وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الجيلالي اليابس – سيدي بلعباس –
كلية العلوم الاقتصادية التجارية وعلوم التسيير

مطبوعة في مقياس:

رياضيــات المؤسســـة

موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس
"علوم اقتصادية"

السنة الجامعية 2020 –2021

فهرس المحتويات

الفصل الأول: مفاهيم أساسية حول بحوث العمليات

الفصل الثاني: البرمجة الخطية

الفصل الثالث: الطريقة البيانية لحل مسائل البرمجة الخطية

الفصل الرابع: الطريقة المبسطة (طريقة الجداول) لحل مسائل البرمجة الخطية

الفصل الخامس: النموذج المقابل (الثنائي) في طريقة السمبلكس و تحليل الحساسية

الفصل السادس: مسائل النقل

1- ماهية علم بحوث العمليات:

تعتبر بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة (التي تهتم بالتخصيص الأمثل للموارد النادرة) فنا وعلما على السواء. يتمثل الفن في القدرة على التعبير عن مفاهيم الكفاءة والندرة في نموذج رياضي محدد تحديد جيد بالنسبة لموقف معين، أما العلم فيتمثل في اشتقاق الطرق الحسابية لحل هذه النماذج الرياضية، وقد أحرز تطبيقها نجاحا واسعا في المجالات المدنية والعسكرية على السواء. لقد تشكل أول عنصر تطبيقي لبحوث العمليات خلال الحرب العالمية الثانية، حيث ظهرت العديد من المعضلات التعبوية والسوقية لقوات الحلفاء وكان يصعب الحصول على حلول لتلك المعضلات من قبل جهة معينة ذات اختصاص واحد ولذلك قررت القيادة العامة لقوات الحلفاء تشكيل أول مجموعة استشارية مختلطة تضم عدد من العلماء الاختصاصين للتعاون وتقديم المشورة لقيادة القوات المسلحة لقد سميت هذه المجموعة الاستشارية بفريق بحوث العمليات، حيث دأبت لجنة بحوث العمليات منذ بداية تشكيلها على دراسة الوضع العسكري لقوات الحلفاء وتقديم الأساليب العلمية لتحركات القوات المعادية ولإنزال أقصى الضربات فيها.

2- تعريف علم بحوث العمليات:

ظهر هذا العلم أواخر الحرب العالمية الثانية من القرن الماضي، ويقصد به تطبيق الوسائل والطرق والنظريات العلمية التي تواجه المدراء، وقد عرفها (Wagner) بأنها مدخل علمي لحل المشكلات الإدارية والتي محورها الأساسي اتخاذ القرار[1]. وعموما، فإن بحوث العمليات تساعد متخذي القرار بشكل جيد لأنها:

- تصف المشكلة موضوع القرار بشكل دقيق.
- تحديد البدائل المختلفة كحلول للمشكلة.
- مقارنة البدائل المقترحة للحلول واختيار أفضلها وعليه لصياغة المشكلة لابد من تحديد العناصر التالية: "تحديد الأهداف، تحديد البدائل، تحديد المتغيرات، تعظيم العوائد أو تقليل التكاليف".

[1] صالح العامري وعواطف الحداد، (2009)، **"تطبيقات بحوث العمليات"**، الطبعة الأولى، اثراء للنشر والتوزيع، الأردن، ص 14.

3- نشأة بحوث العمليات:

يرجع البعض اكتشاف أساليب بحوث العمليات إلى ما بعد الثورة الصناعية إذ كانت الحاجة قائمة إلى تطوير أساليب العمل والإنتاج، وكما يرى بعض المهتمين إلى أن اكتشاف أساليب بحوث العمليات يرجع إلى جهود عالم البدالة الإنجليزي (Erlang) سنة 1908، عندما ساهم في اكتشاف وتطوير نظرية الطوابير[2].

بينما يعزى البعض الأخر إلى أن اكتشاف بحوث العمليات كان ولادة حية لمخاض الحرب العالمية الثانية ومن أهم النتائج هو تطوير نموذج رياضي أطلق عليه نموذج البرمجة الخطية.

