REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

INTRODUCTION AUX MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

2ème Année

Master Statistique et Applications

Dr Malika HAMMAD

Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbes

2020/2021

Table des matières

Introduction et Guide de lecture

Ces notes de cours ont pour but d'introduire et de présenter les modèles mathématiques de marchés financiers en temps discret et continu, l'objectif principal est de comprendre les bases de la théorie d'options et d'obtenir les premières notions de la gestion des risques financiers. Elles sont destinés principalement aux étudiants du Master 2 " statistiques et applications " ainsi qu'aux élèves de maîtrise de "mathématiques appliquées" qui s'orientent vers les domaines de recherches de l'Actuariat, la finance et contrôls stochastique. Elles sont largement inspirées de plusieurs sources, dont principalement [1], [4], [7], [16], [17] et [18].

Le contenu de ces notes de cours est organisé comme suit :

On commence par un chapitre clé de la finance des marchés, dont les notions essentielles l'absence d'arbitrage et la couverture font l'objet de notre étude .

Le deuxième chapitre récapitule les notions générales de processus stochastiques et introduit en particulier la classe des processus gaussiens, on introduit le concept de martingale et on visite les principales propriétés connues pour application en finance. On présente aussi le mouvement brownien, processus stochastique central, qui fait l'objet de la construction de l'intégrale stochastique et de la modélisation mathématique des marchés financiers en temps discret et continu.

Dans le chapitre 3, on expose les principales idées de la théorie des options dans le cadre mathématique associé aux modèles à temps discret. à la fin de chapitre on décrit le modèle de Cox-Ross-Rubinstein.

Le chapitre 4 est consacré au Calcul d'Itô, qui nécessite la connaissance des intégrales stochastiques et ses principales propriétés. On présentera ainsi à la fin du chapitre les équations différentielles stochastiques. Tout cela sera intensivement utilisé au dernier chapitre.

Le chapitre 5 introduit le modèle à temps continu de Black et Scholes qui décrit l'évolution des cours des actifs financiers, dont la méthode utilisée repose sur des idées analogues à celles déjà introduites dans les modèles discrets dans le chapitre3.

Nous proposons à la fin des chapitres 2 et 4 des exercices partiellement résolus qui pourrait figurer dans les épreuves des examens. En outre, les étudiants devraient essayer de produire leurs solutions pour les exercices non résolus. C'est par la recherche d'une solution que l'on apprend la plupart des mathématiques.

Chapitre 1

Problèmes des marchés financiers

La notion de Marché financier est une notion très ancienne qui est apparu au $14^{\text{ème}}$ siècle sous l'impulsion des Italiens et qui s'est propagéa aux autres pays de l'europe la fin $16^{\text{ème}}$ sciècle. Un marché financier est un lieu (par fois virtuel) sur lequel des personnes, des sociétés privées ou étatiques peuvent négocier des titres financiers, matières premières et autres actifs, à des prix qui reflètent l'offre et la demande.

Le domaine de la finance est particulièrement large, et se divise en deux catégories :

La première est la finance d'entreprise (**corporate finance**) et la seconde est la finance de marché(**market finance**).

La finance d'entreprise se base essentiellement sur des mathématiques simples alors que la finance de marché repose sur des mathématiques complexes et engendre de nombreux travaux mathématiques. Nous allons voir dans ce chapitre que le concept de base de la finance de marché est le risque et que les mathématiques produisent des outils très efficaces de gestion de risque. Les notions de ce chapitre sont tirées de [3], [6], [16] et [27].

Les termes anglo-saxons se sont largement imposés dans la littérature des marchés financiers. Nous privilégions souvent l'utilisation de ces termes plutôt que des termes français, moins utilisés.

1.1 Marché financier

Définition 1.1.1.

Le marché financier est un lieu (parfois virtuel) où l'on achète et vend des titres financiers (ou bien actifs financiers).

1.1.1 Actifs financiers

Les actifs financiers sont des contrats où les parties s'échangent des flux d'argent

- Une **quantité donnée d'un actif financier** (action, obligation, indice boursier, devise, matière première, ou un autre produit dérivé), est appelée **actif sous-jacent (underlying asset)**.

- **Prix d'un titre financier (price)** : c'est le montant convenu entre les deux parties en échange du titre.
- **Maturité ou échéance**(Maturity) : c'est la date à laquelle l'échange doit avoir lieu.
- **Prix de livraison ou prix à terme (dettlement price or forward price)** : c'est le prix auquel l'actif sous-jacent est échangé.

Les transactions peuvent être directes entre le **broker** et le client **(over the counter)** ou sur une place financière organisée telle qu'une bourse (**stock exchange**).

Une **bourse** est un marché financier institutionnel avec un réglement spécifique choisi de manière à améliorer les conditions des transactions.

1.1.2 Rôle des marchés financiers

Les principales caractéristiques d'un marché financier sont :
- La rencontre de deux contreparties (vendeurs et acheteurs).
- La cotation continue des produits financiers.
- L'élaboration de bonnes conditions pour les transactions en prenant en compte les objectifs opposés des acteurs du marché.

1.1.3 Principaux marchés

Il existe quatre principaux marchés financiers classés par type d'actifs sur lesquels les investisseurs particuliers peuvent acheter ou vendre différentes valeurs mobilières , il s'agit de :
- **Marchés de taux d'intérêt**, c'est-à-dire les marchés de la **dette**, il est d'usage de séparer en :
  - 1. **Marché obligataire** c'est le marché sur lequel s'échangent les obligations des entreprises et des États, pour les dettes originellemnet à moyen ou long terme ;
  - 2. **Marché monétaire** pour les dettes à court terme (moins d'un, deux ou même parfois trois ans à son émission).
- **Marché de change**, ou **Forex**, où l'on échange des **devises** des pays les unes contre les autres ;
- **Marché d'actions**, c'est-à-dire des titres de propriété des entreprises, qu'on appelle plus couramment la Bourse. C'est sur ce marché que s'échangent les actions des sociétés cotées.
- **Marchés des deux métaux précieux, l'Or et l'Argent**, à la frontière avec les marchés organisés de **produits de base**(en anglais : **commodities)**, sont minuscules en regard de la taille désormais atteinte par les autres marchés. ces deux métaux sont de moins en moins monétisés.

Les marchés financiers sont autrement classés et caractérisés par trois critères :
- Premier critère : **Marché primaire / Marché secondaire**

1. Le Marché primaire : Mise en contact direct d'un émetteur d'un instrument financier (action, obligation,...) avec un investisseur. Le montant investi influence directement l'étendue financière de l'instrument financier (capital pour actions et dette pour obligations).
2. Le Marché secondaire : Les instruments financiers, créés au préalable, sont librement négociés entre deux ou plusieurs investisseurs. La réalisation de la transaction n'influence pas les engagements pris par l'émetteur, qui est tout à fait étranger à la transaction.

Remarque 1.1.1.
Les marchés secondaires assurent la liquidité sur des instruments créés préalablement sur un marché primaire. Ils offrent la possibilité à un investisseur de la première heure de se dégager d'une position qu'il a prise.

– Deuxième critère : **Marché réglementé / Marché de gré à gré**

1. Le Marché réglementé : Institution où se présentent les acheteurs et vendeurs de valeurs mobilières pour réaliser de manière anonyme leurs transactions. Le prix de la transaction est déterminé par le marché en fonction des conditions présentes sur celui-ci et l'investisseur ne connaît pas sa contrepartie car le marché s'interpose.
2. Le March de gré à gré : Marché où deux contreparties se mettent en rapport pour réaliser une transaction ponctuelle. Lorsqu'un opérateur traite un ordre de bourse, il prend contact avec plusieurs contreparties qui ont un intérêt dans la valeur en question.

– Troisième critère : **Marché dirigé par les ordres / par les prix**

1. Le Marché dirigé par les ordres : Les opérateurs transmettent les ordres de bourse au marché qui les classe par sens (achat / vente), puis par la limite fixée par l'investisseur et la liquidité n'est apportée que par ce dernier.
2. Le Marché dirigé par les prix : Des opérateurs particuliers apportent de la liquidité (c'est-à-dire des ordres de bourse) en se plaçant à la fois à l'achat et à la vente pour une quantité importante de titres. Il s'agit des Market Makers et la liquidité est assurée par ces derniers.

1.1.4 Produit primaire

Un produit primaire est un titre avec une rémunération indépendante de tout autre titre. Il existe deux types de produits primaires : les actions et les obligations.

Obligation (bond)

L'obligation est un titre financier correspondant à un emprunt pendant un temps fixé dont le risque de défaut (**default risk**) est supposé inexistant lorsque l'obligation est émise par l'état, celle-ci est échangée sur les **marchés obligataires**.

Elle est vendue sur le marché primaire à un prix proche du **montant nominal** M **(la somme empruntée)** puis elle est échangée sur le marché secondaire à un prix qui fluctue.

Une obligation est déterminée par :
- Une durée,
- Un taux d'intérêt.

Remarque 1.1.2.

Le taux d'intérêt d'une obligation est choisi en fonction du risque de faillite de l'institution. Ce risque est évalué grâce à des notations faites par des institutions indépendantes. Le prix d'une obligation dépend du montant nominal M, *de la date d'échéance* N, *et des coupons.*

Coupons

Ce sont des montants $I_{n_1}, I_{n_2}, \cdots, I_N$ versés par l'emprunteur aux dates $n_1, n_2, \ldots, N$ fixées à l'avance et qui correspondent à des intérêts sur le nominal M.

En d'autres termes, le revenu perçu par le détenteur d'une obligation est appelé "**intérêt**" et d'une action est appelé "**dividende**".

Exemple 1.1.1.

Les flux financiers F_n *d'une obligation de montant nominal* $M = 150$ € *et de maturité* $N = 4$ *ans versant un coupon annuel de* 8% *sont :*

n_i	1	2	3	4
F_n	12 €	12 €	12 €	160 €

Obligation zéro-coupon (zero-coupon bond)

C'est une obligation qui ne verse pas des coupons donc à l'échéance, seul le nominal est remboursé.

Lorsqu'il y a suffisamment de zéro-coupons, il est possible de construire la courbe des taux de rentabilité annuelle en fonction des échéances, appelée courbe des **taux zéro-coupon** par terme **(zero-rate cuvre)**.

Lorsque cette courbe est **croissante**, cela signifie que le marché attend une rentabilité d'autant plus grande que l'échéance est lointaine, c'est à dire **le risque de taux est important**.

Au contraire une courbe **décroissante** signifie que le marché anticipe **une baisse des taux**.

Une courbe **plate** n'existe jamais en pratique mais signifierait un **taux d'intérêt constant** dans le temps.

Action (share)

Une action est un titre de propriété d'une entreprise qui n'est pas remboursable.

- Le prix d'une action est défini par sa cotation en bourse. Une action peut être vendue ou achetée à n'importe quel moment (pendant les heures d'ouverture de la bourse).
- Le détenteur d'une action devient un associé, proportionnellement au nombre de titres qu'il détient. De plus, l'actionnaire a des droits sur :
  - Le management,
  - Les bénéfices,
  - L'actif social.
- Les émetteurs des actions sont des entreprises. L'émission d'actions permet de recouvrir son investissement initial et ses bénéfices.
- Une action est un produit très volatile, lié à la fois aux performances de l'entreprise et à la situation du marché. sa cotation est constamment réévaluée en fonction de l'offre et de la demande sur les marchés financiers.

1.1.5 Produit dérivé

Un produit dérivé **(derivation)** ou **actif contingent** est un titre dont la valeur dépend d'un autre titre appelé l'actif sous-jacent.

Il existe une multitude de produits dérivés. Les principaux exemples sont :

Les futures, les forwards et les options.

Contrat à terme (forward)

C'est un contrat qui donne à l'invertisseur l'obligation d'acheter ou de vendre un titre à un prix défini à l'avance pendant une période fixée.

Future (futur)

Ce sont des contrats à terme négociables.

Il y a une petite différence entre les contrats à terme et les futures :

- Le forward est payé à maturité, alors que le future est marqué au marché.
- Le contrat future est échangé sur un marché organisé, le contrat à terme est de gré à gré (**Over The Counter**).
- Les prix du future et celui du foward sont différents lorsque les taux sont stochastiques.

Option

Un tel titre est appelé **option d'achat (call)** ou **option de vente (put)**.

Notre sujet porte sur le prix d'une option. Nous donnons une importance particulière à étudier ce produit. Ses principales caractéristiques sont :

- **Le strike**, noté K : prix d'exercice de l'option, qui est choisi et fixé à l'instant initial.
- **Le prix de l'option** : prime de risque plus marge de l'intermédiaire.
- **La date d'expiration**, notée N : fin de la période, elle aussi fixée à l'instant initial.
- **La fonction payoff** : fonction qui détermine la transaction finale.
- **Des contraintes annexes**. Par exemple, si le sous-jacent passe un certain niveau, le contrat s'annule **(option barrière)**.

Les options les plus simples, et généralement les plus liquides (les plus vendues), sont les **calls** et les **puts** de type européens ou américains. Ces options sont souvent appelées **option vanilles.** Les autres options, appelées **options exotiques**, sont généralement beaucoup plus difficiles à préciser.

Les options peuvent être utilisées :

- Soit en couverture de risque de baisse ou de hausse,
- Soit pour spéculer à la baisse ou à la hausse du sous-jacent,
- Soit pour spéculer sur la volatilité.

On distingue deux grands types d'options.

Option européenne

Contrat qui donne à son détenteur (celui qui achète le contrat) le droit, et non l'obligation, d'acheter (option d'achat=call) ou de vendre (option de vente=put) une certaine quantité d'un actif financier (sous-jacent) à un prix fixé ou prix d'exercice K (strike price) á une date fixée à l'avance (maturité).

Exemple 1.1.2.

Une option d'achat sur une tonne de blé à $K = 150e$ *la tonne dans un ans. Si à l'échéance* N, $(S_N - K) < 0$ *le prix d'exercice est supérieur au cours* S_N *la tonne de blé, le détenteur de l'option n'a pas intérêt à l'exercer, par contre si* $S_N > 150e$, *l'exercice de l'option permet à son détenteur de réaliser un profit égal à* $S_N - K$. *Le gain de l'acheteur de l'option à l'échéance est égal à :* $C_N = (S_N - K)_+ = \max(S_N - K, 0)$, *de même le gain du vendeur de l'option à l'échéance est égal à :* $P_N = (K - S_N)_+ = \max(K - S_N, 0)$. *Notons donc que, la valeur à l'échéance d'une option est toujour positive.*

Option américaine

Contrat qui donne à son détenteur le droit, et non l'obligation, d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif financier à un prix et à n'importe quel moment entre la date initiale et l'échéance (une date fixée à l'avance).

Ce droit lui même s'achète ou se vend, cela sur un marché d'options (une bourse spécialisée, ou au gré à gré), contre un certain prix, appelé **prime** en français et **premium** en englais.

Remarque 1.1.3.

La valeur d'une option américaine, relativement à une option européenne, est donc plus onéreuse, étant donné qu'elle donne plus de possibilités d'exercice à son détenteur.

Option asiatique

Il existe un troisième type d'option qui fonctionne comme l'option européenne à la différence que le détenteur dispose d'un droit supplémentaire. Il peut soit exercer l'option call ou put au prix d'exercice (fixe), soit à un prix moyen qui est une moyenne généralement arithmétique, parfois géométrique du prix du sous jacent pendant la durée de vie de l'option.

1.1.6 Stratégie de couverture ou de spéculation

- L'**achat d'un call (long call)** permet de se prémunir contre une hausse éventuelle du sous-adjacent.
- De même, le détenteur du sous-jacent pourra se prémunir contre une baisse de celui-ci en **achetant un put (long put)**.
  Dans ce cas, cette position de l'agent est une stratégie de couverture du sous-jacent.
- L'achat d'un call ou la **vente d'un put (sgort put)** peuvent également être des stratgies de spéculation à la hausse du sous-jacent.
- De même, la **vente d'un call (short call)** ou l'achat d'un put sont des stratégies plus complexes, par exemple l'anticipation d'une variation du sous-jacent dans un sens indéterminé (à la hausse ou à la baisse) peut conduire à acheter simultanément un call et un put à la monnaie, c'est à dire le prix d'exercice est égal au prix du marché actuel.

Donc, **la couverture (hedging)** est une protection contre le risque généré par une position. On trouvera plus de détails sur les stratégies de couverture ou spéculation dans [5].

1.2 Valorisation (Evaluation)

La valorisation (**pricing**) d'un titre financier est l'évaluation de sa valeur, ne pas "mettre en exploitation" ou bien à "augmenter la valeur" comme l'indiquent les dictionnaires, mais simplement à évaluer.

La notion d'arbitrage fournit un premier moyen de le faire.

Le problème d'évaluation des produits dérivés

L'évaluation (on dit aussi "valorisation") des produits dérivés se ramène souvent au calcul du prix d'aujourd'hui d'un actif dont on ne connait le prix qu'à une date future. Il se ramène donc au calcul d'une **espérance conditionnelle**.

1.2.1 Hypothèse de non arbitrage (A.O.A) et relation de parité call-put

L'une des hypothèses fondamentales des modèles usuels est qu'il n'existe aucune stratégie financière permettant, pour un coût initial nul, d'acquirir une richesse certaine dans une date future. Cette hypothèse est appelée **absence d'opportunités d'arbitrage (A.O.A)**, et est jutifiée par l'existence d'**arbitrage**, acteurs sur les marchés dont le rôle est de détecter ce type d'opportunités et d'en profiter. Ceux-ci créent alors une force qui tend à faire évoluer le prix de l'actif vers son prix de non-arbitrage.

Il n'existe pas beaucoup d'arbitrages sur les marchés développés. De plus, si un arbitrage appraît, les **traders** prennent avantage de celui-ci et donc il disparaît.

Arbitrage et prix unique : dans de nombreux modèles financiers, le prix et la straégie de couverture sont uniques. L'unicité est garantie par l'absence d'arbitrage sur les marchés et l'option est sans risque puisque la straégie de couverture élimine complétement le risque de l'option.

La valorisation d'une option dépend ainsi principalement des éléments suivants :

1. **du sous-jacent**, en particulier.
2. **de son prix**.
3. **de la volatilité de ce prix**.
4. **de la durée jusqu'à l'échéance**.
5. **des taux d'intérêt**.

Maintenant, nous allons montrer comment, à partir de cette simple hypothèse, on peut établir des relations entre les prix d'un call et d'un put européen de même échéance T et de même prix d'exercice K, sur une action de cours S_t à l'instant t et d'une obligation zéro-coupon de prix B_t à l'instant t.

Relation parité call-put

Supposons dans un premier temps que l'actif sous-jacent ne verse pas de dividende. Désignons par C_t, et P_t les prix respectifs du call et du put à l'instant t. En abscence d'opportinité d'arbitrage, on a la relation dite "parité call-put" suivante :

$$C_t - P_t = S_t - K.B_t, \text{ pour tout } t < T.$$

1.2.2 Valorisation par absence d'opportinuté d'arbitrage

Valorisation des options : la valorisation des options est moins aisée que celle des contrats à terme dont la valeur pouvait être déterminée à partir d'un raisonnement par arbitrage.

Par **A.O.A**, la valeur d'une option est toujours supérieure à celle du contrat à terme correspondant puisque c'est le cas à l'échéance.

1.3 Théorie de portefeuille

Définition 1.3.1.
Un portefeuille *: c'est un ensemble de titres (actions, obligations,...) détenu par un investisseur.*

Les principales problèmatiques de la gestion d'un portefeuille sont :
- Comment minimiser le risque et maximiser le rendement ?
- Comment calculer le rendement espéré associé à un risque ?
- Quelle est la performance d'un portefeuille ?

Pour simplifier l'analyse, nous prenons un marché avec les hypothèses suivantes :
- Le marché est sans arbitrage.
- Les brokers ont un comportement rationnel.
- Il existe une unique loi de probabilité qui explique les comportements futurs des marchés financiers.

On peut considérer que les marchés en dehors de ces hypothèses sont des cas particuliers.

Stratégies auto-financée

L'autofinancement désigne le financement des investissements de l'entreprise sans apporter de richesses extérieures, à partir de ses capitaux propres existants, de sa propre rentabilité (capacité d'autofinancement, réserves, plus value), de son épargne et de ses amortissements comptables.

Probabilité martingale ou risque neutre

Une des conséquences des hypothèses de non arbitrage et de complétude des marchés est l'existence et l'unicité à équivalence près d'une mesure de probabilité dite **probabilité martingale** ou "**probabilité risque-neutre**" telle que le processus de prix des actifs ayant une source de risque commune est une martingale sous cette probabilité. Cette probabilité peut s'interpréter comme celle qui régirait le processus de prix des sous-jacents de ces actifs si l'espérance du taux de rendement de ceux-ci était le taux d'intérêt sans risque (d'où le terme risque-neutre : aucune prime n'est attribuée à la prise de risque).

Définition 1.3.2.
Une probabilté $\mathbb{P}^*$ est dite probabilité ***risque neutre*** *si :*
1. *$\mathbb{P}^*$ est équivalente à la probabilité réelle $\mathbb{P}$.*
2. *le prix actualisé de l'actif risqué est une martingale sous $\mathbb{P}^*$.*

Il existe un lien profond entre l'existence de probabilité risque neutre et l'hypothèse d'AOA, nous avons le résultat suivant

Théorème 1.3.1.
Il existe au moins une probabilité risque neutre, si et seulement si il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage.

Marché viable

Le marché est viable s'il y a une absence d'opportunité d'arbitrage (**AOA**).

Hypothèse de complétude des marchés

Une autre hypothèse, beaucoup plus remise en question, est que tout flux à venir peut être répluqué exactement, et quel que soit l'état du monde, par un portefeuille d'autres actifs bien choisis. Les modèles ne comprenant pas les hypothèses de non arbitrage et de complétude des marchés sont dits modèles de **marchés imparfaits**.

Supposer q'un marché financier est complet est une hypothèse restrictive dont la justification économique est moins clair que celle de l'hypothèse de viabilité. L'intérêt des marchés complets est qu'ils se prêtent à une théorie très simple de l'évaluation et de la couverture des actifs conditionnels. Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, que nous étudierons plus tard dans le chapitre 3, fournit un exemple de modèle de marché complet d'une grande simplicité.

