b = 0 \\ 6a + 2b - 2c = 0 \\ 2b - c - 2d = -1. \end{cases}$$

La résolution de ce système donne

$$\begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{3}{4} \\ c = -\dfrac{9}{4} \\ d = -\dfrac{19}{8}. \end{cases}$$

et la solution particulière y_p s'écrira sous la forme

$$y_p(x) = -\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4} + \frac{19}{8}\right)e^x.$$

La solution générale de l'équation (3) sont :

$$y(x) = -\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4} + \frac{19}{8}\right)e^x + Ae^{-x} + Be^{2x} /\ A, B \in \mathbb{R}.$$

4) $y'' + 4y = 2\sin x \cos x \Longleftrightarrow y'' + 4y = \sin 2x$
L'équation homogène associée est : $y'' + 4y = 0$ qui a pour équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$, elle admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$.
Donc les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_H(x) = A\cos 2x + B\sin 2x \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

et comme $\alpha + i\beta = 2i$ est une racine de l'équation caractéristique donc on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = x(a\cos 2x + b\sin 2x)$$

où a et b sont des constantes à déterminer. En introduisant l'expression de y_p dans l'équation (4), on obtient

$$4b\cos 2x - 4a\sin 2x = \sin 2x.$$

D'où on tire le système

$$\begin{cases} 4b = 0 \\ -4a = 1 \end{cases}$$

dont la solution est

$$\begin{cases} a = -\dfrac{1}{4} \\ b = 0, \end{cases}$$

et par suite

$$y_p(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x.$$

La solution générale de l'équation (4) sont :

$$y(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x + A\cos 2x + B\sin 2x /\ A, B \in \mathbb{R}.$$

5) $y'' + 4y = e^{3x}\cos 2x$
L'équation homogène associée est : $y'' + 4y = 0$ qui a pour équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$, elle admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$.
Donc les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_H(x) = A\cos 2x + B\sin 2x \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

et comme $\alpha + i\beta = 3 + 2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique donc on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = e^{3x}(a\cos 2x + b\sin 2x)$$

où a et b sont des constantes à déterminer. En introduisant l'expression de y_p dans l'équation (5) et en identifiant on trouve

$$\begin{cases} 9a + 12b = 1 \\ \\ 9b - 12a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{25} \\ \\ b = \dfrac{4}{75}, \end{cases}$$

donc la solution particulière y_p s'écrira sous la forme

$$y_p(x) = e^{3x}\left(\frac{1}{25}\cos 2x + \frac{4}{75}\sin 2x\right).$$

La solution générale de l'équation (5) est :

$$y(x) = e^{3x}\left(\frac{1}{25}\cos 2x + \frac{4}{75}\sin 2x\right) + A\cos 2x + B\sin 2x / \ A, B \in \mathbb{R}.$$

6) $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$.
L'équation homogène associée est : $y'' - y = 0$ qui a pour équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$, elle admet deux racines $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$.
Donc les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_H(x) = Ae^{x} + Be^{-x} \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

et comme $\alpha + i\beta = i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique donc on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = a\cos x + b\sin x$ où a et b sont des constantes à déterminer. En introduisant l'expression de y_p dans l'équation (6), et en identifiant on trouve

$$\begin{cases} -2a = -4 \\ \\ -2b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -1, \end{cases}$$

donc la solution particulière y_p s'écrira sous la forme

$$y_p(x) = 2\cos x - \sin x.$$

La solution générale de l'équation (6) est :

$$y(x) = 2\cos x - \sin x + Ae^{x} + Be^{-x} / \ A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.6 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $y'' + y = \cos x + \cos 2x \qquad (E_1)$
2. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x \qquad (E_2)$
3. $y'' + 5y' + 6y = e^{-3x} + e^{-2x} \qquad (E_3)$
4. $y'' - 4y' + 3y = x^2 + 3x + 2 + e^x + e^{-2x} + \sin x \qquad (E_4)$