لقد وضعت عدة تعريفات لبحوث العمليات، ومن أبرز هذه التعاريف ذلك التعريف الذي اعتمدته جمعية بحوث العمليات البريطانية حيث عرفت بحوث العمليات بأنها[3]: " استخدام الأساليب العلمية لحل المعضلات المعقدة في إدارة أنظمة كبيرة من القوى العاملة والمعدات، والمواد الأولية، والأموال في المصانع والمؤسسات الحكومية وفي القوات المسلحة". أما جمعية بحوث العمليات الأمريكية فقد اعتمدت التعريف التالي: "ترتبط بحوث العمليات باتخاذ القرارات العلمية حول كيفية تصميم وعمل أنظمة المعدات، القوى العاملة وفقا لشروط تتطلب تخصيصا في الموارد النادرة".

بالنتيجة فإن محور بحوث العمليات هو وجود مشكلة تتطلب اتخاذ قرار وتزداد الحاجة إلى بحوث العمليات كلما ازدادت درجة تعقيد المشكلة وعلم بحوث العمليات يعتمد على استخدام النماذج الرياضية كقالب تصاغ فيه المشكلة الإدارية إلا أن نجاح تكوين النموذج وتطبيقه يعتمد على متخذ القرار ويتوقف نجاح عملية جمع البيانات للنموذج والتحقق من صحة تمثيله للواقع وتطبيقه على القدرة على إيجاد خطوط اتصال جيدة بين هؤلاء الذين لديهم المعلومات وبين من سيقوم بالتطبيق وفريق بحوث العمليات من العوامل المهمة التي ساعدت اختصاص بحوث العمليات في حل المعضلات المعقدة تطور الحاسب الذي أدى إلى وجود شركات متخصصة في إعداد البرمجيات والأنظمة المتعلقة بأساليب بحوث العمليات. وتساهم بحوث العمليات في تقييم بدائل العمل المتاحة، حيث يتم انتخاب البديل الأفضل للمنظومة ككل.

تعرف بحوث العمليات على أنها استخدام الأساليب الكمية للمساعدة في حل المشاكل واتخاذ القرارات الرشيدة حيثما أمكن ذلك[4].

---

[2] محمود الفياض وعيسى قدادة، (2007)، **"بحوث العمليات"**، اليازوري للنشر والتوزيع، الأردن، ص 4.

3 مراد عوض، (2010)، **"الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية"**، الطبعة الأولى، دار البداية للنشر، الأردن، ص 14.

[4] بقه جي، صباح الدين، يوسف جمال، (2000)، **"بحوث العمليات"**، جامعة دمشق.

و يطلق على بحوث العمليات مسمى التحليل الكمي (Quantitative analysis) نسبة إلى الأساليب الكمية التي تستخدمها في اتخاذ القرارات وحل المشاكل. كما ويطلق عليها مسمى علم الإدارة (Managment science) للأسباب التالية[5]:

- تستخدم الطرق العلمية (Methodology) في البحث والاستقصاء للمساعدة في اختيار البديل الأفضل (Optimal solution) من بين البدائل المتاحة (Available Alternatives)، وللتحقق من صحة النماذج التي يتم تطويرها.
- تمييزها عن الإدارة العلمية (Scientific Managment) التي استخدمت أيضا أساليب علمية لرفع إنتاجية العاملين.

وتجدر الإشارة إلى أن بحوث العمليات تستخدم في حل المشاكل واتخاذ القرارات التي يمكن بناء نموذج لها والتعبير عنها بصيغة كمية. وبذلك فإن البديل الذي يتم اختياره يكون أفضل البدائل في ذلك الحين وفي ظل الظروف السائدة عندئذ، إذ يسمى القرار الذي يترتب على ذلك قرارا رشيدا (Rational Decision).

تركز بحوث العمليات على الإنتاجية وعلى عملية التخطيط، وتستخدم للتعامل مع الجوانب الكمية التي تهدف إلى تحقيق الكفاءة الإنتاجية (Production Efficiency) كثمرة طبيعية للتخطيط السليم المبني على منهجية علمية صحيحة.