1.4 Mesures de risque

La mesure de risque constitue un outil important pour calculer le besoin en fonds propres, n'importe qu'elle établissement financière peut faire appel à diverses techniques pour mesurer et contrôler le risque qu'elle assume dans ses diverses activités.

Trois paramètres sont essentiels et indispensables pour n'import qu'elle mesure de risque et pour interpréter le chiffre **VaR**(qui permet de donner une vision globale du risque de marché d'un portefeuille) :

1. l'horizon de modélisation qui correspond à la période sur laquelle la variation de la valeur du portefeuille est mesurée ;
2. le seuil de confiance α du chiffre **VaR** qui correspond à la probabilité de ne pas dépasser cette mesure du risque ;
3. la variable financière à modéliser.

Si ces trois paramètres ne sont pas spécifiés, nous ne pouvons pas interpréter le chiffre **VaR**, car un risque à 10 jours avec une probabilité de 99% est beaucoup plus important qu'un risque à 1 jour avec une probabilité de 90%. Avec la mesure de risque **VaR**, on passe donc d'une mesure de risque comme volatilité à une mesure de risque comme quantile.

Valeur en risque (VaR)

La valeur en risque, plus connue sous le nom anglais **"Value-at-risque"** ou VaR introduite dans les années 1990, est une mesure de la perte potentielle (downside risk) qui peut survenir à la suite de mouvements adverses des prix de marché. Elle permet de répondre à la question suivante :

Combien l'établissement financier peut-il perdre avec une probabilité α pour un horizon de temps T fixé ?.

Pour calculer une **VaR** il est nécessaire de modéliser le portefeuille (et donc de faire des hypothèses). En particulier, cela suppose d'affecter une probabilité aux différentes évolutions possibles du portefeuille.

Définition 1.4.1. *La VaR est définie de manière implicite, à partir de la distribution du rendement de l'actif considéré sur la période considérée. Soit r le rendement réalisé par l'actif et soit $0 < \alpha < 1$ (le seuil de confiance). La $VaR(\alpha)$ est telle que : $\alpha = \mathbb{P}(VaR(\alpha) < r)$.*

Pour calculer la **VaR**, nous devons identifier les facteurs de marché qui affectent la valeur du portefeuille. le nombre de ces facteurs peut être plus ou moins grand, mais dépend généralement du type de marché concidéré. En pratique nous pouvons obtenir les facteurs de marché en décomposant les instruments du portefeuille en instruments de base (par exemple, nous pouvons décomposer un portefeuille de contrats forward en un portefeuille équivalent d'obligations à zéro-coupon). Le calcul de la **VaR** dépend donc de la méthodologie utilisée.

1.4.1 Le choix du portefeuille optimal

Un portefeuille est efficient s'il maximise la rentabilité attendue pour un niveau de risque donné. La frontière efficiente est l'ensemble des portefeuilles efficients. Parmi tous les portefeuilles risqués possibles, seuls les portefeuilles efficients doivent être considérés.

S'il est possible d'emprunter ou de preter au taux d'interet sans risque, il existe un portefeuille risque optimal π^* qui maximise **le ratio de Sharpe** et qui est independant des preferences de l'investisseur.

Remarque 1.4.1.

-***La covariance d'un titre avec le portefeuille*** *: est égale à la moyenne des covariances de chacun des titres avec lui, pondérée par leurs proportions.*

-***La variance du portefeuille*** *: est la moyenne des covariances de chacun des titres avec le portefeuille, pondérée par leurs poids.*

-***La rentabilité attendue du portefeuille*** *: est égale à la moyenne des rentabilités attendues de chacun des titres, pondérée par leurs poids.*

-***le ratio de Sharpe*** *: est le rapport entre la rentabilité attendue excédentaire et l'écart type (la racine carrée de la variance du portefeuille).*

Chapitre 2

Outils probabilistes pour la finance

2.1 Processus Stochastiques

Définition 2.1.1. ***(Processus stochastique)***

On appelle processus stochastique à valeurs dans l'espace $(F, \mathcal{B})$, *une famille* $(X_t)_{t\in\mathrm{T}}$ *de variables aléatoires sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* $(F, \mathcal{B})$ *indexée par un ensemble* T.

- En général $\mathrm{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$, on considère dans ce cas que le processus est indexé par le temps t.
- Si $\mathrm{T} = \mathbb{N}$ ou $\mathrm{T} \subset \mathbb{Z}$, le processus est dit discret.
- Pour $\mathrm{T} \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, on parle de champ aléatoire.

Un processus $X_t(\omega)$ dépend de deux paramètres : dépend de t (en géneral le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$:

- Pour $t \in \mathrm{T}$ fixé, $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ($X_t(\omega)$: est l'état du processus à l'instant t).
- Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in \mathrm{T} \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.

Si pour tout $t \in \mathrm{T}$, $t \mapsto X_t(\omega)$ sont continues, on dit que le processus est continu.

Définition 2.1.2.

On dit que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ *est mesurable si l'application :*

$$\begin{array}{rcl} X : \mathbb{R}_+ \times \Omega & \longrightarrow & F \\ (t, \omega) & \longmapsto & X(t, \omega) = X_t(\omega) \end{array}$$

est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{F}-$*mesurable.*

Définition 2.1.3.

- *Le processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit* ***stationnaire*** *si pour tout* $s \geq 0$, $(X_{t+s})_{t\geq 0} \stackrel{L}{=} (X_t)_{t\geq 0}$ *(ne dépend pas de* $s > 0$*), c'est à dire pour tout* $s > 0$ *et tout* $t_1, \dots, t_p \geq 0$, *on a* $(X_{t_1+s}, \dots, X_{t_p+s}) \stackrel{L}{=} (X_{t_1}, \dots, X_{t_p})$.
- *Le processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit à* ***accroissements stationnaires*** *si la loi des accroissements* $X_{t+s} - X_t$ *ne dépend pas de* $t > 0$, *i.e.* $X_{t+s} - X_t \stackrel{L}{=} X_s$.
- *Le processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit à* ***accroissements indépendants*** *si pour tout* $p \geq 1$ *et* $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p$, *les variables aléatoires* X_{t_1}, $X_{t_2} - X_{t_1}$, $\dots, X_{t_p} - X_{t_{p-1}}$ *sont indépendantes.*

Exemple 2.1.1.

- ***Processus de Bernoulli*** *: soit* $p \in [0, 1]$ *et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribués (iid) et telles que*

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = p - 1 \,et\, \mathbb{P}(X_1 = 1) = p.$$

Le processus $\{S_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ *défini par* $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *est appellé processus de Bernoulli de paramètre* p. *La loi de* S_n *est la loi binomiale de paramètres* n *et* p.
- ***Marche aléatoire*** *: Soit* $\mathrm{T} = \mathbb{N}$ *et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes. On considère* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *le processus discret des sommes partielles. On parle alors de marche aléatoire.* $(S_n)_{n\geq 1}$ *est un processus à accroissements indépendants. Si en plus les variables* X_n, $n \geq 1$ *sont iid, le processus* $(S_n)_{n\geq 1}$ *est à accroissements indépendants et stationnaires.*

2.1.1 Processus gaussiens

Définition 2.1.4.

Un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathrm{T}}$ *est dit gaussien si pour tout* $n \geq 1$ *et tout* $n-$*uplet d'instants* $(t_1, \dots, t_n) \in \mathrm{T}^n$, *le vecteur aléatoire* $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ *est un vecteur gaussien. Autrement dit, le processus stochastique* $(X_t)_{t\in\mathrm{T}}$ *est gaussien si et seulement si toute combinaison linéaire de ses composantes (marginales) suit une loi gaussienne (pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$, $t_1, \dots, t_p \in \mathrm{T}$ *et* $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 X_{t_1} + \cdots + \alpha_p X_{t_p}$ *est gaussienne).*

Remarque 2.1.1.

- *Toutes les marginales d'un processus gaussien sont gaussiennes.*
- *La loi d'un processus gaussien est connue (caractérisée) dés qu'on se donne la fonction moyenne* $m(t) = \mathbb{E}[X_t]$ *et l'opérateur de covariance* $K(s, t) = Cov(X_s, X_t)$

Définition 2.1.5.

La fonction d'espérance d'un processus gaussien $(X_t)_{t\in\mathrm{T}}$ *est la fonction* m *définie par :*

$$\begin{aligned} m : \mathrm{T} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto m(t) = \mathbb{E}(X_t), \text{ pour tout } t \in \mathrm{T}. \end{aligned}$$

Définition 2.1.6.

La matrice de covariance d'un processus gaussien $(X_t)_{t\in \mathrm{T}}$ *est la fonction symétrique et positive* K *définie par :*

$$\begin{aligned} K : \mathrm{T}\times\mathrm{T} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s,t) &\longmapsto K(s,t) = Cov(X_s, X_t), \;\; \text{pour tout } (s,t) \in \mathrm{T}\times\mathrm{T}. \end{aligned}$$

Théorème 2.1.1.

La donnée de la fonction d'espérance m *et de la fonction de covariance* K *suffit à caractériser un processus gaussien.*

Les exemples les plus connus des processus gaussiens sont le Bruit blanc gaussien et le mouvement Brownian.

2.2 Filtrations et Notion de temps d'arrêt

2.2.1 Filtrations

La notion de filtration permet de décrire la structure de l'information et de sa dynamique dans le temps de manière précise.

Définition 2.2.1.

On appelle filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathrm{T}}$, *une famille croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$, *i.e.*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F},$$

pour tout $s, t \in \mathrm{T}$ *et tels que* $s \leq t$.

Remarque 2.2.1.

Pour chaque $t \in \mathrm{T}$, *la sous-tribu* $\mathcal{F}_t$ *représente l'information disponible à la date* t *et la croissance de la famille* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathrm{T}}$ *traduit l'idée que l'information ne peut que s'accumuler au fil du temps, et qu'il n'y a pas de possibilté de séparer les informations passées du présent.*

Définition 2.2.2.

Un processus $(X_t)_{t\in\mathrm{T}}$ *est dit* $\mathcal{F}-$*"**adapté**" si,* $\forall t \in \mathrm{T}$, $X_t \in \mathcal{F}_t$ *(*X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable).*

Proposition 2.2.1.

Si X *est* $\mathcal{F}-$ *adapté, la v.a* X_s *est* $\mathcal{F}_t-$ *mesurable pour tout* $s \in [0,t]$ *et tout* $t \in \mathrm{T}$.

Définition 2.2.3.

1 *Si* $\mathrm{T} = \mathbb{N}$. *Un processus adapté* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dit prévisible si, pour* $n \geq 1$, X_n *est* $\mathcal{F}_{n-1}-$*mesurable.*

2 *Si* $\mathrm{T} = \mathbb{R}_+$. *Un processus adapté* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit prévisible si,* $(X_t)_{t\geq 0}$ *considéré comme une application de* $\Omega \times \mathbb{R}_+$, *est mesurable par rapport à la tribu (dite prévisible) engendrée par tous les processus adaptés continus à gauche(càg).*

Définition 2.2.4.

On dit que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ *est progréssivement mesurable (progressif) si* $\forall t \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{array}{rcl} X : ([0,t]\times\Omega, \mathcal{B}_{[0,t]}\otimes\mathcal{F}) & \longrightarrow & (F,\mathcal{B}) \\ (s,\omega) & \longmapsto & X_s(\omega) \end{array}$$

est $(\mathcal{B}_{[0,t]}\otimes\mathcal{F}_t)-$*mesurable.*

Exemple 2.2.1. ***(Filtration naturelle de X)***

La filtration engendrée par le processus $X = (X_t)_{t\in\mathrm{T}}$ *est la suite croissante de sous-tribus :*

$$\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s,\, s\leq t), t\in\mathrm{T},$$

est la plus petite filtration de $\mathcal{F}$ *qui rend* X *adapté.*

Une tribu est dite complète lorsqu'elle contient l'ensemble des négligeables $\mathcal{N}$ de $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ définit par :

$$\mathcal{N} = \{N\subset\Omega, \exists A\subset\mathcal{F}|N\subset A, \mathbb{P}(A)=0\}.$$

2.2.2 Temps d'arrêt

Dans toute la suite, on pose $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{n\geq 0}\mathcal{F}_n)$.

Définition 2.2.5.

Une variable aléatoire τ, *à valeurs dans* $\{0,1,\ldots,N\}$ *est un temps d'arrêt (de la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$*) si, pour tout* $n\in\{0,1,\ldots,N\}$ *:*

$$\{\tau = n\}\in\mathcal{F}_n.$$

Remarque 2.2.2.

On pourra vérifier, dans (i) que τ *est encore un temps d'arrêt si et seulement si, pour tout* $n\in\{0,1,\ldots,N\}$ *:*

$$\{\tau\leq n\}\in\mathcal{F}_n.$$

Cette définition équivalente du temps d'arrêt est celle qui ce généralise au temps continu.

Exemple 2.2.2.

1. $\tau = C$, $C\in\mathbb{R}$ *est un temps d'arrêt car*

$$\{\tau_A\leq n\} = \{C\leq n\} = \left\{\begin{array}{ll} \Omega\in\mathcal{F}_n & si\ C\leq n \\ \emptyset\in\mathcal{F}_n & si\ C>n. \end{array}\right.$$

2. *Soient* $X=(X_n)_{n\geq 0}$ *un processus aléatoire adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *à valeurs dans* $(F,\mathcal{B})$ *et* $A\in\mathcal{B}$. *On pose*

$$\tau_A(\omega) = \inf\{n\geq 0; X_n(\omega)\in A\},$$

avec la convention $\inf\emptyset = +\infty$, τ_A *est un temps d'arrêt car*

$$\{\tau_A = n\} = \{X_0\notin A, X_1\notin A, \ldots, X_{n-1}\notin A, X_n\in A\}\in\mathcal{F}_n;$$

τ_A *s'appelle le temps d'entrée dans* A.

Définition 2.2.6.
On appelle tribu des événements antérieurs à τ, qu'on note $\mathcal{F}_\tau$, la tribu

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty ;\ pour\ tout\ n \geq 0, A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

Remarque 2.2.3.

1. *On peut remplacer $A \cap \{\tau \leq n\}$ par $A \cap \{\tau = n\}$, puisque*

$$\{\tau \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{\tau = k\},\ \{\tau = n\} = \{\tau \leq n\} \setminus \{\tau \leq n-1\}.$$

2. *Il est facile de vérifier à titre d'exercice que $\mathcal{F}_\tau$ est une tribu sur Ω et que si $\tau = n$, alors $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_n$, si $\tau = +\infty$ alors $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{+\infty}$.*

2.3 Notions de Martingales

L'origine du mot martingale est la stratégie que cherchent les joueurs pour gagner.

2.3.1 Cas discret $\mathrm{T} = \mathbb{N}$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré (muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_n$) et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus $\mathcal{F}_n-$adapté.

Définition 2.3.1.
Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dit :
- ***Martingale*** *si seulement si $\mathbb{E}(|X_n|) < +\infty$ et $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ $\mathbb{P}.p.s, \forall n \in \mathbb{N}$.*
- ***Sous-martingale*** *si seulement si $\mathbb{E}(X_n^+) < +\infty$ et $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n$ $\mathbb{P}.p.s, \forall n \in \mathbb{N}$.*
- ***Sur-martingale*** *si seulement si $\mathbb{E}(X_n^-) + \infty$ et $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$ $\mathbb{P}.p.s, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Exemple 2.3.1. *(Exemple d'un jeu)*
Un joueur joue à un jeu (pile ou face, roulette,...). A chaque coup, il peut perdre avec une probabilité $p > 0$ ou gagner avec $q > 0\,(p + q = 1)$. Pour une mise de 1 DA, le gain reçu est de α DA. Soit X_n la v.a :

$$X_n = \begin{cases} 1 & s'il\ gagne\ le\ n\text{-}ième\ coup \\ 0 & s'il\ le\ perdre. \end{cases}$$

Les (X_n) sont indépendantes. Supposons que le joueur mis à tous les coups
Si Y_n : est le gain que lui apporte le n-ième coup,

$$Y_n = \begin{cases} \alpha & avec\ une\ probabilité\ q \\ \text{-1} & avec\ une\ probabilité\ p. \end{cases}$$

Donc, $Y_n = \alpha \cdot \mathbf{1}_{(X_n=1)} - \mathbf{1}_{(X_n=0)}$, *si* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ *est l'historique du jeu jusqu'au n-ième coup, alors* $Y_{n+1} \amalg \mathcal{F}_n$; $Y_n \amalg \mathcal{F}_{n-1}$.

$$\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(Y_n) = \alpha \cdot \mathbb{P}(X_n = 1) - 1 \cdot \mathbb{P}(X_n = 0) = \alpha \cdot p - q.$$

Soit G_n *: le gain total de joueur au n-ième coup,*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(G_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(G_{n-1} + Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \mathbb{E}(G_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= G_{n-1} + \mathbb{E}(Y_n).\end{aligned}$$

(G_{n-1} *est* $\mathcal{F}_{n-1} -$ *mesurable* $\Rightarrow \mathbb{E}(G_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = G_{n-1}$).

1. *Si* $\mathbb{E}(Y_n) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}(G_n|\mathcal{F}_{n-1}) = G_{n-1}$ *(Jeu équitable : martingale).*
2. *Si* $\mathbb{E}(Y_n) > 0 \Rightarrow \mathbb{E}(G_n|\mathcal{F}_{n-1}) \geq G_{n-1}$ *(Jeu favorable : sous-martingale).*
3. *Si* $\mathbb{E}(Y_n) < 0 \Rightarrow \mathbb{E}(G_n|\mathcal{F}_{n-1}) \leq G_{n-1}$ *(Jeu défavorable : sur-martingale)*

Propriétés 2.3.1.

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une martingale si et seulement si* $\mathbb{E}(X_{n+j}|\mathcal{F}_n) = X_n \ \forall j \geq 0$.
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une martingale, alors* $\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$.
- *La somme de deux martingales est une martingale.*
- *On a des propriétés analogues pour les sous-martingales et les sur-martingales.*

Propriété supplémentaire *(Inégalité de Jensen pour les martingales)*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une martingale (resp. sous-martingale),* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe (resp. convexe* $\nearrow$*) tel que* $(\varphi(X_n))^+$ *est intégrable, alors* $(\varphi(X_n))_n$ *est une sous-martingale.*

Une autre formulation de la propriété de martingale

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une filtration et* (X_n) *un processus tel que* X_n *est* $\mathcal{F}_n-$*mesurable. Alors*

$$X_n \text{ est une martingale si et seulement si } \mathbb{E}(\Delta X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0,$$

où $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$. *On laisse la vérification aux étudiants, pour s'entraîner.*

2.3.2 Transformé de Martingale

Proposition 2.3.1.
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ *une martingale et soit* $(H_n)_{n\geq 0}$ *un processus prévisible par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. *On pose* $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$. *La suite* $(X_n)_{n\geq 0}$ *définie par :*

$$\begin{aligned}Y_0 &= H_0 X_0 \\ Y_n &= H_0 X_0 + H_1 \Delta X_1 + \cdots + H_n \Delta X_n \, pour \, n \geq 1\end{aligned}$$

est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, *appelée transformée de la martingale* (X_n) *par la suite* (H_n).

Démonstration 2.3.1.

Il est clair que (Y_n) *est adappté. De plus pour* $n \geq 0$*, on a :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{n+1} - Y_n|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(H_{n+1}(Y_{n+1} - Y_n)|\mathcal{F}_n) \\ &= H_{n+1}\mathbb{E}(Y_{n+1} - Y_n|\mathcal{F}_n) \; car \, H_{n+1} \; est \; \mathcal{F}_n - mesurable \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où :

$\mathbb{E}(Y_{n+1} - Y_n|\mathcal{F}_n) = 0.$ ■

Proposition 2.3.2.

Une suite adapté de variable aléatoire réelles (X_n) *est une martingale si et seulement si pour toute suite prévisible* (H_n)*, on a :*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta X_n\right) = 0.$$

Démonstration 2.3.2.

Si (X_n) *est une martingale, il en est de même, par la proposition (2.3.1), de la suite* (Y_n) *définie par :* $Y_0 = 0$ *et, pour* $n \geq 1$, $Y_n = \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta X_n$*, pour toute suite prévisible* (H_n)*. On a donc* $\mathbb{E}(Y_N) = \mathbb{E}(Y_0) = 0$*. Réciproquement, On remarque que si* $j \in \{1, \ldots, N\}$*, à tout événement* $A \, \mathcal{F}_j -$*mesurable, on peut associer la suite* (H_n) *définie par :*

$$H_n = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq j+1 \\ \mathbf{1}_A & si \quad n = j+1. \end{cases}$$

Il est clair que la suite (H_n) *est prévisible et l'égalité* $\mathbb{E}(\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta X_n) = 0$ *donne :*

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A(X_{j+1} - X_j)) = 0$$

et par conséquent $\mathbb{E}(X_{j+1}|\mathcal{F}_j) = X_j$*.* ■

Décomposition des surmartingales

La décomposition suivante connue classiquement sous le nom " Décomposition de Doob" permet, dans les modèles de marchés viables et complets étudiés dans les chapitres 3 et 5, d'associer à toute surmartingale une stratégie de gestion dans laquelle la consommation est autorisée.

Proposition 2.3.3.

Toute surmartingale $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$ *peut s'écrire de façon unique de la forme :*

$$Y_n = X_n - A_n$$

où (X_n) *est une martingale et* (A_n) *un processus croissant, prévisible, nul en 0.*

Démonstration 2.3.3.

Pour $n = 0$, il est clair que le seul choix possible est $Y_0 = X_0$ avec $A_0 = 0$. On doit avoir ensuite,

$$Y_{n+1} - Y_n = X_{n+1} - X_n - (A_{n+1} - A_n).$$

D'où, en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_n$ et en utilisant les propriétés de X et A

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) - Y_n = \underbrace{\mathbb{E}(M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n)}_{=0} - (A_{n+1} - A_n),$$

i.e.

$$Y_n = \mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) + (A_{n+1} - A_n).$$

Finalement

$$X_{n+1} - X_n = Y_{n+1} - \mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n).$$

(X_n) et (A_n) sont ainsi déterminés de façon unique et on voit que (X_n) est bien une martingale et que (A_n) est bien prévisible et croissant puisque (Y_n) est une surmartingale.
■

2.3.3 Martingales à temps continu

La définition suivante est une extension de celle en temps discret.