Solution :
1) L'équation homogène associée est : $y'' + y = 0$, qui a pour équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$, elle admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = i$ et $r_2 = -i$.
Donc les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_H(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad \text{où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

et $y_p(x) = y_1(x) + y_2(x)$ tel que $y_1(x)$ est une solution particulière de $y'' + y = \cos x$ et $y_2(x)$ est une solution particulière de $y'' + y = \cos 2x$
donc $y_1(x) = x\,(A \cos x + B \sin x)$ où $A; B \in \mathbb{R}$
$y_2(x) = C \cos 2x + D \sin 2x$ où $C; D \in \mathbb{R}$
d'où $y_p(x) = x\,(A \cos x + B \sin x) + C \cos 2x + D \sin 2x$ où $A; B; C; D \in \mathbb{R}$.
$y'_p(x) = (A + Bx) \cos x + (B - Ax) \sin x - 2C \sin 2x + 2D \cos 2x$
$\Longrightarrow y''_p(x) = -2A \sin x + 2B \cos x + x\,(-A \cos x - B \sin x) - 4C \cos 2x - 4D \sin 2x$
En remplaçant dans l'équation (E_1) ; on obtient

$$-2A \sin x + 2B \cos x - 3C \cos 2x - 3D \sin 2x = \cos x + \cos 2x$$

d'où par identification on trouve $A = 0, B = \dfrac{1}{2}, C = -\dfrac{1}{3}, D = 0$.
Donc $y_p(x) = \dfrac{x}{2} \sin x - \dfrac{1}{3} \cos 2x$.
Les solutions de l'équation (E_1) sont :

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{2} \sin x - \frac{1}{3} \cos 2x \quad \text{où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2) L'équation homogène associée est : $y'' - 3y' = 0$ qui a pour équation caractéristique $r^2 - 3r = 0$, elle admet deux racines réelles $r_1 = 0$ et $r_2 = 3$. Donc les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_H(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{3x} = c_1 + c_2 e^{3x} /\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

et $y_p(x) = Axe^{3x} + Bx^2 + Cx$ où $A, B, C \in \mathbb{R}$. Donc

$$\begin{aligned} y'_p(x) &= 3Axe^{3x} + Ae^{3x} + 2Bx + C, \\ y''_p(x) &= 9Axe^{3x} + 6Ae^{3x} + 2B. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'éqution (E_2) ; on aura

$$9Axe^{3x} + 6Ae^{3x} + 2B - 9Axe^{3x} - 3Ae^{3x} - 6Bx - 3C = e^{3x} - 18x,$$

d'où par identification on a $A = \dfrac{1}{3}, B = 3, C = 2$.
Donc $y_p(x) = \dfrac{1}{3} xe^{3x} + 3x^2 + 2x$.
Les solutions de l'équation (E_2) sont :

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{3x} + \frac{1}{3} xe^{3x} + 3x^2 + 2x, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3) L'équation homogène associée est : $y'' + 5y' + 6y = 0$, qui a pour équation caractéristique $r^2 + 5r + 6 = 0$, elle admet deux racines réelles $r_1 = -3$ et $r_2 = -2$. Donc les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_H(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} \quad \text{où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

et comme -3 et -2 sont des racines simples de l'équation caractéristique alors

$$y_p(x) = Axe^{-3x} + Bxe^{-2x}, A, B \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow y_p'(x) = -3Axe^{-3x} + Ae^{-3x} - 2Bxe^{-2x} + Be^{-2x}$$

$$\Longrightarrow y_p''(x) = 9Axe^{-3x} - 6Ae^{-3x} + 4Bxe^{-2x} - 4Be^{-2x}$$

En remplaçant dans l'éqution (E_3) et par identification, on obtient

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = 1. \end{cases}$$

Donc les solutions de l'équation (E_3) sont :