4- أسباب ظهور بحوث العمليات وتطورها:

إن تطور جوانب الحياة المختلفة في عالم اليوم وتعقد الأعمال وتنوعها بشكل كبير يحتاج إلى قرارات صائبة وسريعة تتناسب وحركة أو ديناميكية الحياة في ظل الاقتصاد المعرفي أو الرقمي الذي يمر به العالم. لقد كانت البوادر الأولى لبحوث العمليات في الميدان العسكري عندما تم تشكيل فرق عمل متخصصة بإدارة العمليات العسكرية تضم في عضويتها متخصصين في الهندسة والرياضيات والعلوم الأخرى وخصوصا فيما يتعلق بتوزيع الأسلحة على المناطق المختلفة واختيار التشكيلات المختلفة من الأسلحة لمعالجة أهداف العدو والتأثير فيها. وقد حققت نتائج باهرة في هذا الميدان الأمر الذي شجع على استخدام نفس الأساليب في ميدان الأعمال والحياة المدنية بعد انتهاء الحرب. عموما

[5] محمود الفياض، عيسى قدادة، (2007)، **"بحوث العمليات"**، الطبعة العربية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، ص 6.

فإنه يمكن إجمال أسباب ظهور وتطور أساليب بحوث العمليات واستخدامها على نطاق واسع اليوم بالآتي[6] :

- ✓ إن المدراء في عالم اليوم يحتاجون إلى وسائل تساعدهم في اتخاذ قرارات أكثر رشدا وعقلانية بعد أن تعقدت المشاكل وتضخمت وأصبحت متداخلة ومتشعبة. عن أسلوب الارتجال والحكم الشخصي لوحده لا يكفيان للتصدي لهذه المشاكل وحلها بطريقة فاعلة، وأساليب بحوث العمليات تمثل أداة فاعلة في أيدي هؤلاء المدراء.
- ✓ إن الرغبة في الوصول إلى حلول مثلى سواء كانت تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف يقتضي اعتماد أساليب علمية دقيقة، فليس بالإمكان اعتماد التجربة والخطأ في مجال الإنتاج والتوزيع وغيرها من العمليات حيث أن عالم اليوم لم يعد فيه متسع لاتخاذ قرارات غير صائبة ومن ثم تعديلها بدون تكاليف عالية، بعبارة أخرى يجب أن يكون القرار صائبا من أول مرة.
- ✓ النجاح الباهر الذي تحقق في العمليات العسكرية أثناء الحرب العالمية الثانية وغيرها من الحروب في مجال اختيار الأسلحة المناسبة أو توزيع القطعات العسكرية والقيام بأعمال الدفاع المدني أثناء الحروب وكذا تطوير الأسلحة الجديدة، كل هذا شجع على تطبيق نفس الأساليب في الأعمال المدنية التي أعطت بدورها نتائج ممتازة.
- ✓ التوسع الكبير في استخدام أجهزة الحاسوب التي تتسم بالسرعة العالية والدقة الأمر الذي أدى إلى حل النماذج التي تحتوي على معدلات معقدة وكثيرة المتغيرات، مما ساعد في توسع وازدياد التطبيقات لبحوث العمليات في حل المشاكل الإدارية. كذلك فإن تطوير البرمجيات الكثيرة التي تسهل كثيرا حل المشاكل المختلفة قد ساهم في تطوير المناهج المختلفة في هذا العلم ووفر وسيلة مساعدة للطلاب والباحثين.
- ✓ حاجة العلوم المختلفة الأخرى لأساليب بحوث العمليات فلا يوجد تخصص تقريبا إلا وتجد أن بعض هذه الأساليب على الأقل موجودة في مناهجه فالحاسوب والهندسة بكل فروعها وغدارة الأعمال والرياضيات والإحصاء وغيرها من العلوم تعتبر بحوث العمليات واحدة من أهم موادها الدراسية.

5- وظائف بحوث العمليات:

يمكن أن نجمل الوظائف الرئيسية لأساليب بحوث العمليات في ميدان الأعمال كالأتي:

[6] العامري، صالح، عواطف، الحداد، (2009)، **"تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة"**، الطبعة الأولى، اثراء للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، ص 16.

- تسهيل عملية اتخاذ القرار ومساعدة المدراء ولكن ليس إحلال الحلول محلهم.
- توفير حلول لمختلف المشاكل الإدارية.
- تعتبر أداة فعالة في مجال البحث العلمي في ميادين إدارة الأعمال.
- تساعد في تخصيص الموارد بشكل فاعل على الاحتياجات الكثيرة.
- المساعدة في اختيار الاستراتيجيات المختلفة في الإنتاج والتسويق والتمويل.
- المساعدة في تخفيض التكاليف في كثير من القرارات الإدارية.
- يوفر أداة مهمة لدراسة ردود الفعل وتحليل الحساسية للكثير من القرارات المتخذة.