Définition 2.3.2.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration de cet espace.
Une famille $(X_t)_{t\geq 0}$ $\mathcal{F}_t-$adaptée de variables aléatoires intégrables, (i.e. vérifiant $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$ pour tout t) est :

- *une martingale si, pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ $\mathbb{P}.p.s.$*
- *une sous-martingale si, pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$ $\mathbb{P}.p.s.$*
- *une sur-martingale si, pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$ $\mathbb{P}.p.s.$*

Remarque 2.3.1.

La plupart des résultats du temps discret restent valables en temps continu.

Proposition 2.3.4.

Soit $(X_t)_{t\in[0,T]}$ une $\mathcal{F}_t-$martingale de carré intégrable (i.e. $\mathbb{E}(|X_t|^2 < \infty)$ pour tout $t \in [0,T]$), alors :

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^2|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t^2 - X_s^2|\mathcal{F}_s],$$

pour tout $s, t \in [0,T]$ tels que $s \leq t$.

Démonstration 2.3.4.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_t - X_s|^2|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[X_t^2|\mathcal{F}_s] - 2s\mathbb{E}[X_sX_t|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[_s^2|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[X_t^2|\mathcal{F}_s] - 2X_s\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] + X_s^2 \\
&= \mathbb{E}[X_t^2 - X_s^2|\mathcal{F}_s].
\end{aligned}$$

Théorème 2.3.1. ***Théorème d'arrêt***

Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale continue par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, et si τ_1, τ_2 sont deux temps d'arrêt tels que $\tau_1 \leq \tau_2 \leq K$, où K est une constante réelle finie, alors X_{τ_2} est intégrable et $\mathbb{E}(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) = X_{\tau_1}$ $\mathbb{P}$ p.s.

2.4 Le mouvement brownien

Historique

*Le nom de mouvement brownien vient du botaniste **Robert Brown** (n'a pas découvert le mouvement brownien) qui a observé en 1828 le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau. La mise en évidence du mouvement brownien comme processus stochastique est dû indépendamment au mathématicien français **Louis Bachelier** (1900). Il a obtenu la loi du mouvement brownien à un instant donné.*

*La première étude mathématique rigoureuse est faite par **N. Wiener** (1923) qui exhibe également une démonstration de l'existence du brownien. **P. Lévy** (1948) s'intéresse aux propriétés fines des trajectoires du brownien. Depuis, le mouvement brownien continue de passionner les probabilistes, aussi bien pour l'étude de ses trajectoires que pour la théorie de l'intégration stochastique (Wiener, Itô, Watanabe, Meyer, Yor, LeGall, Salminen, Durrett, Chung, Williams, Knight, Pitman,...).*

On se donne $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré (muni d'une filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_t$) du processus $(B_t)_t$.

Définition 2.4.1.

*Le processus B est **un mouvement brownien** si*

*a) $\forall s \leq t$, $B_t - B_s$ est une variable réelle de loi **gaussienne, centrée de variance** $(t-s)$.*

b) $\forall n, \forall t_i$, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$, les variables $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \ldots, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0})$ sont indépendantes.

b') Pour tout (t,s) la variable $B_{t+s} - B_t$ est indépendante de la tribu du passé avant t, soit $\mathcal{F}_t = \sigma(B_u,\ u \leq t)$.

Remarque 2.4.1.

- *Cette définition permet de caractériser la loi de la v.a B_t, qui est un résultat délicat à établir.*
- *Le mouvement brownien B est dit **standard** si $B_0 = 0$ (le mouvement brownien est issue de l'origine).*
- *La propriété a) est la stationnarité des accroissements du mouvement brownien.*
- *La propriété b) traduit que le mouvement brownien est à accroissements indépendants.*

Proposition 2.4.1.

Un mouvement brownien standard est une v.a gaussienne centrée ($\mathbb{E}(B_t) = 0$) *et de variance* $Var(B_t) = \mathbb{E}(B_t^2) = t$. *Dans ce cas la loi de* B_t *prend la forme :* $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$,

dx *: étant la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$.

Définition 2.4.2.

On appelle $\mathcal{F}_t-$*mouvement brownien, un processus stochastique à valeurs rélles et à trajectoires continues qui vérifie :*

- $\forall t \geq 0$, B_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable.*
- *Si* $s \leq t$: $B_t - B_s$ *est indépendant de la tribu* $\mathcal{F}_s$.
- *Si* $s \leq t$ *la loi* $B_t - B_s$ *est identique à celle de* $B_{t-s} - B_0$.

Remarque 2.4.2.

Un $\mathcal{F}_t-$*mouvement brownien est un mouvement brownien par rapport à sa filtration naturelle.*

Donnons des exemples de martingales que l'on peut construires à partir d'un mouvement brownien.

Proposition 2.4.2.

Si $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un* $\mathcal{F}_t-$*mouvement brownien standard, alors :*

- B_t *est une* $\mathcal{F}_t-$*martingale.*
- $B_t^2 - t$ *est une* $\mathcal{F}_t-$*martingale.*
- $\exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t)$ *est une* $\mathcal{F}_t-$*martingale.*

Démonstration 2.4.1.

- *Si* $s \leq t$ *alors* $B_t - B_s$ *est indépendante de la tribu* $\mathcal{F}_s$. *Donc*

$$\mathbb{E}(B_t - B_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s).$$

  Mais un mouvement brownien standard est centré, donc $\mathbb{E}(B_t - B_s) = 0$. *On en déduit le premier point.*

- *Pour le second point, remarquons que :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t^2 - B_s^2 | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}\left((B_t - B_s)^2 + 2B_s(B_t - B_s) | \mathcal{F}_s\right) \\ &= \mathbb{E}((B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s) + 2B_s \mathbb{E}((B_t - B_s) | \mathcal{F}_s) \end{aligned}$$

  mais comme $(B_t)_{t\geq 0}$ *est une* $\mathcal{F}_t-$*martingale* $\mathbb{E}((B_t - B_s)|\mathcal{F}_s) = 0$, *et donc :*

$$\mathbb{E}(B_t^2 - B_s^2 | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s).$$

  Le mouvement brownien est à accroissements indépendants et stationnaires ce qui permettent de déduire que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}\left(B_{t-s}^2\right) \\ &= t - s. \end{aligned}$$

  Ce dernier résultat est due au fait que B_t *est un gaussien centrée de variance* t. *D'où* $B_t^2 - t$ *est une* $\mathcal{F}_t-$*martingale.*

– *Pour le dernier point, rappelons, le résultat suivant : Si Y est un gaussienne centrée réduite, on a :*

$$\mathbb{E}(e^{\lambda Y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda y} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = e^{\frac{\lambda^2}{2}}.$$

De plus, si $s < t$:

$$\mathbb{E}(e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}} | \mathcal{F}_s) = e^{\sigma B_s - \frac{\sigma^2 t}{2}} \mathbb{E}\left(e^{\sigma(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_s\right)$$

car B_s est $\mathcal{F}_s-$mesurable, et comme $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{\sigma(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(e^{\sigma(B_t - B_s)}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{\sigma B_{t-s}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{\sigma Y \cdot \sqrt{t-s}}\right) \\ &= e^{\frac{\sigma^2 (t-s)}{2}}. \end{aligned}$$

Car $Y = \frac{B_{t-s}}{\sqrt{t-s}}$ est gaussienne centrée réduite. D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}} | \mathcal{F}_s) &= e^{\sigma B_s - \frac{\sigma^2 t}{2}} \cdot e^{\frac{\sigma^2 (t-s)}{2}} \\ &= e^{\sigma B_s - \frac{\sigma^2 s}{2}}. \end{aligned}$$

Généralisation

Si B est un mouvement brownien standard, le processus Z défini par $Z_t = x + B_t$ est un mouvement brownien issue de x.
On dit qu'un processus X est un mouvement brownien de ***drift*** *μ et de* ***coefficient de diffusion*** *σ si :*

$$X_t = x + \mu t + \sigma B_t$$

où B est un mouvement brownien. La v.a. X_t est une v.a. gaussienne d'espérance $x + \mu t$ et de variance $\sigma^2 t$.

Proposition 2.4.3.

Si $(B_t)_{t \geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t-$mouvement brownien, alors
– *Le processus $\widehat{B}$ défini par $\widehat{B}_t = -B_t$ est un mouvement brownien.*
– *Le processus $\widetilde{B}$ défini par $\widetilde{B}_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ est un mouvement brownien.*
– *Le processus $\overline{B}$ défini par $\overline{B}_t = t B_{\frac{1}{t}}$, $\forall t \geq 0$, $\overline{B}_0 = 0$ est un mouvement brownien.*

Théorème 2.4.1.

Un processus X est un mouvement brownien si est seulement si c'est un processus gaussien continu centré de fonction de covariance donnée par

$$Cov(X_s, X_t) = s \wedge t, pour\ s, t \in [0, T].$$

Démonstration 2.4.2.

Pour $t_1 \leq t_2 \leq \ldots\ldots t_n$*, le vecteur* $(B_{t_1}, B_{t_2}-B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}-B_{t_{n-1}})$ *est composé de v.a. gaussiennes indépendantes, donc il est gaussien et toute combinaison linéaire des* B_{t_i} *qui se réécrit comme combinaison linéaire de ces v.a. et est gaussienne. Par conséquent, le processus* B *est gaussien. Il est continu par hypothèse, centré car* $\mathbb{E}[B_t] = \mathbb{E}[B_t - B_0] = 0$ *et de fonction de covariance, pour* $s \leq t$ *:*

$$\begin{aligned} Cov(B_t, B_s) &= \mathbb{E}[B_s B_t] = \mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)] + \mathbb{E}[B_s^2] \\ &= B_s \mathbb{E}[B_t - B_s] + Var[B_s - B_0] \\ &= 0 + s = s. \end{aligned}$$

Réciproquement, on va montrer les propriétés de la définition du mouvement brownien

- $\mathbb{E}[B_0^2] = Var[B_0] = 0$ *donc* $B_0 = 0 p.s.$
- B *est continu par hypothèse.*
- *Prenons* $t_1 \leq t_2 \leq t_n \leq s \leq t$*, le vecteur* $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n}, B_t - B_s)$ *est gaussien, or* $Cov(B_t - B_s, B_{t_i}) = t_i \wedge s - t_i \wedge t = 0$*, donc* $B_t - B_s$ *est indépendant de tout vecteur* $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n})$ *et donc de* $\mathcal{F}_s = \sigma(B_{t_i},\, t_i \leq s)$*.*
- *Pour* $s \leq t$*,* $B_t - B_s$ *est gaussienne et est donc déterminée par son espérance* $\mathbb{E}[B_t - B_s] = 0$ *et sa variance :*

$$\begin{aligned} Var[B_t - B_s] &= Var[B_t] + Var[B_s] - 2Cov(B_t, B_s) \\ &= t + s - 2t \wedge s \\ &= t - s. \end{aligned}$$

  Donc, $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ *et, la loi de* $B_t - B_s$ *ne dépendant que de* $t - s$*, les accroissements sont stationnaires.*

2.5 Changement de probabilité. Théorème de représentation des martingales

2.5.1 Probabilités équivalentes

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité. Une probabilité* $\mathbb{Q}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est dite absolument continue par rapport à* $\mathbb{P}$ *si :*

$$\forall A \in \mathcal{F}\ \mathbb{P}(A) = 0 \Longrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0.$$

Théorème 2.5.1.

$\mathbb{Q}$ *est absolument continue par rapport à* $\mathbb{P}$ *si, et seulement si, il existe une variable aléatoire* Z *à valeurs positives ou nulles sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *telle que :*

$$\forall A \in \mathcal{F} :\ \mathbb{Q}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Z *est appelée densité de* $\mathbb{Q}$ *par rapport à* $\mathbb{P}$ *notée parfois* $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$*.*

L'équivalence à démontrer est évidente dans un sens, la réciproque est une version du théorème de Radon-Nikodyn.

Les probabilités $\mathbb{P}$ *et* $\mathbb{Q}$ *sont dites équivalentes si chacune d'elles est absolument continue par rapport à l'autre. Noter que si* $\mathbb{Q}$ *est absolument continue par rapport à* $\mathbb{P}$, *de densité* Z, *alors* $\mathbb{P}$ *et* $\mathbb{Q}$ *sont équivalentes si et seulement si* $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$.

2.5.2 Théorème de Girsanov

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ *une base stochastique de filtration la filtration naturelle du mouvement brownien standard* $(B_t)_{0\leq t\leq T}$, *indexé par l'intervalle de temps* $[0, T]$. *Le théorème suivant, que nous admettrons, est connu sous le nom de théorème de Girsanov (pour plus de détails, voir [16]).*

Théorème 2.5.2.

Soit $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus adapté vérifiant* $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ *p.s. et tel que le processus* $(L_t)_{0\leq t\leq T}$ *défini par :*

$$L_t = \exp\left(-\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right)$$

soit une $\mathcal{F}_t-$*martingale. Alors il existe une probabilité* $\mathbb{P}^{(L)}$ *de densité* L_T *équivalente à* $\mathbb{P}$ *sous laquelle le processus* $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ *définit par :* $W_t = B_t + \int_0^T \theta_s ds$ *est un* $\mathcal{F}_t-$*mouvement brownien standard.*

Remarque 2.5.1.

Une condition suffisante pour que le processus $(L_t)_{0\leq t\leq T}$ *soit une martingale est que l'on ait :* $\mathbb{E}(\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds)) < \infty$ *[16].*

2.5.3 Théorème de représentation des martingales browniennes

Soit $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ *un mouvement brownien standard construit sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et soit* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ *sa filtration naturelle. D'après la proposition (4.2.3) du chapitre 4, si* $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *est un processus adapté tel que* $\mathbb{E}(\int_0^T H_t^2 dt) < \infty$, *le processus* $(\int_0^t H_s dB_s)$ *est une martingale de carré intégrable, nulle en 0. Le théorème suivant montre que toutes martingales browbienne peuvent se représenter à l'aide d'une intégrale stochastique.*

Théorème 2.5.3.

Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *une martingale de carré intégrable, par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. *Il existe un processus adapté* $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *tel que* $\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 ds) < \infty$ *et*

$$\forall t \in [0,T] \;\; X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s \, p.s. \tag{2.1}$$

Remarque 2.5.2.

Noter que cette représentation n'est possible que pour les martingales browniennes (de la filtration naturelle du mouvement brownien).

Il résulte du théorème que si Y *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_T-$*mesurable de carré intégrable, on peut l'écrire sous la forme :*

$$Y = \mathbb{E}(Y) + \int_0^T H_s dB_s \, p.s.$$

où (H_t) *est un processus adapté tel que* $\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 ds) < \infty$. *Il suffit pour cela de considérer la martingale* $X_t = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t)$. *On démontre que si* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *est une martingale (non nécessairement de carré intégrable) il existe une représentation de type (2.1) mais avec un processus vérifiant seulement* $\int_0^T H_s^2 ds < \infty$ *p.s. (voir [?, KS88]*

2.6 Exercices

Exercice 1 :

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré,* τ *et* ν *deux temps d'arrêt de la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, $\mathcal{F}_\tau$ *(resp.* $\mathcal{F}_\nu$*) la tribu des événements antérieurs à* τ *(resp.* ν*). Montrer les propriétés suivantes :*

i) $\tau \wedge \nu$, $\tau \vee \nu$, $\tau + \nu$ *sont des temps d'arrêts pour la même filtration.*

ii) Si $\tau \leq \nu$, *alors* $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\nu$.

iii) $\mathcal{F}_{\tau\wedge\nu} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\nu$.

iv) $\{\tau < \nu\}$ *et* $\{\tau = \nu\}$ *appartiennent à* $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\nu$.

Exercice 2 :

- *Soit* $Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *(intégrable sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*). On défint la suite* (X_n) *par* $X_n = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)$.
- $X_1, \ldots, X_n$ *une famille de v.a sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $X_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \, \forall n \in \mathbb{N}$, *centrée et indépendantes 2 à 2. On pose* $S_i = X_1 + \cdots + X_i$.

Montrer que $(X_n)_n$ *et* $(S_n)_n$ *sont des martingales.*

Exercice 3 :

Soit $(X_n; n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires i.i.d (indépendantes et de même loi). on note $m = \mathbb{E}(X_1) < +\infty$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ et $Y_n = \sum_{i=1}^{n} iX_i - \frac{n(n+1)}{2}m$.

- *Calculer $\mathbb{E}(Y_{n+1} \backslash \mathcal{F}_n)$.*
- *Que peut-on dire du processus $(Y_n)_{n\geq 1}$?.*

Exercice 4 : *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. à valeurs $[0,1]$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. On suppose que $X_0 = a \in [0,1]$ et que*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} | \mathcal{F}_n) = 1 - X_n, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2} | \mathcal{F}_n) = X_n.$$

1) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

2) Montrer que

$$\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2) = \frac{1}{4}\mathbb{E}(X_n(1 - X_n)).$$

Exercice 5 :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré sur lequel on considère une martingale réelle $(M_n)_{n\geq 0}$ telle que, pour tout $n \geq 0$, $|M_n| \leq K$. On pose

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(M_k - M_{k-1})$$

Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}-$martingale.

Exercice 6 :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré sur lequel on considère deux martingales $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ de carré intégrable (éventuellement identiques).

1. *Montrer que, pour $m \leq n$, on a $\mathbb{E}(X_m Y_n | \mathcal{F}_m) = X_m Y_m$ p.s.*
2. *Montrer que $\mathbb{E}(X_n Y_n) - \mathbb{E}(X_0 Y_0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1}))$.*
3. *Montrer que $Var(X_n) = Var(X_0) + \sum_{k=1}^{n} Var(X_k - X_{k-1})$.*
4. *Montrer que les v.a. $X_0, X_k - X_{k-1}$, $k \geq 1$ sont deux à deux orthogonales dans L^2.*

Exercice 7 :

Soit $(B_t, t \geq 0)$ *un mouvement brownien réel issu de* 0 *et on note* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *sa filtration naturelle.*

1. *Calculer pour tout couple* (s,t) *les quantitées* $\mathbb{E}(B_s B_t^2)$, $\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s)$ *et pour* $t \geq s$ $\mathbb{E}(B_t|B_s)$.
2. *Calculer* $\mathbb{E}(B_t^2 B_s^2)$ *sachant que pour une v.a. gaussienne centrée* Z *de variance* σ^2, *on a* $\mathbb{E}(Z^4) = 3\sigma^4$.
3. *Quelle est la loi de* $B_t + B_s$?.
4. *Soit* θ_s *une v.a. bornée* $\mathcal{F}_s-$*mesurable.*
   Calculer pour tout $t \geq s$, $\mathbb{E}[\theta_s(B_t - B_s)]$ *et* $\mathbb{E}[\theta_s(B_t - B_s)^2]$.

Exercice 8 :

Montrer qu'un processus X *est un mouvement Brownien si et seulement si*

a) Pour tout $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, *le vecteur* $(X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ *est un vecteur gaussien centré.*

b) $\mathbb{E}(X_t X_s) = s \wedge t$.

c) $X_0 = 0$.

Exercice 9 :

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien standard réel et on note* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *sa filtration naturelle. Parmi les processus suivants, quels sont ceux qui sont des martingales.*

1. $M_t = B_t^3 - 3\int_0^t B_s ds$.
2. $Z_t = B_t^3 - 3tB_t$.
3. $X_t = tB_t - \int_0^t B_s ds$.
4. $U_t = \sin B_t - \int_0^t B_s(\cos s) ds$.
5. $V_t = \sin B_t + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(B_s) ds$.
6. $Y_t = t^2 B_t - 2\int_0^t B_s ds$.

Chapitre 3

Modèles à temps discret : modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Dans ce chapitre on présente les principales idées de la théorie des options dans le cadre mathématique associé aux modèles à temps discret. à la fin de ce chapitre on décrit le modèle de Cox-Ross-Rubinstein sous forme d'un problème résolut [7].

3.1 Formalisme de modèle discret

3.1.1 Les actifs financiers

Le modèle de Marché financier discret est construit sur un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *muni d'une filtration* $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$, $\mathcal{F}_n$ *: représente l'information disponible à l'instant* n. *Dans la pratique, l'horizon* N *représente la date d'échéance des options.*

On supposera dans la suite que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_N = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ *et* $\forall \omega \in \Omega\, \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$.

On suppose qu'il y a sur le marché $d+1$ *actifs financiers, dont les prix à l'instant* n *sont données par les variables aléatoires* $S_n^0, S_n^1, \ldots, S_n^d$ *à valeurs strictement positives, mesurables par rapport à la tribu* $\mathcal{F}_n$ *(les investisseurs ont connaissance des cours actuels et passés, mais pas des cours futurs).*

- $S_n = (S_n^0, S_n^1, \ldots, S_n^d)$ *est le vecteur des prix à l'instant* n.
- S^0 *est l'actif sans risque (les placements dans les banques) et on pose* $S_0^0 = 1$.
- *Si le taux d'intérêt des placements sans risque est constant et égale à* r *on aura* $S_n^0 = (1+r)S_{n-1}^0 = (1+r)^n$.
- $\gamma_n = \frac{1}{S_n^0}$ *est le facteur d'actualisation.*

3.1.2 La stratégie financière

Définition 3.1.1.

Une stratégie financière est définie par le processus discret $\phi = ((\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0 \le n \le N}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^{d+1}$, *dont les composantes* $\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d$ *sont les quantités des divers actifs détenues en portefeuille à l'instant* n. *On impose au processus* ϕ *d'être prévisible au sens suivant :*

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, d\} \begin{cases} \phi_i^0 \text{ est } \mathcal{F}_0 \text{ mesurable} \\ \text{et, pour } n \ge 1 : \\ \phi_n^i \text{ est } \mathcal{F}_{n-1} \text{ mesurable.} \end{cases}$$

La segnification de cette hypothèse est que le portefeuille à la date n, $(\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d)$ *est constitué au vu des informations disponibles à la date* $n-1$ *et conservé tel quel au moment de cotations à la date* n.