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - xe^{-3x} + xe^{-2x} \ \textit{avec} \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4) L'équation homogène associée est : $y'' - 4y' + 3y = 0$ qui a pour équation caractéristique $r^2 - 4r + 3 = 0$, elle admet deux racines $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$. Donc les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_H(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} \quad \text{où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

et $y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + y_4(x)$ tel que
$y_1(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$
$y_2(x) = kxe^x$ (car 1 est une solution simple de l'équation caractéristique), $k \in \mathbb{R}$.
$y_3(x) = Le^{-2x}, \ y_4(x) = C\sin x + D\cos x, \ L, C, D \in \mathbb{R}$
donc $y_p(x) = ax^2 + bx + c + kxe^x + Le^{-2x} + C\sin x + D\cos x \ o \ a, b, c, k, C, D \in \mathbb{R} \ et \ a \neq 0$
$\Longrightarrow y_p'(x) = 2ax + b + ke^x + kxe^x - 2Le^{-2x} + C\cos x - D\sin x$
$\Longrightarrow y_p''(x) = 2a + 2ke^x + kxe^x + 4Le^{-2x} - C\sin x - D\cos x$
en injectant $y_1(x)$ dans l'équation : $y'' - 4y' + 3y = x^2 + 3x + 2$, on obtient

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ -8a + 3b = 3 \\ 2a - 4b + 3c = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{17}{9} \\ c = \dfrac{80}{27}, \end{cases}$$

donc

$$y_1(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{17}{9}x + \frac{80}{27}.$$

en injectant $y_2(x)$ dans l'équation : $y'' - 4y' + 3y = e^x$, on obtient $k = -\dfrac{1}{2}$,
donc $y_2(x) = -\dfrac{1}{2}xe^x$,
en injectant $y_3(x)$ dans l'équation : $y'' - 4y' + 3y = e^{-2x}$, on obtient $L = \dfrac{1}{15}$,

donc $y_3(x) = \dfrac{1}{15}e^{-2x}$,
et du même pour $y_4(x)$ dans l'équation : $y'' - 4y' + 3y = \sin x$, on trouve

$$\begin{cases} C = \dfrac{1}{10} \\ \\ D = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Finalement les solutions de l'équation (E_4) sont :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{17}{9}x + \frac{80}{27} - \frac{x}{2}e^x + \frac{1}{15}e^{-2x} + \frac{1}{10}\sin x + \frac{1}{5}\cos x.$$

Exercice 4.7 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$ (E_1)
2. $y'' - y = \dfrac{4x^2+1}{x\sqrt{x}}$ (E_2)
3. $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2+2x+2}{x^3}$ (E_3)
4. $y'' + y = \tan x$ (E_4)
5. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}}$ (E_5)
6. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ (E_6)
7. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$ (E_7)

Solution :
1) L'équation homogène associée est : $y'' + 4y = 0$, qui a pour équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$, elle admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$.
Donc les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_H(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \quad \text{où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de (E_1) par la méthode de la variation des constantes sous la forme : $y_p(x) = c_1(x)\cos 2x + c_2(x)\sin 2x$ où $c_1(x)$, $c_2(x)$ sont deux fonctions à déterminer et qui vérifient :

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos 2x + c_2'(x)\sin 2x = 0 \\ \\ -2c_1'(x)\sin 2x + 2c_2'(x)\cos 2x = \dfrac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

En multipliant la première équation par $2\sin 2x$ et la deuxième par $\cos 2x$ puis en additionnant, on obtient

$$\begin{cases} 2c_2'(x) = 1 \\ \\ c_1'(x)\cos 2x + c_2'(x)\sin 2x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_2'(x) = \dfrac{1}{2} \\ \\ c_1'(x) = \dfrac{-\sin 2x}{2\cos 2x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_2(x) = \dfrac{x}{2} \\ c_1(x) = \dfrac{1}{4}\ln|\cos 2x| \end{cases}$$

d'où $y_p(x) = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x$, donc les solutions de l'équation (E_1) sont : $y(x) = y_p(x) + y_H(x)$, par suite

$$y(x) = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + c_1\cos 2x + c_2\sin 2x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2) L'équation homogène associée est : $y'' - y = 0$, qui a pour équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$, elle admet deux racines $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$.
Donc les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_H(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} \quad \text{où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de (E_2) par la méthode de la variation des constantes sous la forme : $y_p(x) = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^{x}$ où $c_1(x)$, $c_2(x)$ sont deux fonctions à déterminer et qui vérifient :

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{x} = 0 \\ \\ -c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{x} = \dfrac{4x^2+1}{x\sqrt{3}}, \end{cases}$$

d'où par addition, on obtient

$$\begin{cases} c_2'(x) = \dfrac{4x^2+1}{2x\sqrt{x}}e^{-x} \\ c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{x} = 0. \end{cases}$$