6- المراحل الأساسية في علم بحوث العمليات:

تقوم المنهجية العلمية لبحوث العمليات في عمليات اتخاذ القرارات على الخطوات التالية:

1- تعريف المشكلة قيد البحث :

أي أن يتم تعريف المشكلة الذي سيتخذ القرار فيها، لأن ذلك يقود إلى الهدف الذي تسعى الإدارة لتحقيقيه، فلو كانت المشكلة إنتاجية تتعلق بخط إنتاجي معين فإن الهدف هو تحديد أفضل كمية إنتاجية ستنجم عن تشغيل هذا الخط بحيث تحقق الشركة أهدافها في الحصول على أعلى ربح ممكن أو تكلفة ممكنة، فتحديد وتشخيص المشكلة من المهام الأولى في عملية اتخاذ القرار.

2- بناء النموذج الرياضي:

بعد الانتهاء من تحديد المشكلة موضوع القرار وبيان العالقات المتداخلة فيها، يتم وضع المشكلة بصيغة نماذج رياضية تمثل مكونات المشكلة المراد حلها، وتحل على متباينة الهدف المطلوب تحقيقه ومتباينات القيود الملازمة للمشكلة التي تحكم الإدارة في اتخاذ القرار.

3- حل النموذج:

بعد صياغة النموذج الرياضي يتم حله لاستخراج النتائج الأولية وتحديد كونه أمثلا أم لا، فإذا لم يكن كذلك فالأمر يتطلب تطويره حتى الوصول إلى الحل الأمثل لأنه المحقق للأهداف المقترحة.

4- تطبيق واعتماد النتائج:

بعد الوصول إلى الحل الأمثل نظريا يتم تطبيقه عمليا من خلال مجموعة من الإجراءات والتعليمات التي يقدمها متخذ القرار للعاملين للتقيد بها مراعيا توفر المهارات والمستلزمات

الضرورية التي يتطلبها التنفيذ، ثم متابعة هذا الأخير للتأكد من أن القرار المتخذ كان فعلا هو العلاج للمشكلة.

وبناءا على ما سبق، تحتاج **المرحلة الأولى** من مراحل الدراسة إلى تعريف واضح للمشكلة، والتي تتحدد بثلاث خطوات رئيسية وعلى النحو الآتي:

- ✓ تحديد واضح للأهداف المراد تحقيقيا من خلال الدراسة.
- ✓ تحديد واضح للبدائل المتعلقة باتخاذ القرار.
- ✓ تحديد واضح للمحددات أو المتطلبات اللازمة لتحقيق الأهداف.

أما **المرحلة الثانية** فتتطلب تحديد شكل النموذج المطلوب، فإذا كان النموذج المقدر صياغته هو من صيغ النماذج الرياضية فيمكن اللجوء إلى موضوع البرمجة الخطية لدراسة المشكلة، بينما إذا كانت الدراسة معقدة وكبيرة فمن الممكن اللجوء إلى نماذج المحاكاة التي تعد في هذه الحالة أكثر ملائمة.

أما **المرحلة الثالثة** والمتعلقة بإيجاد حل للنموذج المقترح (الحل هنا يعني إيجاد قيم لمتغيرات القرار) وهنا الحل يمثل النتيجة المثلى (Optimal) باستعمال نماذج الحل الأمثل.

أما **المرحلة الرابعة** فإنها تتعلق باختبار النتائج، ويتم ذلك مثلا بمقارنة النتائج مع سلسلة زمنية سابقة لمتغيرات القرار التي يشملها النموذج أو بعض النتائج التاريخية، وبعدها يتم تطبيق النتائج التي تم التوصل إليها في الحياة العملية وتأخذ شكل التوجيهات أو التعليمات إلى الإدارات المختلفة للوصول إلى النتائج التي رسمت في المرحلة الأولى.