La valeur du portefeuille à l'instant n *est donnée par le produit scalaire :*

$$\begin{aligned} V_n(\phi) &= \phi_n \cdot S_n = \sum_{i=1}^{d} \phi_n^i \cdot S_n^i \\ &= \phi_n^0 \cdot S_n^0 + (\phi_n^1 \cdot S_n^1 + \dots + \phi_n^d \cdot S_n^d), \end{aligned}$$

la valeur actualisé du portefeuille est :

$$\widetilde{V}_n(\phi) = \gamma_n \cdot V_n(\phi) = \phi_n \cdot \widetilde{S}_n \text{ où } \widetilde{S}_n = (1, \gamma_n S_n^1, \dots, \gamma_n S_n^d),$$

$\widetilde{S}_n$ *: est le processus des prix actualisés.*

3.1.3 Stratégie autofinancée

La stratégie financière ϕ *est autofinancée si :*

$$\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n, \forall n \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

cette égalité s'interprète de la façon suivante : à l'instant n, *après avoir pris connaissance des cours* $S_n^0, \dots, S_n^d$, *l'investisseur réajuste son portefeuille pour le faire passer de la composition* ϕ_n *à la composition* ϕ_{n+1}, *le réajustement se faisant aux cours de la date* n *en réinvestissant la valeur totale du portefeuille avec ni apports, ni retraits de fonds (il n'y a pas de consommation).*

Remarque 3.1.1.

La relation $\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$ *est équivalente à*

$$\phi_{n+1} \cdot (S_{n+1} - S_n) = \phi_{n+1} \cdot S_{n+1} - \phi_n \cdot S_n,$$

i.e à

$$\phi_{n+1} \cdot (S_{n+1} - S_n) = V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \Delta V_n(\phi).$$

A l'instant $n+1$*, la valeur du portefeuille est* $V_{n+1}(\phi) = \phi_{n+1}.S_{n+1}$ *et la différence* $\phi_{n+1}.(S_{n+1} - S_n) = \Delta V_n(\phi)$ *représente le gain net dû à la variation des cours entre les dates* n *et* $n+1$*. Une stratégie autofinancée est donc une stratégie pour laquelle les variations de valeur du portefeuille viennet uniquement des gains dûs à l'agitation des cours.*

La proposition suivante prouve cette remarque en termes de quantités actualisées.

Proposition 3.1.1.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) La stratégie ϕ *est autofinancée.*

ii) Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$,

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \cdot \Delta S_j,$$

où $\Delta S_j = S_j - S_{j-1}$.

iii) Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$,

$$\widetilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \cdot \Delta \widetilde{S}_j,$$

où $\Delta \widetilde{S}_j = \gamma_j S_j - \gamma_{j-1} S_{j-1}$.

Démonstration 3.1.1.

L'équivalence entre i) et ii) vient de la remarque (3.1.1) et l'équivalence entre i) et iii) s'obtient en remarquant que $\phi_n.S_n = \phi_{n+1}.S_n$ *si et seulement si* $\phi_n.\widetilde{S}_n = \phi_{n+1}.\widetilde{S}_n$. ■

Cette proposition montre que, pour une stratégie autofinancée, la valeur actualisée du portefeuille est complétement déterminée par la richesse initiale V_0 *et le processus* $(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_{0 \le n \le N}$ *des quantités d'actifs risqués détenues en portefeuille.*

Proposition 3.1.2.

Pour tout processus prévisible $\big((\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)\big)_{0 \le n \le N}$ *et pour toute variable* V_0 $\mathcal{F}_0-$*mesurable, il existe un et un seul processus prévisible* $(\phi_n^0)_{0 \le n \le N}$ *tel que la statégie* $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^d)$ *soit autofinancée et de valeur initiale* V_0.

Démonstration 3.1.2.

La condition d'autofinancement :

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}_n &= \phi_n^0 + \phi_n^1.\widetilde{S}_n^1 + \cdots \phi_n^d.\widetilde{S}_n^d \\
&= V_0 + \sum_{j=1}^{n} (\phi_j^1 \Delta \widetilde{S}_j^1 + \cdots + \phi_j^d \Delta \widetilde{S}_j^d).
\end{aligned}$$

Ce qui détermine ϕ_n^0*. Il rest à vérifier que* ϕ^0 *est prévisible, qui se déduit à partir de l'égalité*

$$\phi_n^0 = V_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (\phi_j^1 \Delta \widetilde{S}_j^1 + \cdots + \phi_j^d \Delta \widetilde{S}_j^d) + (\phi_n^1(-\widetilde{S}_{n-1}^1) + \cdots + \phi_n^d(-\widetilde{S}_{n-1}^d)).$$ ■

3.2 Stratégie admissible et arbitrage

Nous n'avons pas imposé de condition sur le signe de la quantité $(\phi_n^i)_{0\leq i\leq d}$. *Si* $\phi_n^0 < 0$, *cela signifie qu'on a emprunté la quantité* $|\phi_n^0|$ *sur le marché des placements sans risques. Si* $\phi_n^d \leq 0$ *pour un* $i \geq 1$, *cela signifie qu'on a des dettes libellées en actifs risqués (par suite de ventes à découvert). Donc les emprunts et les ventes à découvert sont permis, mais nous imposerons à la valeur du portefeuille d'être positive ou nulle à tout moment.*

Définition 3.2.1.
Une stratégie ϕ *est dite admissible si elle s'auto-finance et si la valeur du portefeuille* $V_n(\phi) \geq 0 \ \forall n \in \{0, 1, \ldots, N\}$.

L'investisseur doit être donc en mesure de rembourser ses emprunts à tout moment. Donnons maintenant une formulation à la notion d'arbitrage (réalisation d'un gain sans prendre de risque).

Définition 3.2.2.
Une stratégie d'arbitrage est une stratégie financière admissible de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle.

La plupart des modèles financiers excluent toute possibilité d'arbitrage, l'objet de la section suivante est de donner une caractérisation de ces modèles grâce à la notion de martingale.

Relation entre martingales et arbitrages

Afin d'examiner la relation entre martingales et arbitrage, nous renvoyons le lecteur au chapitre 2 pour analyser le concept de martingales sur un espace de probabilité fini, où l'usage de l'espérance conditionnelle et ses propriétés sont indispensables.

Dans un modèle financier, dire que le cours $(S_n^i)_{0\leq n\leq N}$ *de l'actif* i *est une martingale, revient à dire que, à tout moment* n, *la meilleure estimation (au sens des moindres carrés) que l'on puisse faire de* (S_{n+1}^i), *à partir des informations disponibles à l'instant* n, *est donnée par* (S_n^i).

3.2.1 Marchés financiers viables

Revenons aux modèles de marchés fianciers à temps discret introduits à la section 1.

Définition 3.2.3.
Le marché financier est dit viable si la stratégie d'arbitrage est éliminer.

Rappellons, avant d'énoncer le théorème suivant que deux mesures de probabilité $\mathbb{P}$ *et* $\mathbb{P}^*$ *sont dites équivalentes et on note* $\mathbb{P} \sim \mathbb{P}^*$ *si et seulement si, pour tout événement* A, $\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}^*(A) = 0$. *Ici* $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ *signifie simplement que,* $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{P}^*(\{\omega\} > 0$.

Théorème 3.2.1.

Le marché est viable si, et seulement si, il existe ***une probabilité martingale*** *notée $\mathbb{P}^*$ équivalente à la probabilité initiale $\mathbb{P}$ sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.*

Démonstration 3.2.1.

1. *Supposons qu'il existe une probabilité martingale $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales. Donc pour toute stratégie autofinancée (ϕ_n) et d'après la proposition (3.1.1), on a :*

$$\widetilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \cdot \Delta\widetilde{S}_j.$$

Grâce à la proposition (2.3.1) du chapitre précédent, on en déduit que $(\widetilde{V}_n(\phi))$ est une martingale (transformée de martingale) sous $\mathbb{P}^*$. En conséquence $(\widetilde{V}_N(\phi))$ a même espérance sous $\mathbb{P}^*$ que $V_0(\phi)$:

$$\mathbb{E}^*\left(\widetilde{V}_N(\phi)\right) = \mathbb{E}^*\left(V_0(\phi)\right).$$

Si la stratégie est admissible et de valeur initiale nulle, on a donc $\mathbb{E}^*(\widetilde{V}_N(\phi)) = 0$, avec $\widetilde{V}_N(\phi) \geq 0$. D'où $\widetilde{V}_N(\phi) = 0$, puisque $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) > 0$, $\forall\omega \in \Omega$.

2. *La démonstration de la réciproque est plus délicate. Pour celà, on a besoins de la définition suivante.*

Définition 3.2.4.

Soit $\mathbb{K}$ un corps ordonné. Un sous-ensemble C d'un $K-$espace vectoriel E est ***un cône convexe*** *si $\alpha x + \beta y \in C, \forall\alpha > 0, \beta > 0$ et $\forall x, y \in C$, ce qui s'écrit de façon bref $\alpha C + \beta C \subset C$.*

Soit Γ le cône convexe des variables aléatoires positives et non nulles. Le marché est viable si et seulement si pour toute stratégie admissible ϕ on a :

$$V_0(\phi) = 0 \Rightarrow \widetilde{V}_N(\phi) \notin \Gamma.$$

a) A tout processus prévisible $(\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d)$, on associe le processus défini par :

$$\widetilde{G}_n(\phi) = \sum_{j=1}^{n} (\phi_j^1 \Delta\widetilde{S}_j^1 + \cdots + \phi_j^d \Delta\widetilde{S}_j^d).$$

C'est le processus des gains actualisés cumulés dans toute stratégie autofinancée suivant les quantités d'actifs risqués $\phi_n^1, \cdots, \phi_n^d$ détenues en portefeuille à l'instant n. D'après la proposition (3.1.2), il existe un unique processus (ϕ_n^0) tel que la stratégie $((\phi_n^0, \phi_n^1, \cdots, \phi_n^d))$ soit autofinancée et de valeur initiale nulle. $\widetilde{G}_n(\phi)$ est alors la valeur actualisée de cette stratégie à l'instant n et l'hypothèse de viabilité du marché entraîne que si $\widetilde{G}_n(\phi) \geq 0$, pour tout $n = 1, \cdots, N$, alors $\widetilde{G}_N(\phi) = 0$. Le lemme suivant montre que, même sans l'hypothèse de positivité de $\widetilde{G}_n(\phi)$, on a encore $\widetilde{G}_n(\phi) \notin \Gamma$.

Lemme 3.2.1.
Si le marché est viable, tout processus prévisible $(\phi^1, \cdots, \phi^d)$ *vérifie :*

$$\widetilde{G}_N \notin \Gamma.$$

La démonstration du lemme est laissée au lecteur à titre d'exercice.

b) L'ensemble $\mathcal{V}$ *des variables aléatoires de la forme* $\widetilde{G}_N(\phi)$, *avec* ϕ *prévisible à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$, *est un sous-espace vectoriel de l'espace* $\mathbb{R}^\Omega$ *: de toutes les variables aléatoires réelles définies sur* Ω. *D'après le lemme (3.2.1) le sous-espace* $\mathcal{V}$ *ne rencontre pas* Γ, *ni le convexe compact* K *contenu dans* Γ *définit par :*

$$K = \{X \in \Gamma | \sum_\omega X(\omega) = 1\}.$$

Théorème 3.2.2. ***(de séparation des convexes)***
Soit K *un convexe compact et soit* $\mathcal{V}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$, *disjoint de* K. *Il existe une forme linéaire* ξ *sur* $\mathbb{R}^n$, *vérifiant les deux conditions suivantes :*
i) $\forall x \in K\ \xi(x) > 0$.
ii $\forall x \in \mathcal{V}\ \xi(x) = 0$.
Le sous-espace V *est donc contenu dans un hyperplan qui ne rencontre pas* K.
Pour plus de détails sur ce théorème et sa démonstration, vous pouvez consulter l'annexe de l'ouvrage [19].
D'après ce théorème, il existe $(\lambda(\omega))_{\omega\in\Omega}$ *tel que :*
i) $\forall X \in K, \sum_\omega \lambda(\omega)X(\omega) > 0$.
ii) Pour tout ϕ *prévisible :*

$$\sum_\omega \lambda(\omega)\widetilde{G}_N(\phi)(\omega) = 0.$$

De la propriété i), on déduit que $\lambda(\omega) > 0$ *pour tout* $\omega \in \Omega$ *de sort que la probabilité* $\mathbb{P}^*$ *définie par :*

$$\mathbb{P}^*(\{\omega\}) = \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega'\in\Omega} \lambda(\omega')}$$

est équivalente à $\mathbb{P}$.
La propriété ii) signifie que, pour tout processus prévisible (ϕ_n) *à valeur dans* $\mathbb{R}^d$ *:*

$$\mathbb{E}^*\left(\sum_{j=1}^N \phi_j \Delta\widetilde{S}_j\right) = 0,$$

où $\mathbb{E}^*$ *est l'espérance sous la probabilité* $\mathbb{P}^*$. *On en déduit que pour toute indice* $i \in \{1, \cdots, d\}$ *et toute suite prévisible* ϕ_n^i, *à valeurs réelles, on a :*

$$\mathbb{E}^*\left(\sum_{j=1}^N \phi_j^i \Delta\widetilde{S}_j^i\right) = 0,$$

ce qui entraîne, grâce à la proposition (2.3.2) que, sous $\mathbb{P}^*$, *les prix actualisés* $(\widetilde{S}_n^1), \cdots, (\widetilde{S}_n^d)$ *sont des martingales.* ∎

3.3 Marchés complets et évaluation des options

3.3.1 Marchés complets

Actif conditionnel et simulable

Définition 3.3.1.

Un actif conditionnel d'échéance N est définit par la donnée d'une variable aléatoire $h \geq 0$, $\mathcal{F}_N-$mesurable, représentant le gain que permet l'exercice de l'option.

Exemple 3.3.1.

Pour une option d'achats (call) sur une unité d'actif 1, au prix d'exercicre K, on a $h = (S_N^1 - K)_+$ et, pour une option de vente (put) sur une unité d'actif 1 au prix d'exercice K, $h = (K - S_N^1)_+$. Dans ces deux exemples (les plus importants dans la pratique), la variable aléatoire h est une fonction de S_N seulement. Il existe des options pour lesquelles h dépend de toutes les valeurs des cours jusqu'à l'échéance : $S_0, \ldots, S_N$. c'est le cas des options dites asiatiques, dont le prix d'exercice K est égal à la moyenne des cours observés sur une période donnée, précédant l'échéance.

Définition 3.3.2.

Un actif conditionnel $h\,\mathcal{F}_N-$mesurable est simulable (ou atteignable) s'il existe une stratégie admissible dont la valeur à la date N est$h$ i.e, $V_N(\phi) = h$.

Remarque 3.3.1.

D'après ce qui précède, pour que l'actif conditionnel h soit simulable dans un marché financier viable, il suffit qu'il existe une stratégie autofinancée de valeur égale à h à la date N. En effet, si ϕ est une stratégie autofinancée, s'il exsite $\mathbb{P}^*$ une probabilité martingale équivalente à $\mathbb{P}$ (les prix actualisés sous $\mathbb{P}^*$ sont des martingales), $(\widetilde{V}_N(\phi))$ est une martingale, donc pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}\, \mathbb{E}^*(\widetilde{V}_N(\phi)|\mathcal{F}) = \widetilde{V}_n(\phi)$. Il est clair donc que $\widetilde{V}_N(\phi) \geq 0$, la stratégie ϕ est admissible.

Définition 3.3.3.

Le marché est complet s'il est viable et si tout actif conditionnel est simulable.

Le théorème suivant donne une caractérisation des marchés complets.

Théorème 3.3.1.

Un marché viable est complet, si et seulement si il existe une unique probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle les prix actualisés des actifs soient des martingales.

Démonstration 3.3.1.

1. *Supposons le marché viable et complet. Tout actif conditionnel h $\mathcal{F}_N-$mesurable et positive s'écrit $h = V_N(\phi)$ où ϕ est une stratégie admissible simulant h. Puisque ϕ est une stratégie autofinancée on a :*

$$\frac{h}{S_N^0} = \widetilde{V}_N(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{N} \phi_j . \Delta \widetilde{S}_j .$$

De plus, si $\mathbb{P}_1$ *et* $\mathbb{P}_2$ *sont deux probabilités sous lesquelles les prix actualisés sont des martingales,* $(\widetilde{V}_N(\phi))_{0\leq n\leq N}$ *est une martingale à la fois sous* $\mathbb{P}_1$ *et sous* $\mathbb{P}_2$*. D'où pour* $i = 1, 2$ *:*

$$\mathbb{E}_i(\widetilde{V}_N(\phi)) = \mathbb{E}_i(V_0(\phi)) = V_0(\phi).$$

Donc, on a :

$$\mathbb{E}_1(\frac{h}{S_N^0}) = E_2(\frac{h}{S_N^0}),$$

comme h *est arbitraire,* $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ *sur la tribu* $\mathcal{F}_N$*.*

2. *Supposons le marché viable et non complet. Alors il existe une variable aléatoire* $h \geq 0$ *non simulable. On note par* $\widetilde{\mathcal{V}}$ *l'espace des variables aléatoires de la forme*

$$W_0 + \sum_{n=0}^{N} \phi_n.\Delta\widetilde{S}_n,$$

avec W_0 $\mathcal{F}_0-$*mesurable et* $((\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d))_{0\leq n\leq N}$ *prévisible à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*. D'après la proposition (3.1.2) et la remarque (3.3.1) il résulte que la variable aléatoire* $\frac{h}{S_n^0} \notin \widetilde{\mathcal{V}}$*. Donc* $\widetilde{\mathcal{V}}$ *est un sous-espace strict de l'espace de toutes les variables aléatoires définies sur* $(\Omega, \mathcal{F})$*. Si* $\mathbb{P}^*$ *est une probabilité risque neutre équivalente à* $\mathbb{P}$ *sous laquelle les prix actualisés sont des martingales et si l'on munit l'espace des variables aléatoires du produit scalaire* $(X, Y) \mapsto \langle X, Y\rangle = \mathbb{E}^*(XY)$*, alors, il existe une variable aléatoire* X *non nulle et orthogonale au sous-espace* $\widetilde{\mathcal{V}}$*.*

Posons :

$$\mathbb{P}^{**}(\{\omega\}) = \left(1 + \frac{X(\omega)}{2 \parallel X \parallel_\infty}\right) \mathbb{P}^*(\{\omega\})$$

où $\parallel X \parallel_\infty = \sup_{\omega\in\Omega} \mid X(\omega) \mid$ *. on définit ainsi une probabilité qui est équivalente à* $\mathbb{P}$ *et distincte de* $\mathbb{P}^*$*. De plus on a :*

$$\mathbb{E}^{**}\left(\sum_{n=1}^{N} \phi_n.\Delta\widetilde{S}_n\right) = 0,$$

pour tout processus prévisible $((\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d))_{0\leq n\leq N}$*, ce qui implique par la proposition (2.3.2), que* $(\widetilde{S}_n)_{0\leq n\leq N}$ *est une* $\mathbb{P}^{**}-$*martingale.*

■

3.3.2 Evaluation et couverture des actifs conditionnels dans un marché complet

Supposons que le marché est viable et complet et on note $\mathbb{P}^*$ *l'unique probabilité risque-neutre sous laquelle les prix actualisé des actifs sont des martingales. Soit* h *l'actif conditionnel (défini par la variable* $h \geq 0$ *et* $\mathcal{F}_N-$*mesurable) et soit* ϕ *une stratégie admissible simulant* h*, alors* $V_N(\phi) = h$.

La suite $(\widetilde{V}_n)_{0\leq n\leq N}$ *est une martingale sous* $\mathbb{P}^*$ *et par conséquent,*

$$V_0(\phi) = \mathbb{E}^*(\widetilde{V}_n(\phi)),$$

d'où $V_0(\phi) = \mathbb{E}^*(\frac{h}{S_N^0})$ *et plus généralement*

$$V_n(\phi) = S_n^0 \mathbb{E}^*(\frac{h}{S_N^0}|\mathcal{F}_n), \;\; n = 0, 1, \ldots, N.$$

La valeur à chaque instant de toute stratégie admissible simulant h *est donc complètement déterminiée par* h.

Si, à l'instant 0, un investisseur vend l'option au prix $\mathbb{E}^*(\frac{h}{S_N^0})$*, il a la possibilité, en suivant une stratégie simulante* ϕ*, de restituer la richesse promise* h *à l'instant* N*; c'est à dire qu'il peut se couvrir parfaitement.*

Remarque 3.3.2.

Il est important de savoir que le calcul du prix d'une option et la stratégie de couverture que nous construisons nécessite seulement la connaissance de la probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$ *et non pas celle de la probabilité initiale* $\mathbb{P}$*, dont la seule contrainte relativement à cette dernière est d'être une probabilité équivalente à* $\mathbb{P}$*. L'étude du modèle de Cox-Ross-Rubinstein montrera comment, dans la pratique, les calculs de prix et de couverture peuvent être réalisés.*

3.4 Modèle de Cox-Ross-Rubinstein : problème corrigé

Le Modèle de Cox-Ross-Rubinstein [6] est la version discrétisée du modèle de Black-Scholes qui sera traité au chapitre 5, consiste en un actif sans risque(compte bancaire) noté S_n^0 *de taux de rendement certain* r *sur une période donnée et de cours* $S_n^0 = (1+r)^n$, $0 \leq n \leq N$*, et un actif risqué(une action) de prix* S_n, $0 \leq n \leq N$*, dont la dynamique du processus des prix* S_n *entre deux périodes consécutives est décrite par : soit* a, b *avec* $-1 < a < b$*, et pour tout* $1 \leq n \leq N$*,*

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cdot (1+a) \\ S_n \cdot (1+b). \end{cases}$$

Le cours initial $S_0 > 0$*. L'ensemble des résultats possibles est* $\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$*. chaque* $N-$*uple représentant les valeurs de* $\frac{S_{n+1}}{S_n}$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$*. Naturellement :*

$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et pour $n = 1, \ldots, N$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$ (la tribu engendrée par les variables aléatoires $S_1, \ldots, S_n$). $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité définie à une équivalence près est que $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$, $\forall \omega_i \in \Omega$.

Introduisons maintenant, les variables aléatoires $T_n = \frac{S_n}{S_{n-1}}$, pour$n = 1, \ldots, N$. Si $(\omega_1, \ldots, \omega_N)$ est un élément de Ω, on a $\mathbb{P}\{(\omega_1, \ldots, \omega_N)\} = \mathbb{P}(T_1 = \omega_1, \ldots, T_N = \omega_N)$. La connaissance de la probabilité $\mathbb{P}$ est équivaut à celle de la loi du $N-$uple $(T_1, \ldots, \mathbf{T}_n)$. Notons que, pour $n \geq 1$, $\mathrm{F}_n = \sigma(T_1, \ldots, T_n)$.