Par intégration par partie, on a

$$\begin{aligned} c_2(x) &= \int \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right) e^{-x}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{e^{-x}}{x\sqrt{x}}dx + 2\int \sqrt{x}d(-e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{e^{-x}}{x\sqrt{x}}dx + 2\left(-\sqrt{x}e^{-x} + \frac{1}{2}\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{e^{-x}}{x\sqrt{x}}dx - 2\sqrt{x}e^{-x} + \int \frac{1}{\sqrt{x}}d(-e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{e^{-x}}{x\sqrt{x}}dx - 2\sqrt{x}e^{-x} - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\int \frac{e^{-x}}{x\sqrt{x}}dx \\ &= -2\sqrt{x}e^{-x} - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

et $c_1'(x) = -\dfrac{4x^2+1}{2x\sqrt{x}}e^x$, donc

$$\begin{aligned}
c_1(x) &= -\int\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)e^x dx\\
&= -\frac{1}{2}\int\frac{e^x}{x\sqrt{x}}dx - 2\int\sqrt{x}d(e^x)\\
&= -\frac{1}{2}\int\frac{e^x}{x\sqrt{x}}dx - 2\left(\sqrt{x}e^x - \frac{1}{2}\int\frac{e^x}{\sqrt{x}}dx\right)\\
&= -\frac{1}{2}\int\frac{e^x}{x\sqrt{x}}dx - 2\sqrt{x}e^x + \int\frac{1}{\sqrt{x}}d(e^x)\\
&= -\frac{1}{2}\int\frac{e^x}{x\sqrt{x}}dx - 2\sqrt{x}e^x + \frac{e^x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\int\frac{e^x}{x\sqrt{x}}dx\\
&= -2\sqrt{x}e^x + \frac{e^x}{\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$y_p(x) = \left(-2\sqrt{x}e^x + \frac{e^x}{\sqrt{x}}\right)e^{-x} - \left(2\sqrt{x}e^{-x} + \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)e^x = -4\sqrt{x}.$$

Alors les solutions de l'équation (E_2) sont :

$$y(x) = y_p(x) + y_H(x) = -4\sqrt{x} + c_1e^{-x} + c_2e^x \quad \text{où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3) L'équation homogène associée est : $y'' - 2y' + y = 0$, qui a pour équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$, elle admet une racine double $r = 1$.
Donc les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_H(x) = (c_1x + c_2)e^x \quad \text{où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de (E_3) par la méthode de la variation des constantes sous la forme : $y_p(x) = (c_1(x)x + c_2(x))\,e^x$ où $c_1(x)$, $c_2(x)$ sont deux fonctions à déterminer et qui vérifient :

$$\begin{cases} c_1'(x)xe^x + c_2'(x)e^x = 0 \\ \\ c_1'(x)(xe^x + e^x) + c_2'(x)e^x = \dfrac{x^2+2x+2}{x^3}, \end{cases}$$

par soustraction, on obtient

$$\begin{cases} c_1'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}e^{-x} \\ c_1'(x)x + c_2'(x) = 0. \end{cases}$$

Par intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}
c_1(x) &= \int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)e^{-x}dx \\
&= \int \frac{e^{-x}}{x}dx + \int \left(\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)e^{-x}dx \\
&= \int \frac{e^{-x}}{x}dx + \int e^{-x}d\left(-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \int \frac{e^{-x}}{x}dx - 2\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} - \int \left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)e^{-x}dx \\
&= -\int \frac{e^{-x}}{x}dx - 2\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + \int e^{-x}d(\frac{1}{x}) \\
&= -\int \frac{e^{-x}}{x}dx - 2\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + \frac{e^{-x}}{x} + \int \frac{e^{-x}}{x}dx \\
&= -\frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x} = -\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)e^{-x}
\end{aligned}$$

et $c_2'(x) = -\dfrac{x^2+2x+2}{x^2}e^{-x}$, donc

$$\begin{aligned}
c_2(x) &= -\int \left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})\right)e^{-x}dx \\
&= e^{-x} - 2\int \frac{e^{-x}}{x}dx - 2\int \frac{e^{-x}}{x^2}dx \\
&= e^{-x} - 2\int \frac{e^{-x}}{x}dx + \int e^{-x}d(\frac{2}{x}) \\
&= e^{-x} - 2\int \frac{e^{-x}}{x}dx + \frac{2}{x}e^{-x} + 2\int \frac{e^{-x}}{x}dx \\
&= e^{-x} + \frac{2}{x}e^{-x} = \left(1+\frac{2}{x}\right)e^{-x}.
\end{aligned}$$