1. *Montrer que le prix actualisé $\widetilde{S}_n$ est une martingale sous $\mathbb{P}$ si et seulement si $\mathbb{E}(T_{n+1}|\mathrm{F}_n) = 1 + r$, $\forall n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$.*
2. *En déduire que, pour que le marché soit viable, il est nécessaire que $r \in]a, b[$.*
3. *Donner des exemples d'arbitrages possibles si la condition nécessaire de viabilité aboutie dans la question 2 n'est pas satisfaite.*
4. *On suppose, dans toute la suite que $r \in]a, b[$ et posons $p = (b-r)/(b-a)$. Montrer que $(\widetilde{S}_n)$ est une martingale sous $\mathbb{P}$ si et seulement si les variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_N$ sont indépendantes équidistribuées, leur loi commune étant donnée par : $\mathbb{P}(T_1 = 1 + a) = p = 1 - \mathbb{P}(T_1 = 1 + b)$. En déduire que le marché est viable et complet.*
5. *On note C_n (resp. P_n) la valeur, à l'instant n, d'un call (resp. d'un put) européen sur une unité d'actif risqué au prix d'exercice K et d'échéance N.*
   a) *Retrouver, à partir des formules de prix sous forme d'espérances conditionnelles, la relation de parité call-put suivante :*
   $$C_n - P_n = S_n - K(1+r)^{-(N-n)}.$$
   b) *Montrer que C_n peut s'écrire sous la forme : $C_n = f(n, S_n)$, où f est une fonction que l'on explicitera à l'aide de K, a, b, r et p.*
6. *Montrer que la stratégie de couverture parfaite d'un call est définie par une quantité d'actif risqué $\phi_n = \Delta(n, S_{n-1})$ à détenir à l'instant n, où Δ est une fonction que l'on exprimera à partir de la fonction f.*

Solution

1. *On a, $\dfrac{\widetilde{S}_{n+1}}{\widetilde{S}_n} = \dfrac{1}{1+r} \cdot T_{n+1}$ et la relation*
   $$\begin{aligned} \mathbb{E}(\widetilde{S}_{n+1}|\mathrm{F}_n) = \widetilde{S}_n &\iff \mathbb{E}(\frac{\widetilde{S}_{n+1}}{\widetilde{S}_n}|\mathrm{F}_n) = 1, \ (\widetilde{S}_n \, est \, \mathrm{F}_n - mesurable) \\ &\iff \mathbb{E}(T_{n+1}|\mathrm{F}_n) = 1 + r. \end{aligned}$$
2. *Si le marché est viable, d'après le théorème (3.2.1), il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$, sous laquelle $(\widetilde{S}_n)$ est une martingale. On a donc, d'après la question 1 :*
   $$\mathbb{E}^*(T_{n+1}|\mathrm{F}_n) = 1 + r$$

et par conséquent $\mathbb{E}^*(T_{n+1}) = 1+r$. *Comme* T_{n+1} *prend ses valeurs dans* $\{1+a, 1+b\}$ *avec une probabilité non nulle. Donc nécessairement, on a :* $1+r \in]1+a, 1+b[$.

3. *Supposons* $r \leq a$. *En empruntant une somme* S_0 *à l'instant* 0, *on peut acheter une unité d'actif risqué. A la date* N, *on rembourse l'emprunt et on revend l'actif risqué. Le gain réalisé* $S_N - S_0(1+r)^N$ *est toujours positif ou nul, puisque* $S_N \geq S_0(1+a)^N$, *et strictement positif avec une probabilité non nulle. Donc, on a bien un arbitrage. Pour le cas* $r \geq b$, *l'arbitrage s'obtient en vendant l'actif risqué à découvert.*

4. *Supposons que les variables aléatoires* T_i *sont indépendantes et vérifient :* $\mathbb{P}(T_i = 1+a) = p = 1 - \mathbb{P}(T_i = 1+b)$, *on a donc :*

$$\mathbb{E}(T_{n+1}|\mathrm{F}_n) = \mathbb{E}(T_{n+1}) = p(1+a) + (1-p)(1+b) = 1 + \underbrace{b + p(a-b)}_{=r} = 1+r.$$

D'après la question 1, $\widetilde{S}_n$ *est une martingale sous* $\mathbb{P}$.

Réciproquement, supposons que, $\widetilde{S}_n$ *est une martingale sous* $\mathbb{P}$, *alors pour* $n = 0, \ldots, N-1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_{n+1}|\mathrm{F}_n) &= (1+a)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathrm{F}_n) + (1+b)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathrm{F}_n) \\ &= 1+r.\end{aligned}$$

En utilisant l'égalité $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathrm{F}_n) + \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathrm{F}_n) = 1$, *on déduit que* $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathrm{F}_n) = p$ *et* $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathrm{F}_n) = 1-p$. *Par raisonnement par récurrence sur* n, *on voit que, pour tous* $x_i \in \{1+a, 1+b\}$,

$$\mathbb{P}(T_1 = x_1, \ldots, T_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i.$$

Ainsi, on remarque que la condition que $(\widetilde{S}_n)$ *soit une martingale sous* $\mathbb{P}$ *détermine la loi du* $N-$*uple* $(T_1, T_2, \ldots, T_N)$ *sous* $\mathbb{P}$ *et donc la probabilité* $\mathbb{P}$ *elle même, de façon unique. Le marché est donc viable et complet.*

5. *Notant* C_n *(resp.* P_n*) la valeur, à l'instant* n, *d'un call (resp. d'un put) européen sur une unité d'actif risqué au prix d'exercice* K *et d'échéance* N,

   a) Notant $\mathbb{E}^*$, *l'espérance par rapport à l'unique probabilité* $\mathbb{P}^*$ *sous laquelle* $(\widetilde{S}_n)$ *est une martingale, on a par définition :*

$$\begin{aligned}C_n - P_n &= (1+r)^{-(N-n)}\mathbb{E}^*((S_N-K)_+ - (K-S_N)_+|\mathrm{F}_n) \\ &= (1+r)^{-(N-n)}\mathbb{E}^*((S_N-K)|\mathrm{F}_n) \\ &= S_n - K(1+r)^{-(N-n)},\end{aligned}$$

   la dernière égalité résultant du fait que $(\widetilde{S}_n)$ *est une martingale sous* $\mathbb{P}^*$.

b) Comme $T_i = \frac{S_i}{S_{i-1}}$*, et en écrivant* $S_N = S_n \prod_{i=n+1}^{N} T_i$*, on obtient :*

$$C_n = (1+r)^{-(N-n)}\mathbb{E}^* \left(\left(S_n \prod_{i=n+1}^{N} T_i - K \right)_+ |\mathrm{F}_n \right).$$

Comme, sous la probabilité $\mathbb{P}^*$ *la variable aléatoire* $\prod_{i=n+1}^{N} T_i$ *est indépendante de* F_n *et que* S_n *est* F_n *mesurable, on peut écrire* $C_n = f(n, S_n)$*, où* f *est la fonction définie par :*

$$\begin{aligned} \frac{f(x,n)}{(1+r)^{-(N-n)}} &= \mathbb{E}^* \left(S_n \prod_{i=n+1}^{N} T_i \right)_+ \\ &= \sum_{k=0}^{N-n} \mathcal{C}_{N-n}^k p^k (1-p)^{N-n-k} (x(1+a)^j (1+b)^{N-n-k} - K)_+. \end{aligned}$$

6. *Notant* ϕ_n^0 *la quantité d'actif sans risque dans le portefeuille simulant le call, on a :*

$$\phi_n^0 (1+r)^n + \phi_n S_n = f(n, S_n).$$

Puisque ϕ_n^0 *et* ϕ_n *sont* $\mathrm{F}_{n-1}-$ *mesurables, ce sont des fonctions de* $S_1, \ldots, S_{n-1}$ *seulement et,* S_n *étant égal à* $S_{n-1}(1+a)$ *ou* $S_{n-1}(1+b)$*, l'égalité ci-dessus implique :*

$$\phi_n^0 (1+r)^n + \phi_n S_{n-1}(1+a) = f(n, S_{n-1}(1+a))$$

et

$$\phi_n^0 (1+r)^n + \phi_n S_{n-1}(1+b) = f(n, S_{n-1}(1+b)).$$

D'où, par soustraction,

$$\phi_n = \Delta(n,x) = \frac{f(n, x(1+b)) - f(n, x(1+a))}{x(b-a)}.$$

Autre formulation de la dynamique du cours S_n

$$S_n = (1+\rho_n) S_{n-1},$$

où $(\rho_n)_{1 \leq n \leq N}$ *est une suite de variables aléatoires qui ne prennent que deux valeurs* a *et* b *telles que* $-1 < a < r < b$.

Cette condition garantit en particulier la positivité des variables S_n*, de plus, par rapport à la probabilité* $\mathbb{P}$ *la suite* (ρ_n) *est supposée une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.*

Remarque 3.4.1.

Dans les formules obtenues, le seul paramètre qui n'est pas directement observable sur le marché est σ*, où son interprétation comme variance nécessite de l'estimer par des voies statistiques. Une présentation élémentaire du modèle de Cox-Ross-Rubinstein est détaillée dans [7].*

Chapitre 4

Intégrale et Équations différentielles stochastiques

4.1 Intégrale stochastique

Le but de l'intégrale stochastique est de donner un sens à des équations de la forme :

$$\frac{dY_t}{dt} = f(Y) + g(Y)\frac{dB_t}{dt} \tag{4.1}$$

Par exemple, si $f \equiv 0$ et $g \equiv 1$, on devrait retrouver, $Y_t = Y_0 + B_t$, décrivant le mouvement d'une particule Brownienne.

Le problème est que, les trajectoires du mouvement Brownien sont presque sûrement nulles par différentiabilité, c.à.d, si B_t est un mouvement Brownien, $\nexists t \in \mathbb{R}^+$ telque $\frac{dB_t}{dt}$ ait un sens.

Comme dans le cas des équations différentielles ordinaires, on interprête une solution de l'équation différentielle (4.1) comme une solution de l'équation intégrale

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f(Y_s)ds + \int_0^t g(Y_s)dB_s. \tag{4.2}$$

C'est à la seconde intégrale qu'il s'agit de donner un sens mathématique. Si $s \mapsto g(X_s)$ était différentiable, on pourrait le faire à l'aide d'une intégration par parties, mais ce n'est en général pas le cas. Itô a donné une autre définition de l'intégrale stochastique, qui s'applique à une classe beaucoup plus vaste d'intégrants (et donne le même résultat que l'intégration par parties dans le cas différentiable).

4.2 Construction de l'intégrale stochastique

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ *un* $\mathcal{F}_t-$*mouvement Brownien standard sur un espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. *Nous allons donner un sens à l'intégrale* $\displaystyle\int_0^t g(s,\omega)dB_s$ *pour une classe de processus* $g(s,\omega)$ *adaptés à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

4.2.1 Première étape : Construction de l'intégrale stochastique sur un ensemble de processus dits élémentaires

Définition 4.2.1.
Soit $T \in \mathbb{R}^+$. *On appelle processus élémentaire* $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus de la forme :*

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(\omega) \cdot \mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i]}(t) \tag{4.3}$$

où $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = T$ *est une partition de* $[0,T]$ *et* ϕ_i *est* $\mathcal{F}_{t_{i-1}}-$*mesurable et bornée.*

Définition 4.2.2.
L'intégrale stochastique d'un processus élémentaire H *est le processus continu noté* $(I(H)_t)_{0\leq t\leq T}$ *défini par :*

$$\text{Si } t \in]t_k, t_{k+1}] : \; I(H)_t = \sum_{i=1}^{k} \phi_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \phi_{k+1}(B_t - B_{t_k}). \tag{4.4}$$

On notera $I(H)_t \triangleq \displaystyle\int_0^t H_s dB_s$.

Il est aisé de vérifier les propriétés de linéarité suivantes :

Proposition 4.2.1.

1. *Pour deux processus élémentaires* H^1 *et* H^2,
$$\int_0^t \left(H_s^1 + H_s^2\right) dB_s = \int_0^t H_s^1 dB_s + \int_0^t H_s^2 dB_s. \tag{4.5}$$
2. *Pour toute constante* c,
$$\int_0^t \left(cH_s\right) dB_s = c\int_0^t H_s dB_s. \tag{4.6}$$
3. *L'intégrale (4.4) est une fonction continue de* t.

On a le résultat essentiel suivant :

Proposition 4.2.2.

Si $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus élémentaire :

1. $\left(\int_0^t H_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *est $\mathcal{F}_t-$martingale.*
2. $\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t H_s dB_s\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$.
3. $\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}|\int_0^t H_s dB_s|^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right)$.

Démonstration 4.2.1.

1. *Nous allons utiliser des processus à temps discret, on veut démontrer que $\int_0^t H_s dB_s$ est une martingale. Il suffit de prouver que $\forall t > s$:*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t H_u dB_u|\mathcal{F}_s\right) = \int_0^s H_u dB_u.$$

Si l'on ajoute s et t à la subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_p = T$ et si on pose $M_n = \int_0^{t_n} H_s dB_s$ et $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{t_n}$ pour $0 \leq n \leq p$, il suffit de vérifier que M_n est une $\mathcal{G}_n-$martingale.

Remarquant que :

$$M_n = \int_0^{t_n} H_s dB_s = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \cdot (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

avec ϕ_i est $\mathcal{G}_{i-1}-$mesurable. D'autre part $Y_n = B_{t_n}$ est $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{t_n}-$mesurable (en effet $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien). $(M_n)_{n\in[0,p]}$ apparaît comme une transformée de la martingale $(Y_n)_{n\in[0,p]}$, d'après la proposition de la transformée de martingale du deuxième chapitre $(M_n)_{n\in[0,p]}$ est une martingale.

2. *Remarquant que :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n^2) &= \mathbb{E}\left((\sum_{i=1}^{n} \phi_i \cdot (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}))^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left(\phi_i \cdot \phi_j \cdot (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \cdot (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right)\end{aligned}$$

De plus, si $i < j$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\phi_i \cdot \phi_j \cdot (B_i - B_{i-1}) \cdot (B_j - B_{j-1})\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\phi_i \cdot \phi_j \cdot (B_i - B_{i-1}) \cdot (B_j - B_{j-1}))|\mathcal{G}_{j-1}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\phi_i \cdot \phi_j \cdot (B_i - B_{i-1})\mathbb{E}(B_j - B_{j-1}|\mathcal{G}_{j-1})\right).\end{aligned}$$

Comme B_j est une martingale, on a $\mathbb{E}(B_j - B_{j-1}|\mathcal{G}_{j-1}) = 0$, donc cette quantité est nulle
Si $i > j$, par symétrie, on obtient le même résultat.
Enfin, si $i = j$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\phi_i^2(B_i - B_{i-1})^2\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\phi_i^2(B_i - B_{i-1})^2|\mathcal{G}_{i-1})\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\phi_i^2\mathbb{E}((B_i - B_{i-1})^2|\mathcal{G}_{i-1})\right), \end{aligned}$$

finalement,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((B_i - B_{i-1})^2|\mathcal{G}_{i-1}) &= \mathbb{E}((B_i - B_{i-1})^2) \\ &= t_i - t_{i-1}. \end{aligned}$$

i.e.

$$\mathbb{E}\left(\phi_i^2(B_i - B_{i-1})^2\right) = \mathbb{E}(\phi_i^2 \cdot (t_i - t_{i-1})).$$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n} \phi_i^2(B_i - B_{i-1})^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n} \phi_i^2 \cdot (t_i - t_{i-1})\right).$$

D'où :

$$\mathbb{E}\left((\int_0^t H_s dB_s)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 ds\right).$$

3. *Le dernier point est une conséquence de l'inégalité de Doob appliquée à la martingale $(M_t)_{t\geq 0}$, $M_t = \displaystyle\int_0^t H_s dB_s$, M_t continue par définition.*

4.2.2 Deuxième étape : Construction de l'intégrale stochastique sur une classe de processus adaptés

Soit $\mathcal{H} = \{(H_t)_{0\leq t\leq T}$, un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $\mathbb{E}(\displaystyle\int_0^T H_s^2 ds) < +\infty\}$.

Proposition 4.2.3.
Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t-$mouvement Brownien. Alors il existe une unique application linéaire J de $\mathcal{H}$ dans l'espace des $\mathcal{F}_t-$martingales continues définies sur $[0,T]$ telle que :

1. *Si $(H_t)_{t\leq T}$ est un processus élémentaire, $\mathbb{P}.p.s$ pour tout $0 \leq t \leq T$ $J(H)_t = I(H)_t$.*
2. *Si $t \leq T$ $\mathbb{E}(J(H)_t^2) = \mathbb{E}(\displaystyle\int_0^t H_s^2 ds)$.*

Cette application linéaire est unique au sens suivant, si J et J' sont deux prolongements linéaires vérifiants les propriétés précédentes alors :

$$\mathbb{P}.p.s\ \forall\, 0 \leq t \leq T,\ J(H)_t = J'(H)_t. \tag{4.7}$$

On note, si $H \in \mathcal{H}$ $\displaystyle\int_0^t H_s dB_s = J(H)_t$,
cette intégrale stochastique vérifie la propriété suivante :

Proposition 4.2.4.

Si $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus de $\mathcal{H}$ alors :

–

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}|\int_0^t H_s dB_s|^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right). \tag{4.8}$$

– *Si τ est un $\mathcal{F}_t$−temps d'arrêt :*

$$\mathbb{P}\, p.s. \int_0^\tau H_s dB_s = \int_0^T \mathbb{1}_{\{s\leq\tau\}} H_s dB_s. \tag{4.9}$$

Nous aurons besoin d'un résultat permettant de relaxer l'hypothèse d'intégrabilité portant sur (H_s).

Posons :

$\widetilde{\mathcal{H}} = \{(H_s)_{0\leq s\leq T}$, *un processus adapté à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $\int_0^T H_s^2 ds < +\infty\ \mathbb{P}.p.s\}$.

La proposition suivante permet de prolonger l'intégrale stochastique de $\mathcal{H}$ à $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Proposition 4.2.5.

Il existe une unique application linéaire $\widetilde{J}$ de l'espace $\widetilde{H}$ dans l'espace vectoriel des processus continus définis sur $[0,T]$ telle que :

1. *Propriété de prolongement :*
   Si $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus élémentaire alors :

$$\mathbb{P}.p.s\ \forall\, 0\leq t\leq T,\ \widetilde{J}(H)_t = I(H)_t. \tag{4.10}$$

2. *Propriété de continuité :*
   Si $(H^n)_{n\geq 0}$ est une suite de processus de $\widetilde{H}$ telle que $\int_0^T H_s^{n2} ds \to 0$ en probabilité, alors :

$$\sup_{t\leq T}|\widetilde{J}(H^n)_t| \to 0 \textit{ en probabilité.} \tag{4.11}$$

On note toujours $\int_0^t H_s dB_s = \widetilde{J}(H)_t$.

Remarque 4.2.1.

Dans ce cas $\left(\int_0^t H_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *n'est pas nécessairement une martingale.*

Résumé

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ *un* $\mathcal{F}_t-$*mouvement Brownien et* $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus* $\mathcal{F}_t-$*adapté. On peut définir l'intégrale stochastique* $\left(\int_0^t H_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *dès que* $\int_0^T H_s^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}$*.p.s.*

Le processus $\left(\int_0^t H_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *est une martingale si* $\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < +\infty$*. cette condition n'est cependant pas nécessaire car la condition*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < +\infty \Longleftrightarrow \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t H_s dB_s\right)^2\right) < +\infty,$$

et que dans ce cas on a l'égalité :

$$\mathbb{E}[\left(\int_0^T H_s dB_s\right)^2] = \mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right). \tag{4.12}$$

4.3 Calcul d'Itô

Nous allons introduire maintenant un calcul différentiel sur ces intégrales stochastiques. On appelle ce calcul "Calcul d'Itô" et l'outil essentiel en est "la formule d'Itô" qui donne, en particulier la façon de différencier $t \mapsto f(B_t)$ *si* f *est deux fois continûment différentiable.*

Exemple 4.3.1.

L'exemple suivant montre que le prolongement du calcul différentiel usuel est voué à l'échec.

Supposons que l'on veuille différencier $t \mapsto B_t^2$ *et l'exprimer en fonction de* dB_t*.*

Pour une fonction $f(t)$ *différentiable nulle en 0, on a :*

$$f^2(t) = 2\int_0^t f(s)df(s).$$

Dans le cas du mouvement Brownien et de l'intégrale stochastique on ne peut avoir une formule du même type, c.a.d $B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s$*, d'après ce qui précède,* $\int_0^t B_s dB_s$ *est une martingale(car* $\mathbb{E}\int_0^t B_s^2 ds < +\infty$ *), nulle en zéro.*

Si elle était égale à B_t^2 *elle serait positive, et une martingale nulle en zéro ne peut être positive que si elle est nulle.*

4.3.1 Processus d'Itô

Commençons par préciser la définition de la classe de processus pour la quelles on peut introduire la formule d'Itô.

Définition 4.3.1.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré,* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un* $\mathcal{F}_t-$*mouvement Brownien.*

On appelle processus d'Itô, un processus $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *tel que :*

$$\mathbb{P}\, p.s.,\ \forall t \leq T,\, Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s, \tag{4.13}$$

avec :

- Y_0 *est* $\mathcal{F}_0-$*mesurable.*
- $(K_t)_{0\leq t\leq T}$ *et* $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *sont deux processus adaptés à* $\mathcal{F}_t$.
- $\int_0^T |K_s| ds < +\infty\ \mathbb{P}\, p.s.$ *et* $\int_0^T |H_s|^2 ds < +\infty\ \mathbb{P}\, p.s.$

Le résultat suivant, montre l'unicité de la décomposition (4.13) précédente.

Proposition 4.3.1.

Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ *est une martingale continue telle que :*

$$M_t = \int_0^t K_s ds,\ \text{avec } \mathbb{P}\, p.s.,\ \int_0^T |K_s| ds < +\infty,$$

alors :

$$\mathbb{P}\, p.s. \forall t \leq T, M_t = 0.$$

Ceci entraîne que :

Cette décomposition d'un processus d'Itô est unique. Ce que signifie que si :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s = Y_0' + \int_0^t K_s' ds + \int_0^t H_s' dB_s$$

alors :

$$Y_0 = Y_0'\ \ d\mathbb{P}\, p.s.\ H_s = H_s'\ \ ds \times d\mathbb{P}\, p.p.\ K_s = K_s'\ \ ds \times d\mathbb{P}\, p.p..$$

Si $(Y_t)_{0\leq t\leq T}$ *est une martingale de la forme* $Y_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$, *alors* $K_t = 0\ dt \times d\mathbb{P}\ p.p.$.

4.3.2 Formule d'Itô

La formule d'Itô est définie par le théorème suivant (nous l'admettons sans démonstration, pour plus de détails, voir [16].)

Théorème 4.3.1. ***(Formule d'Itô)***
Soit $(Y_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s,$$

et f une fonction deux fois différentiable, on a :

$$f(Y_t) = f(Y_0) + \int_0^t f^{'}(Y_s)dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(Y_s)d\langle Y, Y\rangle_s \tag{4.14}$$

où, par définition :

$$\langle Y, Y\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds,$$

et

$$\int_0^t f^{'}(Y_s)dY_s = \int_0^t f^{'}(Y_s)K_s ds + \int_0^t f^{'}(Y_s)H_s dB_s.$$

De même si $(t, y) \to f(t, y)$ est une fonction deux fois différentiable en y et une fois différentiable en t, ces dérivées étant continues en (t, y) (on dit dans ce cas que f est de classe $C^{1,2}$), on a :

$$f(t, Y_t) = f(0, Y_0) + \int_0^t f_s^{'}(s, Y_s)ds + \int_0^t f_x^{'}(s, Y_s)dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}^{''}(s, Y_s)d\langle Y, Y\rangle_s. \tag{4.15}$$

4.3.3 Exemple d'utilisation de la formule d'Itô

Traitons un exemple élémentaire. Si $Y_t = B_t$ et $f(y) = y^2$, alors Y_t défini bien un processus d'Itô car : $K_s = 0$ et $H_s = 1$, et $\left\{\begin{array}{l} f^{'}(Y_s) = 2Y_s \\ f^{''}(Y_s) = 2. \end{array}\right.$

D'après la formule d'Itô et comme $Y_t = B_t$, on a :

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2ds$$

car

$$\langle Y, Y\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds = \int_0^t ds = t,$$

d'où

$$d\langle Y, Y\rangle_s = ds,$$

donc

$$B_t^2 - t = 2\int_0^t B_s dB_s$$

Comme $\mathbb{E}\left(\int_0^t B_s^2 ds\right) < +\infty$, *on retrouve le fait que $B_t^2 - t$ est une martingale.*

4.3.4 Formule d'Itô multidimensionnelle

La formule d'Itô admet une généralisation aux cas où la fonction f dépend de $n-$processus d'Itô et lorsque chaque processus d'Itô s'écrit en fonction de plusieurs mouvements Brownien.

Définition 4.3.2.
On appelle $\mathcal{F}_t-$mouvement Brownien $p-$dimensionnel un processus $(B_t)_{t\geq 0}$ $\mathcal{F}_t-$adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, avec $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^p)$, où les $(B_t^i)_{t\geq 0}$ sont des $\mathcal{F}_t-$mouvements Brownien standards indépendants.

Dans ce cas, la notion de perocessus d'Itô se généralise.

Définition 4.3.3.
Un processus $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ est dit d'Itô si :

$$\mathbb{P}\, p.s.,\ \forall t \leq T,\ Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s ds + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t H_s^i dB_s^i, \tag{4.16}$$

avec :
- $(K_t)_{0\leq t\leq T}$ *et* $(H_t^i)_{0\leq t\leq T}$ $(1 \leq i \leq p)$ *sont* $\mathcal{F}_t-$*adaptés.*
- $\int_0^T |K_s| ds < +\infty\ \mathbb{P}\, p.s.$.
- $\int_0^T (H_s^i)^2 ds < +\infty\ \mathbb{P}\, p.s.$.

La formule d'Itô multidimensionnelle prend donc la forme suivante :

Proposition 4.3.2.
Soient $(Y_t^1, \ldots, Y_t^n)$ n processus d'Itô :

$$Y_t^i = Y_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{j=1}^{p} \int_0^t H_s^{i,j} dB_s^j$$

si f est une fonction deux fois différentiable en y et une fois différentiable en t, ces dérivées étant continues en (t, y), alors :

$$\begin{aligned}
f(t, Y_t^1, \ldots, Y_t^n) &= f(0, Y_0^1, \ldots, Y_0^n) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, Y_s^1, \ldots, Y_s^n) ds \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y_i}(s, Y_s^1, \ldots, Y_s^n) dY_s^i \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y_i y_j}(s, Y_s^1, \ldots, Y_s^n) d\langle Y^i, Y^j \rangle_s
\end{aligned}$$

avec :

– $dY^i_s = K^i_s ds + \sum_{j=1}^{p} H^{i,j}_s dB^j_s$,
– $d\langle Y^i, Y^j\rangle_s = \sum_{m=1}^{p} H^{i,m}_s H^{j,m}_s ds$.

Remarque 4.3.1.
Si $(Y_t)_{t\geq 0}$ et $(Z_t)_{t\geq 0}$ sont deux processus d'Itô, le crochet de Y et Z (noté $\langle Y, Z\rangle_s$) on peut le définir comme suit :
- *$\langle Y, Z\rangle_s$ est bilinéaire et symétrique.*
- *$\langle \int_0^{\cdot} K_s ds, Y\rangle_t = 0$ si $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un processus d'Itô.*
- *$\langle \int_0^{\cdot} H_s dB^i_t, \int_0^{\cdot} H^{'}_s dB^j_t\rangle_t = 0$ si $i \neq j$.*
- *$\langle \int_0^{\cdot} H_s dB^i_t, \int_0^{\cdot} H^{'}_s dB^i_t\rangle_t = \int_0^t H_s H^{'}_s ds$.*

Avec ces règles on peut calculer et retrouver la formule du crochet dans la proposition (4.3.2).

4.3.5 Formule d'intégration par parties pour les processus d'Itô

Nous allons maintenant nous introduire une propriété généralisant "la formule d'intégration par partie" dans le cas des processus d'Itô.

Proposition 4.3.3.
Soient Y_t et Z_t deux processus d'Itô,

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s \text{ et } Z_t = Z_0 + \int_0^t K^{'}_s ds + \int_0^t H^{'}_s dB_s.$$

Alors :

$$Y_t Z_t = Y_0 Z_0 + \int_0^t Y_s dZ_s + \int_0^t Z_s dY_s + \langle Y, Z\rangle_t$$

avec la convention :

$$\langle Y, Z\rangle_t = \int_0^t H_s H^{'}_s ds.$$

Démonstration 4.3.1.
On a d'après la formule d'Itô :

$$\begin{aligned}
(Y_t + Z_t)^2 &= (Y_0 + Z_0)^2 + 2\int_0^t (Y_s + Z_s) d(Y_s + Z_s) + \int_0^t (H_s + H^{'}_s)^2 ds \\
Y_t^2 &= Y_0^2 + 2\int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t H_s^2 ds \\
Z_t^2 &= Z_0^2 + 2\int_0^t Z_s dZ_s + \int_0^t H^{'2}_s ds.
\end{aligned}$$

en faisant la différence entre la première ligne et les deux suivantes :

$$Y_t Z_t = Y_0 Z_0 + \int_0^t Y_s dZ_s + \int_0^t Z_s dY_s + \int_0^t H_s H^{'}_s ds.$$

4.3.6 Le processus d'Ornstein-Ulhenbeck

On considère l'équation : $\begin{cases} dY_t = -cY_t dt + \sigma dB_t \\ Y_0 = y_0 \end{cases}$
où, y_0, c *et* σ *sont des constantes réelles.*

Le processus d'Ornstein-Ulhenbeck est l'unique solution de cette équation, on peut l'expliciter. En effet, posont $Z_t = Y_t e^{ct}$ *et écrivons la formule d'intégration par partie :*

$$dZ_t = e^{ct} dY_t + Y_t d(e^{ct}) + \langle Y, e^c \rangle_t.$$

Mais

$$\langle Y, e^c \rangle_t = 0 \text{ car } d(e^{ct}) = ce^{ct} dt \text{ i.e. } K_t{}' = ce^{ct} \text{ et } H_t^{'} = 0.$$

On en déduit que :

$$dZ_t = \sigma e^{ct} dB_t \text{ i.e. } Z_t = Z_0 + \sigma \int_0^t e^{cs} dB_s,$$

puis que :

$$Y_t = Y_0 e^{-ct} + \sigma e^{-ct} \int_0^t e^{cs} dB_s.$$

On peut calculer la moyenne et la variance de Y_t :

$$\mathbb{E}(Y_t) = Y_0 e^{-ct} + \sigma e^{-ct} \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{cs} dB_s \right) = Y_0 e^{-ct}.$$

(en effet $\mathbb{E}\left(\int_0^t (e^{cs})^2 ds \right) < +\infty$*, et donc* $\int_0^t e^{cs} dB_s$ *est une martingale nulle à l'instant 0 donc de moyenne nulle). De même :*

$$\begin{aligned} Var(Y_t) &= \mathbb{E}\left((Y_t - \mathbb{E}(Y_t))^2 \right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\sigma e^{-ct} \int_0^t e^{cs} dB_s \right)^2 \right) \\ &= \sigma^2 e^{-2ct} \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{2cs} ds \right) \\ &= \sigma^2 \frac{1 - e^{-2ct}}{2c}. \end{aligned}$$

4.4 Équations différentielles stochastiques

Dans cette section, on considère des équations de la forme générale :

$$Y_t = Z + \int_0^t b(s, Y_s)ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s)dB_s. \tag{4.17}$$

On appelle ces équations les " EDS : équations différentielles stochastiques ". Une solution de l'équation (4.15) porte le nom de "diffusion".

Remarque 4.4.1.

Formellement, on note (4.17) sous la forme : $\begin{cases} dY_t = b(t, Y_t)dt + \sigma(t, Y_t)dB_t \\ Y_0 = Z. \end{cases}$

4.4.1 Théorème d'Itô

Nous avons maintenant tous les éléments en main pour définir la notion de solution de l'équation différentielle stochastique (4.17).

Définition 4.4.1.

On se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.
On se donne, $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *$Z$ une variable aléatoire $\mathcal{F}_0-$mesurable et $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t-$mouvement Brownien. Trouver une solution à l'équation (4.17) revient à trouver un processus stochastique $(Y_t)_{t\geq 0}$, continu $\mathcal{F}_t-$adapté, vérifiant les propriétés :*

1. *Pour tout $t \geq 0$, les intégrales $\int_0^t b(s, Y_s)ds$ et $\int_0^t \sigma(s, Y_s)dB_s$ ont un sens :*

$$\int_0^t |b(s, Y_s)|ds < +\infty \text{ et } \int_0^t |\sigma(s, Y_s)|^2 ds < +\infty \ \mathbb{P} \ p.s..$$

2. *$(Y_t)_{t\geq 0}$ vérifie (4.15) c'est-à-dire :*

$$\forall t \geq 0 \, \mathbb{P} \ p.s. \, Y_t = Z + \int_0^t b(s, Y_s)ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s)dB_s.$$

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur b et σ pour avoir un résultat d'existence et d'unicité pour (4.17).

Théorème 4.4.1.

Si b et σ sont des fonctions continues, telles qu'il existe $K < +\infty$ avec :

1. $|b(t, y) - b(t, y')| + |\sigma(t, y) - \sigma(t, y')| \leq K|y - y'|$
2. $|b(t, y)| + |\sigma(t, y)| \leq K(1 + |y|)$
3. $\mathbb{E}(Z^2) < +\infty$

alors, pour tout $T \geq 0$, *(4.17) admet une solution unique dans l'intervalle* $[0, T]$. *De plus cette solution* $(Y_t)_{0 \geq t \geq T}$ *vérifie :*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2\right) < +\infty.$$

L'unicité signifie que si $(Y_t)_{0 \geq t \geq T}$ *et* $(X_t)_{0 \geq t \geq T}$ *sont deux solutions de (4.17), alors :*

$$\mathbb{P}\ p.s.\ 0 \leq t \leq T,\ Y_t = X_t.$$

Démonstration 4.4.1.

On pose :

$$\mathcal{E} = \left\{(Y_t)_{0 \leq t \leq T},\ processus\, continu\, et\, \mathcal{F}_t - adapté,\ tel\, que\, \mathbb{E}\left(\sup_{t \geq T} |Y_t|^2\right) < +\infty\right\}$$

un espace vectoriel normé complet muni de la norme $\|Y\| = \sqrt{\mathbb{E}\left(\sup_{0 \geq t \geq T} |Y_t|^2\right)}$.

Pour prouver l'existence de la solution nous allons utiliser un argument d'existence d'un point fixe pour une application contractante. Soit Ψ *l'application qui à un processus donné* $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ *associe un processus* $(\Psi(Y_t))_{0 \leq t \leq T}$ *défini par :*

$$\Psi(Y)_t = Z + \int_0^t b(s, Y_s)ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s)dB_s.$$

Si $Y \in \mathcal{E}$, $\Psi(Y)$ *est bien définie, de plus si* Y *et*Y' *sont deux éléments de* $\mathcal{E}$ *en utilisant le fait que,* $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ *on obtient :*

$$\begin{aligned}
|\Psi(Y)_t - \Psi(Y')_t|^2 &\leq 2(\sup_{0 \leq t \leq T} |\int_0^t (b(s, Y_s) - b(s, Y'_s))ds|^2 \\
&+ \sup_{0 \leq t \leq T} |\int_0^t (\sigma(s, Y_s) - \sigma(s, Y'_s))dB_s|^2)
\end{aligned}$$

et on utlisant l'inégalité (4.8) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sup_{t \leq T} |\Psi(Y_t) - \Psi(Y'_t)|^2) &\leq 2\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} (\int_0^t |b(s, Y_s) - b(s, Y'_s)|ds)^2\right) \\
&+ 8\mathbb{E}\left(\int_0^T (\sigma(s, Y_s) - \sigma(s, Y'_s))^2 ds\right) \\
&\leq 2(K^2T^2 + 4K^2T)\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t - Y'_t|^2).
\end{aligned}$$

D'où $\| \Psi(Y) - \Psi(Y') \| \leq \sqrt{2(K^2T^2 + 4K^2T)} \| Y - Y' \|$. *De plus, on a (on note 0 pour le processus identiquement nul) :*

$$|\Psi(0)_t|^2 \leq 3\left(Z^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} |\int_0^t b(s, 0)ds|^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} |\int_0^t \sigma(s, 0)dB_s|^2\right)$$

en utilisant le fait que $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ *on obtient :*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|\Psi(0)_t|^2\right) \leq 3\left(\mathbb{E}(Z^2)+K^2T^2+4K^2T\right) < +\infty.$$

On en déduit que Ψ *est une application de* $\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{E}$ *de norme de Lipschitz majorée par* $\mathfrak{K}(T)=\sqrt{2(K^2T^2+4K^2T)}$*. Commençons par supposer que* T *est suffisamment petit pour que* $\mathfrak{K}(T)<1$*. Donc* Ψ *est une application contractante de* $\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{E}$ *qui posséde donc un point fixe unique dans* $\mathcal{E}$*. De plus, si* Y *est un point fixe de* Ψ*, c'est une solution de l'EDS (4.17), ce qui prouve l'existence. D'autre part, une solution de (4.17) qui est dans* $\mathcal{E}$ *est un point fixe de* Ψ*, ce qui prouve l'unicité de la solution de (4.17) dans* $\mathcal{E}$*. Pour prouver l'unicité dans la classe de tous les processus d'Itô, il suffit de prouver q'une solution de (4.17) est forcément dans* $\mathcal{E}$*.*

Soit Y *une solution de (4.17), posons* $T_n=\inf\{s\geq 0, |Y_s|>n\}$ *et* $f^n(t)=\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t\wedge T}|Y_s|^2)$*. Il est facile de vérifier que* $f^n(t)$ *est une fonction finie et continue. En procéde le même calcul ci-dessus on obtient :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t\wedge T_n}|Y_s|^2) &\leq 3\left(\mathbb{E}(Z^2)+\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_n}K(1+|Y_s|)ds\right)^2+4\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_n}K^2(1+|Y_s|)^2ds\right)ds\right)\\
&\leq 3\left(\mathbb{E}(Z^2)+2(K^2T+4K^2)\int_0^t(1+\mathbb{E}(\sup_{0\leq u\leq s\wedge T_n}|Y_s|^2))ds\right).
\end{aligned}$$

ce qui donne la majoration :

$$f^n(t)\leq a+b\int_0^t f^n(s)ds.$$

On utilisant une version du lemme de Gronwall

Lemme 4.4.1.

Si f *est une fonction continue, telle que pour tout* $0\leq t\leq T$, $f(t)\leq a+b\int_0^t f(s)ds$*, alors* $f(T)\leq a(1+e^{bT})$*.*

On en déduit pour notre cas que $f^n(T)<K<+\infty$*,* K *étant une constante fonction de* T *mais indépendante de* n*.*

Le lemme de Fatou donne alors, en passant à la limite en n*, que pour tout* T *:*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq T}|Y_s|^2\right) < K < +\infty.$$

Y *est donc dans* $\mathcal{E}$*. La démostration est achevé pour le cas où* T *est petit.*

Pour conclure pour T *quelconque, il suffit de prendre* n *assez grand et raisonner successivement sur les intervalles* $[0,T/n],[T/n,2T/n],\ldots,[(n-1)T/n,T]$*.*

4.4.2 Équations différentielles stochastiques multidimensionelles

L'étude des équations différentielles stochastiques peut avoir une généralisation aux cas où le processus évolue dans $\mathbb{R}^n$. une telle généralisation est importante, dans le domaine d'appliquations en finance, par exemple lorsque l'on cherche à modéliser un portefeuil de p actifs financiers. On se donne :

- $B = (B^1, \ldots, B^p)$ *un* $\mathcal{F}_t-$*mouvement brownien* $p-$*dimensionnel.*
-
$$\begin{aligned} b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (s, y) &\mapsto b(s, y) = (b^1(s, y), \ldots, b^n(s, y)). \end{aligned}$$
-
$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^{n\times p}\, (l'ensemble\ des\ matrices\ p \times n) \\ (s, y) &\mapsto \sigma(s, y) = (\sigma_{i,j}(s, y))_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq p}. \end{aligned}$$
- $Z = (Z^1, \ldots, Z^n)$ *une variable aléatoire* $\mathcal{F}_0-$*mesurable à valeur dans* $\mathbb{R}^n$.

On considère l'équation différentielle stochastique :

$$Y_t = Z + \int_0^t b(s, Y_s)ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s)dB_s, \tag{4.18}$$

on cherche un processus $(Y_t)_{0\leq t\leq T}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}-$*adapté et tel que* $\mathbb{P}$ *p.s., pour tout t et pour tout* $i \leq n$, *on a presque sûrement :*

$$Y_t^i = Z^i + \int_0^t b^i(s, Y_s)ds + \int_0^t \sigma_{i,j}(s, Y_s)dB_s^j, .$$

Le théorème d'existence et d'unicité admet la généralisation suivante :

Théorème 4.4.2.
Si $y \in \mathbb{R}^n$, $|y|$ *est la norme euclidienne de* y *et si* $\sigma \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $|\sigma|^2 = \sum_{1\leq i\leq n} \sum_{1\leq j\leq p} \sigma_{i,j}^2$. *On suppose que :*

1. $|b(t, y) - b(t, y')| + |\sigma(t, y) - \sigma(t, y')| \leq K|y - y'|$
2. $|b(t, y)| + |\sigma(t, y)| \leq K(1 + |y|)$
3. $\mathbb{E}(|Z|^2) < +\infty$

alors il existe une solution unique à l'équation (4.18). De plus cette solution vérifie, pour tout T :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right) < +\infty.$$

La démonstration est identique à celle du cas unidimensionnel.

4.5 Exercices

Exercice 1 :

Soit α, σ deux constantes réelles, $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t-$mouvement Brownien et

$$dX_t = -\frac{1}{2}\alpha X_t dt + \frac{1}{2}\sigma dB_t.$$

Soit $Y_t = X_t \cdot e^{\frac{\alpha t}{2}}$.

- *Vérifier que X_t est un processus d'Itô.*
- *Écrire dY_t.*
- *Déduire la forme de la solution X_t.*

Exercice 2 : ***(Modèle de Black et Scholes)***

Résoudre l'EDS :

$$dS_t = S_t\left(\mu dt + \sigma dB_t\right), \quad S_0 = x_0.$$

Exercice 3 :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ une base stochastique, B un mouvement brownien standard et λ une constante réelle. Soit :

$$\begin{cases} dX_t = -\lambda^2 X_t^2(1-X_t)dt + \lambda X_t(1-X_t)dB_t, \\ X_0 = x \in]0,1[. \end{cases}$$

On admet que X prend ses valeurs dans l'intervalle $]0,1[$. On pose $Y_t = \dfrac{X_t}{1-X_t}$.

1. *Vérifier que X_t est un processus d'Itô.*
2. *Quelle est l'E.D.S (Équation Différentielle Stochastique) vérifiée par Y?.*
3. *Résoudre cette E.D.S et donner une formule explicite de Y.*
4. *Déduire que $X_t = \dfrac{x\exp[\lambda B_t - \lambda^2 t/2]}{x\exp[\lambda B_t - \lambda^2 t/2] + 1 - x}$.*

Exercice 4 :

Soit l'EDS :

$$dX_t = bX_t dt + dB_t, \quad X_0 = x.$$

1. *On pose $Y_t = e^{-t}\cdot X_t$.*
   - *Quelle est l'EDS vérifier par Y_t?.*
   - *Exprimer Y_t sous la forme : $Y_t = y + \int_0^t f(s)dB_s$, où l'on explicitera la fonction f.*
2. *Calculer $\mathbb{E}(Y_t)$ et $\mathbb{E}(Y_t^2)$.*

Exercice 5 :

On considère l'équation :

$$dX_t = a(t)X_t dt + b(t)dt + c(t)dB_t$$

$a(t), b(t)$ et $c(t)$ sont des processus adaptés.