Donc

$$y_p(x) = \left[-(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x})xe^{-x} + (1+\frac{2}{x})e^{-x}\right]e^x = \frac{1}{x}.$$

Alors les solutions de l'équation (E_3) sont :

$$y(x) = y_p(x) + y_H(x) = \frac{1}{x} + (c_1x+c_2)e^x \quad \text{où } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

4) L'équation homogène associée est : $y''+y=0$, qui a pour équation caractéristique $r^2+1=0$, elle admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = i$, $r_2 = -i$.
Donc les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_H(x) = c_1\cos x + c_2\sin x \quad \text{où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de (E_4) par la méthode de la variation des constantes sous la forme : $y_p(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$ où $c_1(x)$, $c_2(x)$ sont deux fonctions à déterminer et qui vérifient :

$$\begin{cases} c_1' \cos x + c_2'(x) \sin x = 0 \\ -c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = \tan x. \end{cases}$$

En multipliant la première équation par $2 \sin x$ et la deuxième par $\cos x$ puis en additionnant, on obtient

$$\begin{cases} c_2'(x) = \sin x \\ c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_2(x) = -\cos x \\ c_1'(x) = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}, \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} dx \\ &= -\int \frac{dx}{\cos x} + \int \cos x dx = \int \frac{d(x-\frac{\pi}{2})}{\sin(x-\frac{\pi}{2})} dx + \sin x \\ &= \ln \left| \tan(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) \right| + \sin x. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \left[\ln \left| \tan(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) \right| + \sin x \right] \cos x - \cos x \sin x \\ &= \ln \left| \tan(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) \right| \cos x. \end{aligned}$$

Alors les solutions de l'équation (E_4) sont :

$$y(x) = y_p(x) + y_H(x) = \ln \left| \tan(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) \right| \cos x + c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad \text{où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5) L'équation homogène associée est : $y'' + 4y' + 4y = 0$, qui a pour équation caractéristique $r^2 + 4r + 4 = 0$, elle admet une racine double $r = -2$.
Donc les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_H(x) = (c_1 x + c_2) e^{-2x} \quad \text{où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de (E_5) par la méthode de la variation des constantes sous la forme : $y_p(x) = (c_1(x)x + c_2(x))\, e^{-2x}$ où $c_1(x)$, $c_2(x)$ sont deux fonctions à déterminer et qui vérifient :

$$\begin{cases} c_1'(x) x e^{-2x} + c_2'(x) e^{-2x} = 0 \\ c_1'(x)(-2xe^{-2x} + e^{-2x}) - 2c_2'(x) e^{-2x} = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}}, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x) = 0 \\ (1-2x) c_1'(x) - 2c_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ c_2'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \\ c_2(x) = -\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \operatorname{Argsh} x \\ c_2(x) = -\sqrt{x^2+1}. \end{cases}$$