1. *Résoudre cette équation par la méthode de la variation de la constante.*
2. *Résoudre l'EDS $dX_t = -\frac{1}{1+t}X_t dt + \frac{1}{1+t}dB_t,\ X_0 = 0$.*

Exercice 6 :

Soit B un mouvement brownien dont la filtration est notée $(\mathcal{F}_t)$. Soit σ un processus adapté continu de $L^2(\Omega \times \mathbb{R})$ et

$$X_t = \int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

On pose $Y_t = \exp(X_t)$ et $Z_t = Y_t^{-1}$.

1. *Expliciter la dynamique de Y, c'est-à-dire exprimer dY_t.*
2. *Donner une condition sur σ pour que Y soit une martingale*
3. *Calculer $\mathbb{E}(Y_t)$ dans ce cas. Expliciter les calculs quand $\sigma = 1$.*
4. *Calculer dZ_t.*

Exercice 7 :

I Soit le processus $\{C_t = C_0 e^{\alpha B_t};\ t \geq 0\}$, $C_0 \geq 0$ et C_t : est le processus du taux de change de dollars canadiens par un dollars américains au temps t (le nombre de dollar canadien que l'on peut obtenir par dollar américains), B_t est un mouvement Brownien standard.

a) Déterminer l'EDS sarisfaite par le processus $\{C_t, t \geq 0\}$.

II Soit le processus $\{X_t,\ t \geq 0\}$ qui modélise l'évolution d'un actif risqué en dollars américains satisfaisant l'EDS

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma X_t dB_t^*$$

où $\{B_t^*,\ t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien standard indépendant de $\{B_t\, t \geq 0\}$.

b) Déterminer l'EDS satisfaite par l'évolution $\{Y_t,\ t \geq 0\}$ du titre risqué en dollars canadiens.

Chapitre 5

Modèle à temps continu : Modèle de Black et Scholes

La modélisation en mathématiques financières d'évolution des cours d'actifs financiers a été introduite par Louis Bachelier dans sa thèse " Théorie de la spéculation " en 1900 [1]. Le processus des prix des actifs risqués été supposé gaussiens et pouvait donc prendre des valeurs négatives. Pour corriger ce défaut le modèle retenu par la suite est un modèle rendant le processus des prix des actifs risqués log-normaux, afin de s'assurer qu'ils restent toujours positifs. Ce modèle porte le nom de "Modèle de Black et Scholes" [4]. En effet, en 1973, Fisher Black, Robert Merton et Myron Scholes proposent l'idée de définir le prix d'un produit dérivé de type européen (call ou put) comme celui de son portefeuille de couverture et l'appliquent à ce modèle log-normal. La méthode utilisée, qui repose sur des idées analogues à celles déjà introduites dans le cadre des modèles discrets dans le chapitre 3 de ce polycopie, conduit à des formules couramment utilisées aujourd'hui par les particiens.

5.1 Description du modèle

5.1.1 L'évolution des cours

Le modèle introduit par Black et Scholes pour décrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif sans risque de prix S_t^0 *à l'instant* t *et un actif risqué de prix* S_t *à l'instant* t.

Supposons que la dynamique du cours S_t^0 *est régie par l'équation différentielle ordinaire suivante :*

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \tag{5.1}$$

où r *est une constante positive représentant le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque (notant ici que* r *est un taux d'intérêt instantané et ne pas confondre avec le taux sur une période des modèles discrets). On posera* $S_0^0 = 1$ *du sort que*

$$S_t^0 = e^{rt}, \text{ pour } t \geq 0.$$

Supposons que l'évolution du cours de l'action S_t est régie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \tag{5.2}$$

où μ et σ sont deux constantes et (B_t) un mouvement brownien standard.

Le modèle est étudié sur l'intervalle $[0, T]$ d'échéance T. Comme nous l'avons vu (cf. chapitre 4, Exercice 2 de la section 4.5), l'EDS (5.2) admet la solution explicite suivante :

$$S_t = x_0 \cdot e^{[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t]},$$

où $x_0 = S_0$ est le cours observé à l'instant 0, il en résulte en particulier que, selon ce modèle S_t suit une loi log-normale (c'est-à-dire que son logarithme sui une loi normale). En particulier, on voit que le prossesus (S_t) vérifie une EDS de type (5.2) si et seulement si le processus $(\log(S_t))$ est mouvement brownien non nécessairement standard. En tenant compte de la définition (2.4.1) du chapitre 2, le processus (S_t) vérifie les propriétés suivantes :

- *Continuité des trajectoires,*
- *indépendance des accroissements relatifs : si $s \leq t, S_t/S_s$ (ce qui revient au même), les accroissements relatifs $(S_t - S_s)/S_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u,\ u \leq s)$,*
- *stationnarité des accroissements relatifs : si $s \leq t$, la loi de $(S_t - S_s)/S_s$ est identique à celle de $(S_{t-u} - S_0)/S_0$.*

Ces propriétés traduisent de façon concrète les hypothèses de Black et Scholes sur l'évolution du cours de l'action (l'actif risqué).

5.1.2 La stratégie autofinancée

Définition 5.1.1.

Une stratégie financière est définie par un processus $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t))_{t\in[0,T]}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, adapté à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$ du mouvement brownien, les composantes ϕ_t^0 et ϕ_t de ϕ, donnant, à l'instant t, les quantités d'actif sans risque et d'actif risqué respectivement détenues en portefeuille. La valeur du portefeuille à l'instant t est alors donnée par :

$$V_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t.$$

Dans les modèles discrets, nous avons caractérisé la stratégie autofinancée par l'égalité : $V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1} \cdot (S_{n+1} - S_n)$, (cf. chapitre 3, remarque (3.1.1) du paragraphe 3.1.3). La transposition de cette égalité à temps continu conduit à écrire la condition d'autofinancement sous la forme suivante :

$$dV_t(\phi) = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t dS_t.$$

Pour que cette égalité ait un sens on imposera la condition :

$$\int_0^T |\phi_t^0| dt < +\infty \, p.s \ \text{et} \ \int_0^T \phi_t^2 dt < +\infty \, p.s.$$

En utilisant les équations (5.1), (5.2), l'intégrale :

$$\int_0^T \phi_t^0 dS_t^0 = \int_0^T \phi_t^0 r e^{rt} dt$$

est bien définie, ainsi que l'intégrale stochastique :

$$\int_0^T \phi_t dS_t = \int_0^T (\phi_t S_t \mu) dt + \int_0^T \sigma \phi_t S_t dB_t,$$

puisque la fonction $t \mapsto S_t$ *est continue, donc bornée sur* $[0, T]$*, presque sûrement.*

Définition 5.1.2.

Une stratégie autofinancée est définie par un couple ϕ *de composantes, les processus adaptés* $(\phi_t^0)_{t\in[0,T]}$ *et* $(\phi_t)_{t\in[0,T]}$ *vérifiant :*

1. $\displaystyle\int_0^T |\phi_t^0| dt + \int_0^T \phi_t^2 dt < +\infty p.s.$
2. $\displaystyle\phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t = \phi_0^0 S_0^0 + \phi_0 S_0 + \int_0^t \phi_s^0 dS_s^0 + \int_0^t \phi_s dS_s \, p.s.$*, pour tout* $t \in [0, T]$.

On pose : $\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ *le cours actualisé à l'instant* t *de l'actif risqué. La proposition suivante est l'analogue de la proposition (3.1.1) du chapitre 3.*

Proposition 5.1.1.

Soit $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t))_{t\in[0,T]}$ *un processus adapté à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$*, vétifiant* $\displaystyle\int_0^T |\phi_t^0| dt + \int_0^T \phi_t^2 dt < +\infty p.s.$ *On pose :*

$$V_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t \text{ et } \widetilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi).$$

Alors ϕ *définit une stratégie autofinanée si et seulement si :*

$$\widetilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_t^0 \phi_s d\widetilde{S}_s p.s., \tag{5.3}$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Démonstration 5.1.1.

Supposons la stratégie ϕ *autofinancée de l'égalité :*

$$\begin{aligned} d\widetilde{V}_t(\phi) &= -re^{-rt} V_t(\phi) dt + e^{-rt} dV_t(\phi) \\ &= -r\widetilde{V}_t(\phi) dt + e^{-rt} dV_t(\phi) \end{aligned}$$

qui résulte de la différenciation du produit des processus (e^{-rt}) *et* $(V_t(\phi))$ *(noter ici que le terme de crochet* $\langle e^{-r\cdot}, V_{\cdot}(\phi)\rangle$ *est nul), on déduit*

$$\begin{aligned} d\widetilde{V}_t(\phi) &= -re^{-rt}(\phi_t^0 e^{rt} + \phi_t S_t) dt + e^{-rt}\phi_t^0 de^{-rt} + e^{-rt}\phi_t dS_t \\ &= \phi_t(-re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t) \\ &= \phi_t d\widetilde{S}_t. \end{aligned}$$

D'où l'égalité (5.3). La démonstration de la réciproque se base sur un raisonnement similaire.

5.2 Evaluation et couverture des options

5.2.1 Probabilité martingale

Reprenant le modèle introduit dans la section 1. Nous allons montrer qu'il existe une probabilité équivalente à la probabilité initiale $\mathbb{P}$*, sous laquelle le prix actualisé* $\widetilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ *de l'action est une martingale. Utilisant l'EDS (Equation Différentielle Stochastique) vérifiée par* (S_t) *on a :*

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t &= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t \\ &= -r\widetilde{S}_t dt + \widetilde{S}_t(\mu dt + \sigma dB_t) \\ &= \widetilde{S}_t\left[(\mu - r)dt + \sigma dB_t\right], \end{aligned}$$

on a utiliser le fait que $e^{-rt}dS_t = \widetilde{S}_t(\mu dt + \sigma dB_t)$*. Si on pose* $W_t = B_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t$*, il vient, alors :* $\sigma dW_t = \sigma dB_t + (\mu - r)dt$*, et par conséquent, on a :*

$$d\widetilde{S}_t = \sigma\widetilde{S}_t dW_t. \tag{5.4}$$

D'après le théorème (2.5.2) de Girsanov appliqué sur $\theta = \frac{\mu-r}{\sigma}$*, il existe une probabilité* $\mathbb{P}^*$ *équivalente à* $\mathbb{P}$ *sous laquelle* $(W_t)_{t\in[0,T]}$ *avec* $W_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$ *est un mouvement brownien standard.*

Remarque 5.2.1.
On admettra par la suite, que la définition de l'intégrale stochastique vu au chapitre 4 est invariante par changement de probabilité équivalente. Alors si on se place sous peobabilité $\mathbb{P}^*$*, de l'égalité (5.4) que* $(\widetilde{S}_t)$ *est une martingale et que :*

$$\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_0 \exp\left((\mu - r)t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right) = \widetilde{S}_0 \exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t).$$

5.2.2 Pricing (tarification ou valorisation)

Dans toute la suite, nous nous limiterons aux options européennes.

Définition 5.2.1.
Une option européenne est définie par une variable aléatoire $\mathcal{F}_T-$*mesurable, positive* h*. Le plus souvent,* h *(l'actif conditionnel) est de la forme* $f(S_T)$*, qui représente le gain que permet l'exercice de l'option (dans le cas d'un call,* $f(x) = (x - K)_+$ *et dans le cas d'un put* $f(x) = (K - x)_+$*, où* K *est le prix d'exercice de l'option).*

Exemple 5.2.1.
Les options européennes sont soumises à un actif sous-jacent particulier. Le profit dégagé à la date T *pour un call est* $h = (S_T^1 - K)_+$ *si l'actif sous-jacent est l'actif* 1 *et si le prix d'exercice de l'option est* K*, où* $x_+ = \max(x, 0)$*. Tandis que pour un put,* $h = (K - S_T^1)_+$*,* h *est la fonction du prix du sous-jacent à la date* T*.*

Comme dans le cas discret, nous allons définir la valeur de l'option on la simulant. Pour des raisons techniques, nous restreindrons la classe des stratégies admissibles de la manière suivante :

Définition 5.2.2.
Une stratégie $\phi = (\phi_{t}^{0},\phi_t)_{t\in[0,T]}$ est admissible si elle est autofinancée et si la valeur actualisée du portefeuille corespondant : $\widetilde{V}_t(\phi) = \phi_t^0 + \phi_t\widetilde{S}_t \geq 0$, $\forall t \in [0,T]$ et telle que $\sup\limits_{t\in[0,T]} \widetilde{V}_t$ est de carré intégrable sous $\mathbb{P}^*$.

L'option est dite simulable si sa valeur à l'échéance est égale à la valeur finale d'une stratégie admissible. Il est nécessaire que h soit de carré intégrable sous $\mathbb{P}^*$, pour que l'option définie par h soit simulable. Dans le cas d'un call $h = (S_T - K)_+$, cette propriété est bien vérifiée puisque $\mathbb{E}^*(S_T^2) < \infty$ et dans le cas d'un put h est même bornée.

Théorème 5.2.1.
Dans le modèle de Black et Scholes, toute option définie par une variable aléatoire h, positive, $\mathcal{F}_T-$mesurable et de carré intégrable sous $\mathbb{P}^*$ est simulable et la valeur à l'instant t de toute portefeuille simulant est donnée par :

$$V_t = \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t\right).$$

La valeur de l'option à l'instant t est donc définie par l'expression $\mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t\right)$.

Démonstration 5.2.1.
Supposons qu'il existe une stratégie admissible ϕ, simulant l'option. La valeur du portefeuille (ϕ_t^0, ϕ_t) à la date t est donnée par :

$$V_t = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t$$

et par hypothèse, on a, $V_T = h$. Soit $\widetilde{V}_t = e^{-rt}V_t$, $(\widetilde{V}_T = he^{-rT})$ la valeur actualisée :

$$\widetilde{V}_t = \phi_t^0 + \phi_t\widetilde{S}_t.$$

Puisque la stratégie est autofinancée, d'après la proposition (3.1.1) et l'égalité (5.4) :

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_t &= V_0 + \int_0^t \phi_s d\widetilde{S}_s \\ &= V_0 + \int_0^t \sigma\phi_s\widetilde{S}_s dW_s.\end{aligned}$$

Sous la probabilité $\mathbb{P}^*$, $\sup\limits_{t\in[0,T]} \widetilde{V}_t$ est de carré intégrable, d'après la définition des stratégies admissibles et l'égalité ci dessus fait apparaître le processus $(\widetilde{V}_t)$ comme une intégrale stochastique par rapport à (W_t). Il en résulte (cf. chapitre 4, équation (4.12) et proposition (4.2.3)) que $(\widetilde{V}_t)$ est, sous $\mathbb{P}^*$, une martingale de carré intégrable. D'où

$$\widetilde{V}_t = \mathbb{E}^*(\widetilde{V}_T|\mathcal{F}_t),$$

et par conséquent :

$$V_t = e^{rt}\widetilde{V}_t = \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t\right). \tag{5.5}$$

Nous avons aussi montré que si le portefeuille ϕ simule l'option définie par h, sa valeur est donnée par l'égalité (5.5). Pour achevé la démonstration du théorème, il reste à démontrer que l'option est bien simulable, c'est-à-dire à trouver des processus (ϕ_t^0) et (ϕ_t) définissant une stratégie admissible et tels que :

$$\phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t = \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t\right).$$

Sous la probabilité $\mathbb{P}^*$, le processus définie par $M_t = \mathbb{E}^*(e^{-rT}h|\mathcal{F}_t)$ est une martingale de carré intégrable. $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration naturelle de (B_t), et aussi la filtration naturelle de (W_t), d'après le théorème (2.5.3) de représentation des martingales browniennes, il existe un processus adapté $(K_t)_{t\in[0,T]}$: tel que $\mathbb{E}^*(\int_0^T K_s^2 ds) < +\infty$ et :

$$\forall t \in [0,T]\ M_t = M_0 + \int_0^t K_s dW_s p.s..$$

La stratégie $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t))_{t\in[0,T]}$, avec $\phi_t = K_t/(\sigma\widetilde{S}_t)$ et $\phi_t^0 = M_t - \phi_t\widetilde{S}_t$, est alors, d'après la proposition (3.1.1) et l'égalité (5.4), une stratégie autofinancée, dont la valeur à la date t est donnée par :

$$V_t(\phi) = e^{rt}M_t = \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t\right),$$

d'après cette expression, $V_t(\phi)$ est une variable aléatoire positive, que $\sup\limits_{t\in[0,T]} V_t(\phi)$ est de carré intégrable sous $\mathbb{P}^*$ et que $V_T(\phi) = h$. On a donc bien une stratégie admissible simulant h.

Remarque 5.2.2.

Quand la variable aléatoire h est de la forme $h = f(S_T)$, on peut expliciter la valeur V_t de l'option à la date t comme une fonction de t et S_t. On a en effet :

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}f(S_T)|\mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}f(S_t e^{r(T-t)}e^{\sigma(W_T-W_t)-(\sigma^2/2)(T-t)}|\mathcal{F}_t)\right). \end{aligned}$$

Or, la variable aléatoire S_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable et $W_T - W_t$ est indépendante de $\mathcal{F}_t$ sous $\mathbb{P}^*$. On a donc $V_t = F(t, S_t)$, avec

$$F(t,x) = \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}f\left(xe^{r(T-t)}e^{\sigma(W_T-W_t)-(\sigma^2/2)(T-t)}\right)\right), \tag{5.6}$$

comme, sous $\mathbb{P}^*$, $W_T - W_t$ est gaussienne centrée de variance $T-t$:

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{+\infty} f(xe^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}})\frac{e^{-y^2/2}dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

Le calcul de F peut s'améliorer dans le cas du call ($f(x) = (x-K)_+$) et du put ($f(x) = (K-x)_+$). Par exemple si l'on prend $f(x) = (x-K)_+$, on a, d'après l'égalité (5.6) :

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \mathbb{E}^* \left(e^{-r(T-t)} \left(x e^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)} - K \right)_+ \right) \\ &= \mathbb{E}^* \left(x e^{\sigma\sqrt{\theta}g - \sigma^2\theta/2} - K e^{-r\theta} \right)_+ , \end{aligned}$$

avec $\theta = T-t$ et g est une gaussienne centrée réduite.

5.2.3 Couverture des calls et des puts

Dans l'épreuve du théorème (5.2.1), nous avons invoqué le théorème (2.5.3) de représentation des martingales browniennes pour prouver l'existence d'un portefeuille simulant. Dans la pratique, il est important de pouvoir construire efficacement le portefeuille simulant pour couvrir une option et on ne peut pas se contenter d'un simple théorème d'existence. Nous allons voir comment, dans le cas où l'option est définie par une variable aléatoire de la forme $h = f(S_T)$, on peut expliciter le portefeuille de couverture. Un portefeuille simulant est donné, pour chaque instant t, par la valeur actualisée :

$$\widetilde{V}_t = e^{-rt} F(t, S_t),$$

où F est la fonction définie par l'égalité (5.6). Sous des hypothèses très larges sur f, et dans les du call et du put où on dispose des formules explicites de la remarque (5.2.2), on remarque que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}$. Si on pose :

$$\widetilde{F}(t,x) = e^{-rt} F(t, xe^{rt}).$$

on a : $\widetilde{V}_t = \widetilde{F}(t, \widetilde{S}_t)$ et, pour $t < T$, d'après la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(t,\widetilde{S}_t) &= \widetilde{F}(0,\widetilde{S}_0) + \int_0^t \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(s,\widetilde{S}_s) d\widetilde{S}_s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}(s,\widetilde{S}_s) ds + \int_0^t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x^2}(s,\widetilde{S}_s) d\langle \widetilde{S}, \widetilde{S} \rangle_s . \end{aligned}$$

De l'égalité $d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}\sigma dW_t$, on déduit que $d\langle \widetilde{S}, \widetilde{S}\rangle_s = \sigma^2 \widetilde{S}_s^2 ds$, d'où la fonction $\widetilde{F}(t,\widetilde{S}_t)$ prend la forme suivante :

$$\widetilde{F}(t,\widetilde{S}_t) = \widetilde{F}(0,\widetilde{S}_0) + \int_0^t \sigma \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(s,\widetilde{S}_s) \widetilde{S}_s dW_s + \int_0^t K_s ds.$$

Or, $\widetilde{F}(t,\widetilde{S}_t)$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$. le processus K_s est nécessairement nul. D'où :

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(t,\widetilde{S}_t) &= \widetilde{F}(0,\widetilde{S}_0) + \int_0^t \sigma \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(s,\widetilde{S}_s) \widetilde{S}_s dW_s \\ &= \widetilde{F}(0,\widetilde{S}_0) + \int_0^t \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(s,\widetilde{S}_s) \widetilde{S}_s d\widetilde{S}_s . \end{aligned}$$

Le processus de couverture ϕ_t prend la forme :

$$\phi_t = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(t, \widetilde{S}_t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t).$$

Si on pose $\phi_t^0 = \widetilde{F}(t, \widetilde{S}_t) - \phi_t \widetilde{S}_t$, le portefeuille (ϕ_t^0, ϕ_t) est autofinancé et sa valeur actualisée est $\widetilde{V}_t = \widetilde{F}(t, \widetilde{S}_t)$.

Remarque 5.2.3.

Le calcul précédent montre qu'on peut traiter les options de la forme $f(S_T)$ sans passer par le théorème de représentation des martingales browniennes.