Donc
$$y_p(x) = \left[\ln(x+\sqrt{x^2+1})x - \sqrt{x^2+1}\right] e^{-2x}.$$
Alors les solutions de l'équation (E_5) sont :
$$y(x) = xe^{-2x}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - e^{-2x}\sqrt{x^2+1} + (c_1x+c_2)e^{-2x}(\quad \text{où } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$
6) $y_p(x) = (c_1(x)x + c_2(x))\, e^x$ où $c_1(x)$, $c_2(x)$ sont deux fonctions à détermier et qui vérifient :
$$\begin{cases} c_1'(x)xe^x + c_2'(x)e^x = 0 \\ c_1'(x)(xe^x+e^x) + c_2'(x)e^x = \dfrac{e^x}{x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1'(x)x + c_2'(x) = 0 \\ (x+1)c_1'(x) + c_2'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1(x) = \ln|x| \\ c_2(x) = -x. \end{cases}$$
Donc
$$y_p(x) = [\ln|x|x - x]\, e^x.$$
Alors les solutions de (E_6) sont :
$$y(x) = [\ln|x|x - x]\, e^x + (c_1x+c_2)\, e^x$$
7)
$$y_H(x) = c_1\cos x + c_2\sin x \quad \text{où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
On cherche une solution particulière de (E_4) par la méthode de la variation des constantes sous la forme : $y_p(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$ où $c_1(x)$, $c_2(x)$ sont deux fonctions à déterminer et qui vérifient :
$$\begin{cases} c_1'\cos x + c_2'(x)\sin x = 0 \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos^3 x}. \end{cases}$$
En multipliant la première équation par $2\sin x$ et la deuxième par $\cos x$ puis en additionnant, on obtient
$$\begin{cases} c_2'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_2'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ c_1'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_2(x) = \tan x \\ c_1(x) = -\dfrac{1}{2\cos^2 x}. \end{cases}$$
Donc
$$y_p(x) = -\frac{1}{2\cos^2 x}\cos x + \tan x \sin x = -\frac{1}{2\cos x}\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$
Alors les solutions de (E_7) sont :
$$y(x) = -\frac{1}{2\cos x}\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + c_1\cos x + c_2\sin x \quad \text{où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Bibliographie

[1] K. Allab, Eléments d'Analyse. OPU (1086).

[2] S. Abou Jaoude et J. Chevalier, Cahiers de Mathématiques, Analyse II et III. O.C.D.L (1972).

[3] E. Azoulay, Mathématique DEUG B-Cours et exercices résolus (1ère et 2ème années), Tome 1, Ediscience International, Paris (1995).

[4] E. Azoulay, Mathématique DEUG B-Cours et exercices résolus (1ère et 2ème années), Tome 2, Ediscience International, Paris (1995).

[5] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo et F. Boschet, Exercices d'Analyse 1er Cycle, 1ère Année de Mathématiques Supérieurs, Librairie Armand Colin (1977).

[6] R. Couty et J. Ezra, Analyse. Tomes 1 et 2. Librairie Armand Colin (1967).

[7] J. Dixmier, Cours de mathématiques du premier Cycle, 1ère Année. Editions Gauthier-Villars (1973).

[8] G. Flory, Exercices de Topologie et d'Analyse. Tome 1 et 2. Librairie Vuibert (1976).

[9] R. Godement, Introduction à l'Analyse Mathématique. Fascicules 1 et 2. OPU (1986).

[10] M. Krasnov, A. Kissélev, G. Makarenko et E. Chikine, Mathématique supérieures, Tome 1, De Boeck Université, Bruxelles (1993).

[11] M. Krasnov, A. Kissélev, G. Makarenko et E. Chikine, Mathématique supérieures, Tome 2, De Boeck Université, Bruxelles (1993).

[12] D. Latsis, Exercices de mathématiques, Belin, Paris (1986).

[13] J. Lelong-Ferrand et J. M. Arnaudies, Cours de Mathématiques. Tome. Analyse. Dunod (1977).

[14] F. Liret et M. Zisman, Maths -Tome 1, Dunod Université, Paris (1987).

[15] F. Liret et M. Zisman, Maths -Tome 2, Dunod Université, Paris (1987).

[16] M. Messeri, Exercices de Mathématiques. Analyse I. Tome 2. Collection Belin (1980).

[17] J-M. Monier, Cours de mathématiques -Maths sup - Analyse 2 , Dunod, Paris (1994).

[18] J. Quinet, Cours élémentaire de Mathématiques Supérieures. Tome 2. Fonctions usuelles. Dunod (1976).

[19] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux, Cours de mathématiques spéciales. Tome 3-Topologie et éléments dŠanalyse, Masson, Paris-Milan-Barcelone (1995).

[20] P. Variot, Exercices corrigés de mathématiques, Ellipses, Paris (1989).

[21] P. Variot, Cours de mathématiques. B.T.S.-I.U.T., Ellipses, Paris (1991).