Solutions

Chapitre2

Exercice 1 :

i) Soit $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit de montrer que $\{\tau \wedge \nu \le n\}$, $\{\tau \vee \nu \le n\}$, et $\{\tau + \nu \le n\}$ sont des éléments de $\mathcal{F}_n$. Or

$$\{\tau \wedge \nu \le n\} = \{\tau \le n\} \cup \{\nu \le n\}$$

et τ et ν étant des temps d'arrêt, $\{\tau \le n\}$, et $\{\nu \le n\}$ appartiennent à $\mathcal{F}_n$ et donc $\{\tau \wedge \nu \le n\} \in \mathcal{F}_n$. De même $\{\tau \vee \nu \le n\} = \{\tau \le n\} \cap \{\nu \le n\} \in \mathcal{F}_n$. Enfin,

$$\{\tau + \nu \le n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{\tau \le k\} \cap \{\nu \le n-k\}.$$

Or, pour $0 \le k \le n$, $\{\tau \le k\} \subset \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ et $\{\nu \le n-k\} \subset \mathcal{F}_{n-k} \subset \mathcal{F}_n$; donc $\{\tau + \nu \le n\} \in \mathcal{F}_n$.

ii) Soient $A \in \mathcal{F}_\tau$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme $\{\nu \le n\} \subset \{\tau \le n\}$, on a $A \cap \{\nu \le n\} = A \cap \{\tau \le n\} \cap \{\nu \le n\}$.
Mais $A \cap \{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n$ et $\{\nu \le n\} \in \mathcal{F}_n$ (ν est un temps d'arrêt) ; donc $A \cap \{\tau \le n\} \cap \{\nu \le n\} \in \mathcal{F}_n$ et $A \cap \{\nu \le n\} \in \mathcal{F}_n$. Donc $A \in \mathcal{F}_\nu$.

iii) On sait déjà, d'après i) et ii), que $\mathcal{F}_{\tau \wedge \nu} \subset \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\nu$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $A \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\nu$, évidemment $A \in \mathcal{F}_\infty$. Pour montrer que $A \in \mathcal{F}_{\tau \wedge \nu}$, on doit prouver que, pour tout $k \ge 0$, $A \cap \{\tau \wedge \nu \le k\} \in \mathcal{F}_k$. Mais on sait déjà que $A \cap \{\tau \le k\} \in \mathcal{F}_k$ et $A \cap \{\nu \le k\} \in \mathcal{F}_k$. Donc, en se rappelant que $\{\tau \wedge \nu \le k\} = \{\tau \le k\} \cup \{\nu \le k\}$,

$$A \cap \{\tau \wedge \nu \le k\} = A \cap (\{\tau \le k\} \cup \{\nu \le k\}) = (A \cap \{\tau \le k\}) \cup (A \cap \{\nu \le k\}) \in \mathcal{F}_k.$$

iv) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\{\tau < \nu\} \cap \{\tau \le n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{\tau = k\} \cap \{\nu > k\}.$$

Mais, pour $0 \le k \le n$,

$$\begin{aligned} \{\tau = k\} &= \{\tau \le k\} \cap \{\tau \le k-1\}^c \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n, \\ \{\nu > k\} &= \{\nu \le k\}^c \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n. \end{aligned}$$

De ce fait, $\{\tau < \nu\} \cap \{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n$ *et* $\{\tau < \nu\} \in \mathcal{F}_\tau$*. on a de même,*

$$\{\tau < \nu\} \cap \{\nu \le n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{\nu = k\} \cap \{\tau < k\}.$$

et comme, pour $0 \le k \le n$, $\{\nu = k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ *et* $\{\tau < k\} = \{\tau \le k-1\} \in \mathcal{F}_{k-1} \subset \mathcal{F}_n$*, on a aussi* $\{\tau < \nu\} \cap \{\nu \le n\} \in \mathcal{F}_n$ *et* $\{\tau < \nu\} \in \mathcal{F}_\nu$*. Enfin,*

$$\{\tau = \nu\} = \{\tau < \nu\}^c \cap \{\nu < \tau\}^c \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\nu.$$

Exercice 2 :

1. *Soit* $Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et* $X_n = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)$*, donc* $X_{n+1} = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_{n+1})$*, on a :*
   - $\mathbb{E}(|X_n|) \le \mathbb{E}(|Y|) < +\infty$,
   - $$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n\right) \\ &= \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n) \ \ \mathbb{P} \ p.s. \end{aligned}$$

2. $X_1, \ldots, X_n$ *une famille de v.a. intégrable, centrée et indépendantes 2 à 2.*
   On pose : $S_i = X_1 + \cdots + X_i$*, i.e.* $S_{i+1} = S_i + X_{i+1}$, $\forall i \ X_{i+1} \coprod \mathcal{F}_i$
   - $\mathbb{E}(|S_i|) < +\infty$ ($\forall i$, X_i *est centrée*),
   - $$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{i+1}|\mathcal{F}_i) &= \mathbb{E}(S_i + X_{i+1}|\mathcal{F}_i) \\ &= \mathbb{E}(S_i|\mathcal{F}_i) + \mathbb{E}(X_{i+1}|\mathcal{F}_i) \\ &= S_i + \mathbb{E}(X_{i+1}) \\ &= S_i \ \ (car\ \mathbb{E}(X_{i+1}) = 0). \end{aligned}$$

Exercice 3 :

Soit $(X_n; n \in \mathbb{N})$ *une suite de v.a.i.i.d (indépendantes et de même loi). on note* $m = \mathbb{E}(X_1) < +\infty$ *et* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ *et* $Y_n = \sum_{i=1}^{n} iX_i - \frac{n(n+1)}{2}m$.

- $$\begin{aligned} Y_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} iX_i - \frac{(n+1)(n+2)}{2}m \\ &= \sum_{i=1}^{n} iX_i + (n+1)X_{n+1} - \frac{(n+1)(n+2)}{2}m. \end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(iX_i|\mathcal{F}_n) + (n+1)\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - m\frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} iX_i + (n+1)\mathbb{E}(X_{n+1}) - m\frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} iX_i + (n+1)m - m\frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} iX_i + (n+1)m\left[1 - \frac{n+2}{2}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} iX_i - \frac{n(n+1)}{2}m \\
&= Y_n.
\end{aligned}$$

– *Comme Y_n est finie par construction, Y_n est $\mathcal{F}_n$−martingale.*

Exercice 4 :

– *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. à valeurs $[0,1]$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. On suppose que $X_0 = a \in [0,1]$ et que*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{X_n}{2}|\mathcal{F}_n) = 1 - X_n, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2}|\mathcal{F}_n) = X_n.$$

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}(X_n) < +\infty,$ *car* $\forall n,\ X_n \in [0,1]$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \frac{X_n}{2} \cdot \mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{X_n}{2}|\mathcal{F}_n) + \frac{1+X_n}{2} \cdot \mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2}|\mathcal{F}_n) \\
&= \frac{X_n}{2} \cdot (1 - X_n) + \frac{1+X_n}{2} \cdot X_n \\
&= \frac{X_n}{2} [(1 - X_n) + (1 + X_n)] \\
&= X_n.
\end{aligned}$$

3. *D'après une propriété d'espérance conditionnelle, on a,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2|\mathcal{F}_n)) \\
&= \mathbb{E}(X_{n+1}^2 - 2X_{n+1}X_n + X_n^2|\mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) - 2X_n^2 + X_n^2.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) &= \left(\frac{X_n}{2}\right)^2 (1 - X_n) + \left(\frac{X_{n+1}}{2}\right)^2 X_n \\
&= \frac{X_n}{4}(1 + 3X_n),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X_{n+1}-X_n)^2|\mathcal{F}_n)) &= \frac{X_n}{4}(1+3X_n)-X_n^2\\ &= \frac{1}{4}X_n(1-X_n).\end{aligned}$$

<u>Exercice 7</u> :

1. $*$ *On a* $\mathbb{E}(B_sB_t^2)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(B_sB_t^2|\mathcal{F}_s)\right)$. *La v.a.* B_s *est* $\mathcal{F}_s-$*mesurable, d'où, si* $t>s, \mathbb{E}(B_sB_t^2)=\mathbb{E}\left(B_s\mathbb{E}(B_t^2|\mathcal{F}_s)\right)$.
   On sait que B_t^2-t *est une martingale, donc* $\mathbb{E}(B_t^2|\mathcal{F}_s)=B_s-s+t$. *En utilisant le fait que* B_t *est centré et que* $\mathbb{E}(B_t^3)=0$, *on obtient que*
   $$\mathbb{E}(B_sB_t^2)=\mathbb{E}(B_s(B_s-s+t))=\mathbb{E}(B_s^3)=0.$$
   $*$ *Si* $s>t$,
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_sB_t^2) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(B_sB_t^2|\mathcal{F}_t)\right)\\ &= \mathbb{E}\left(B_t^2\mathbb{E}(B_s|\mathcal{F}_t)\right)=\mathbb{E}(B_t^3)=0,\end{aligned}$$
   Le mouvement brownien est une martingale, donc $\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s)=\begin{cases}B_s, & si\ t\geq s\\ B_t & si\ t<s.\end{cases}$
   Le premier cas, pour $t\geq s$, B_t *est un mouvement brownien, le deuxième cas, pour* $t<s$, B_t *est* $\mathcal{F}_s-$*mesurable.*
   $*$ *Si* $t\geq s$ $\mathbb{E}(B_t|B_s)=\mathbb{E}(B_t-B_s+B_s|B_s)=\mathbb{E}(B_t-B_s|B_s)+B_s=B_s$ *car* B_t-B_s *est indépendant de* B_s *et centré.*
2. *Pour* $s\leq t$
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_t^2B_s^2) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(B_t^2B_s^2|\mathcal{F}_s))\\ &= \mathbb{E}(B_s^2\mathbb{E}(B_t^2|\mathcal{F}_s))\\ &= \mathbb{E}(B_s^2\underbrace{\mathbb{E}(B_t^2-t|\mathcal{F}_s)}_{=B_s^2-s}+t)\\ &= \mathbb{E}(B_s^4+(t-s)B_s^2)=3s^4+t(t-s).\end{aligned}$$
   De même pour $t<s$ $\mathbb{E}(B_t^2B_s^2)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(B_t^2B_s^2|\mathcal{F}_t))=3t^4+s(s-t)$.
3. *La variable aléatoire* B_t+B_s *est gaussienne centrée (car* B *est un processus gaussien), on peut écrire* B_t+B_s *comme une somme de deux v.a. gaussiennes indépendantes :* $B_t+B_s=(B_t-B_s)+2B_s$. *Donc*
   $$\begin{aligned}Var((B_t-B_s)+2B_s) &= Var(B_t-B_s)+4Var(B_s)\\ &= t-s+4s=t+3s.\end{aligned}$$
4. *Soit* θ_s *une v.a. bornée* $\mathcal{F}_s-$*mesurable. On a, pour* $s\leq t$
   $$\mathbb{E}(\theta_s(B_t-B_s))=\mathbb{E}(\mathbb{E}(\theta_s(B_t-B_s)|\mathcal{F}_s))=\mathbb{E}(\theta_s\mathbb{E}(B_t-B_s|\mathcal{F}_s))=\mathbb{E}(\theta_s\mathbb{E}(B_t-B_s))=0.$$
   De même
   $$\mathbb{E}(\theta_s(B_t-B_s)^2)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(\theta_s(B_t-B_s)^2|\mathcal{F}_s))=\mathbb{E}(\theta_s\mathbb{E}((B_t-B_s)^2|\mathcal{F}_s))=(t-s)\mathbb{E}(\theta).$$

Chapitre 4

Exercice 1 :

– *Soit* α, σ *deux constantes réelles,* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un* $\mathcal{F}_t-$*mouvement Brownien et*

$$dX_t = -\frac{1}{2}\alpha X_t dt + \frac{1}{2}\sigma dB_t.$$

d'après la définition de processus d'Itô :

$$dX_t = K_t dt + H_t dB_t \text{ avec } K_s = -\frac{1}{2}\alpha X_s \text{ et } H_s = \frac{1}{2}\sigma,$$

deux processus $\mathcal{F}_t-$*adaptés.*

– *Soit* $Y_t = X_t \cdot e^{\frac{\alpha t}{2}}$*, donc* $dY_t = d(X_t \cdot e^{\frac{\alpha t}{2}})$*, d'après la formule d'intégration par partie :*

$$\begin{aligned} d(Y_t) &= X_t d(e^{\frac{\alpha t}{2}}) + e^{\frac{\alpha t}{2}} dX_t + d\langle X, e^{\frac{\alpha}{2}}\rangle_t \\ &= \frac{\alpha}{2} \cdot X_t \cdot e^{\frac{\alpha t}{2}} dt + e^{\frac{\alpha t}{2}}(-\frac{1}{2}\alpha X_t dt + \frac{1}{2}\sigma dB_t) \\ &= \frac{\sigma}{2} \cdot e^{\frac{\alpha t}{2}} dB_t, \end{aligned}$$

notons que $d\langle X, e^{\frac{\alpha}{2}}\rangle_t = H_t \cdot H_t' dt = 0$*. Il vient, alors* $Y_t = Y_0 + \frac{\sigma}{2} \cdot e^{\frac{\alpha t}{2}} \int_0^t dB_s.$

–

$$\begin{aligned} X_t &= e^{-\frac{\alpha t}{2}} \cdot Y_t \\ &= Y_0 \cdot e^{-\frac{\alpha t}{2}} + \frac{\sigma}{2} \int_0^t dB_s. \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Nous cherchons un processus adapté $(S_t)_{t\geq 0}$ *solutions de :*

$$dS_t = S_t\left(\mu dt + \sigma dB_t\right), \quad S_0 = x_0$$

et tel que les intégrales $\int_0^t S_s ds$ *et* $\int_0^t S_s dB_s$ *aient un sens et qui vérifie,*

$$\forall t : \mathbb{P} \text{ p.s. } S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s.$$

On a :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(\mu dt + \sigma dB_t\right), \text{ i.e. } \log(S_t) = \int_0^t \mu ds + \sigma dB_s, \ S_t \text{ positive.}$$

Appliquons la formule d'Itô sur le processus $Y_t = f(S_t) = \log(S_t)$, où S_t est un processus d'Itô avec $K_s = \mu S_s$, $H_s = \sigma S_s$, et $d\langle S, S\rangle_s = H_s^2 ds = \sigma^2 S_s^2 ds$,

$$\begin{aligned}
Y_t &= \log(S_t) = \log(S_0) + \int_0^t \log^{'}(S_s) dS_s + \frac{1}{2}\int_0^t \log^{''}(S_s) d\langle S, S\rangle_s \\
&= \log(x_0) + \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{S_s^2}\cdot \sigma^2 S_s^2 ds \\
&= \log(x_0) + \int_0^t \frac{S_s(\mu ds + \sigma dB_s)}{S_s} - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t ds \\
&= \log(x_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_t &= \log(S_t) \Longleftrightarrow S_t = e^{Y_t} \\
S_t &= e^{\log(x_0)+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t} \\
&= x_0 \cdot e^{[(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t]}.
\end{aligned}$$

Exercice 3 :
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ une base stochastique, B un mouvement brownien standard et λ une constante réelle.

1. *Appliquant la formule d'Itô sur $Y_t = f(X_t) = \frac{X_t}{1-X_t}$:*

$$Y_t = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d\langle X, X\rangle_s \text{ avec } \langle X, X\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds,$$

X_t est un processus d'Itô avec $K_s = -\lambda^2 X_s^2(1-X_s)$, $H_s = \lambda X_s(1-X_s)$ et $d\langle X, X\rangle_s = \lambda^2 X_s^2(1-X_s)^2 ds$, de plus, $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$.
On remplace dans la formule, on obtient :

$$\begin{aligned}
Y_t &= \frac{x}{1-x} + \int_0^t \frac{1}{(1-X_s)^2}[-\lambda^2 X_s^2(1-X_s)ds + \lambda X_s(1-X_s)dB_s] \\
&+ \int_0^t \frac{1}{(1-X_s)^3}\lambda^2 X_s^2(1-X_s)^2 ds \\
&= \frac{x}{1-x} + \int_0^t \frac{\lambda X_s}{(1-X_s)} dB_s \\
&= \frac{x}{1-x} + \int_0^t \lambda Y_s dB_s.
\end{aligned}$$

2. *On a $dY_t = \lambda Y_t \cdot dB_t$ i.e., $\displaystyle\int_0^t \frac{dY_s}{Y_s} = \int_0^t \lambda dB_s \Longrightarrow \ln Y_t = \lambda \int_0^t dB_s$.*
Déterminons l'EDS vérifiée par $g(Y_t) = \ln Y_t$, par la formule d'Itô

$$\ln Y_t = g(Y_t) = g(Y_0) + \int_0^t g^{'}(Y_s)dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t g^{''}(Y_s) d\langle Y, Y\rangle_s$$

avec $K_s = 0$, $H_s = -\lambda Y_s$ *et* $d\langle Y, Y\rangle_s = \lambda^2 Y_s^2 ds$, *de plus,* $f'(y) = \frac{1}{y}$ *et* $f''(x) = -\frac{1}{y^2}$. *Donc :*

$$\begin{aligned}\ln Y_t &= \ln \frac{x}{1-x} + \lambda \int_0^t dB_s - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t ds \\ &= \ln \frac{x}{1-x} + \lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}.\end{aligned}$$

$$Y_t = \frac{x}{1-x} \cdot \exp[\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}].$$

Or ;

$$Y_t = \frac{X_t}{1-X_t} \Longleftrightarrow X_t = \frac{Y_t}{Y_t + 1}.$$

Finalement ;

$$\begin{aligned}X_t &= \frac{\frac{x}{1-x} \cdot \exp[\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}]}{\frac{x}{1-x} \cdot \exp[\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}] + 1} \\ &= \frac{x \cdot \exp[\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}]}{x \cdot \exp[\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}] + 1 - x}.\end{aligned}$$

Exercice 5 :
On considère l'équation :

$$dX_t = a(t)X_t dt + b(t)dt + c(t)dB_t$$

$a(t), b(t)$ *et* $c(t)$ *sont des processus adaptés,* B_t *un mouvement Brownien standard.*

1. *Soit l'équation homogène :* $dX_t = a(t)X_t dt$, $b = c = 0$,

$$\int_0^t \frac{dX_s}{X_s} = \int_0^t a(s)ds \Longleftrightarrow X_t = Y \cdot e^{\alpha(t)}, \text{ avec } \alpha(t) = \int_0^t a(s)ds.$$

2. *Variation de la constante : posons* $Y(t) = e^{-\alpha(t)}X_t$, $Y_0 = X_0$. *D'après la formule du produit :*

$$\begin{aligned}dY_t &= e^{-\alpha(t)}dX_t + X_t d(e^{-\alpha(t)}),\ \langle X, e^{-\alpha}\rangle_t = 0 \\ &= e^{-\alpha(t)}\left(a(t)X_t dt + b(t)dt + c(t)dB_t\right) + X_t\left(-a(t)e^{-\alpha(t)}dt\right) \\ &= e^{-\alpha(t)}[b(t)dt + c(t)dB_t].\end{aligned}$$

En intégrant, il vient :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t e^{-\alpha(s)}b(s)ds + \int_0^t e^{-\alpha(s)}c(s)dB_s.$$

Comme $X_0 = Y_0$,

$$X_t = X_0 e^{\alpha(t)} + \int_0^t e^{\alpha(t)-\alpha(s)} b(s)ds + \int_0^t e^{\alpha(t)-\alpha(s)} c(s)dB_s.$$

Cas particulier : $a(t) = -\frac{1}{1+t} \Longrightarrow \alpha(t) = -\log(1+t),\ b(t) = 0,\ c(t) = \frac{1}{1+t},$ *alors,*

$$\begin{aligned} X_t &= \int_0^t \left(\frac{1+s}{1+t}\right) \cdot 0ds + \int_0^t \frac{1+s}{1+t} \cdot \frac{1}{1+s} dB_s \\ &= \frac{1}{1+t} \cdot B_t. \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] L. BACHELIER, Théorie de la spéculation, thèse, *Annales scientifiques de l'école normale supérieur, Série 3, (17) : 21-86, janvier 1900.*

[2] P. BALDI, L. MAZLIAK P. PRIOURET, Martingales et Chaînes de Markov : Théorie élémentaire et exercices corrigés, Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem, Université de Rouen, Paris, Hermann, 2000.

[3] T. BJÖRK, Arbitrage theory in continuous time, *Oxford, Oxford university press, 2e édition, 2004.*

[4] F. BLACK, M. SCHOLES, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy, (81) : 637-654, May-June 1973.*

[5] J. BOISSONNADE, Les options exotiques , *Paris, ESKA, 1997.*

[6] J. COX, A. ROSS M. RUBINSTEIN Option pricing : a simplified approach, *Journal of Financial Economocs, vol 7, pp. 229-263, 1979.*

[7] J.C. COX, M. RUBINSTEIN Options Markets, *Prenctice-Hall, London, 1985.*

[8] J. DIXMIER, L'intégrale de Lebesgue, *centre de documentation universitaire, Paris, 1962.*

[9] D. FOATA A. FUCHS, Processus stochastiques Processus de Poisson, Chaînes de Markov et Martingales, Cours et exercices corrigés, *Dunod, Paris, 2002.*

[10] J.M. HARRISON, S. PLISKA, Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, stochastic processus and their applications, *(11) : 215-260, 1981.*

[11] N. IKEDA and S. WATANABE, Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, *North Holland, 1981.*

[12] J.JACOD et P.PROTTER, L'essentiel en théorie des probabilités, *Vuibert, Paris,2003.*

[13] J. JACOD and A. SHIRYAEV, Limit Theorems for Stochastic Processes, *Springer, Verlag, New York, 1987.*

[14] M. JEANBLANC, Cours de Calcul Stochastique, *Septembre 2002.*

[15] M. JEANBLANC, T. SIMON, Elements de calcul stochastique, *Septembre 2005.*

[16] *I. KARATZAS, S.E. SHREVE,* Brownien Motion and Stochastic Calcul, *Springer, 1988.*

[17] *I. KARATZAS, and S.E SHREVE,* Methods of Mathematical Finance, *Springer, Verlag, New York (1998).*

[18] *D. LAMBERTON, B. LAPEYER,* Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance, *Ellipses, 2nd. ed.1997.*

[19] *M. MINOUX,* Programmation mathématique, *2 tomes. Dunod, 1983.*

[20] *A.J. MORTON* Arbitrage and Martingales, *PhD thesis, Cornell University, 1989.*

[21] *J. NEVEU,* Martingales à temps discret, *Masson, 1972.*

[22] *R.S. LIPTSER and A. N. SHIRYAYEV,* Theory of Martingales, *Kluwer, Dordrecht, 1990.*

[23] *B. OKSENDAL,* Stochastic Differential Equations, *Springer, 2005.*

[24] *P.E. PROTTER,* Stochastic Integration and Differential Equations, *Springer, 1990,2nd. ed.2003.*

[25] *E. ROMUALD,* Calcul stochastique appliqué à la finance*, ENSAE, Avril 2006.*

[26] *N. ROUSSEAU,* Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance, *Laboratoire Dieudonné, Université de Nice-Sophia Antipolis, January 29, 2007.*

[27] *P. TANKOV,* Mathématiques financières, *Master 2 ISIFAR, édition 2013-2014.*

[28] *N. TOUZI,* Martingales en temps discret et Chaînes de Markov, *Ecole Polytechnique, Département de Mathématiques Appliquées, Paris, Septembre 2009.*

[29] *D. VILLEMONAIS,* Probabilités, Polycopie, *Première Année FICM, Semestre 2, École des Mines de Nancy, 2016-2017.*