7- تطبيقات بحوث العمليات:

نماذج البرمجة الخطية التي تم التطرق إليها في الفصل الثاني كلها نماذج مساعدة في مساعدة المسير في اتخاذ القرار السليم الذي يضمن اختيار البديل الأفضل من مجموعة البدائل، فعلى مستوى المؤسسة الإنتاجية تطبيق هذه النماذج يمكن متخذي القرار من اختيار القرار الإنتاجي السليم. وعليه هاته التطبيقات سنتناولها من الناحية الاقتصادية ومن الناحية التسييرية [7].

[7] بوقرة رابح، (2010)، **"بحوث العمليات"**، مؤسسة شباب الجامعة، الإسكندرية، ص 243.

1-7 استعمالات نماذج بحوث العمليات:

نماذج بحوث العمليات تستعمل في شتى الميادين الاقتصادية والإدارية وبالخصوص في مجال اتخاذ القرارات الإنتاجية الفعالة، ويمكن تلخيصها في الاستعمالات التالية:

1-1-7استعمالات على مستوى البرمجة الخطية: تعتبر البرمجة الخطية من نماذج بحوث العمليات لحل المشكلات لمساعدة متخذي القرارات والتي تتلخص فيما يلي:

- المساعدة في عملية اتخاذ القرارات المتعلقة بوظائف المؤسسة.
- المساهمة في تحديد المزيج الانتاجي الأمثل في حالة الإنتاج المختلط.
- العمل على تحقيق أكبر عائد ممكن من جراء عملية الاستثمار في البورصة.
- المساعدة في مجال الإشهار من خلال معرفة ميزانية الاشهار من ناحية ومعرفة الوسائل المستعملة في عملية الاشهار كالإعلانات، والمعلقات الحائطية، ندوات أو محاضرات.....
- المساعدة في المفاضلة بين طرق الإنتاج المتاحة في ظل إمكانيات المؤسسة المحدودة.
- المساعدة في إمكانية تقسيم العمل المطلوب إنجازه إلى عدد من الأنشطة وتحديد نظام تتابعها ووسائل الاتصال فيما بينها.
- المساعدة في عملية التخصيص، حيث يمكن إيجاد أفضل طريقة لتخصيص الموارد المتاحة على الاستعمالات أو توزيع العمل بالإضافة إلى تحديد الوحدات الإنتاجية الواجب تشغيلها بطريقة مثلى للوفاء بطلب السوق في الوقت المناسب من جهة، وتخفيض التكاليف من جهة أخرى.

2-1-7 استعمالات على مستوى اتخاذ القرار: إن القيام بالعملية الإنتاجية في أي مؤسسة هو الحصول على منتجات بطرق إنتاجية معينة، تتطلب استخداما للموارد المادية والبشرية والمالية للمؤسسة استخداما عقلانيا للوصول إلى اتخاذ قرار انتاجي فعال، ويمكن تلخيصها فيما يلي:

- تحقيق الاستخدام الأمثل للاستعمالات لكل منتوج بالكميات والأذواق واستعمال البرمجة الخطية يؤدي إلى تحديد عقلاني لمجموعة الأحجام والكميات من أجل تحقيق أقل خسارة ممكنة أو أدنى ضياع ممكن.
- تخصيص الكميات المتاحة والمحدودة من المواد الأولية، اليد العاملة، ساعات عمل على الآلات...وغيرها من الموارد المستعملة في انتاج المنتجات المطلوبة بهدف تحقيق أقصى

ربح أو أقل تكلفة ممكنة، بهدف تلبية طلب الزبائن من جهة وتلبية حاجيات السوق من جهة أخرى.

- وضع برامج خطية تتلائم مع البرامج الإنتاجية الموسمية والبرامج الإنتاجية وفق الطلب وذلك بتوزيع الموارد المحدودة وفق الخطط الإنتاجية المستقبلية بطريقة تضمن استمرارية الإنتاج وتلبية طلبات الزبائن في الوقت المحدد.
- وضع برامج خطية تعالج تخفيض مختلف التكاليف كتكلفة الإنتاج، التخزين، إعادة الطلب والتكاليف الإضافية كتكلفة الفرصة البديلة، وتكلفة زمن الإنجاز، ويتطلب ذلك تقدير التكلفة ومعدل العمل الإضافي في حالة زيادة الوحدات المنتجة نتيجة الطلب المتزايد.
- تحديد مستوى التشغيل الأمثل لكل وحدة إنتاجية في المؤسسة، بمعنى تحديد الوحدات الإنتاجية الواجب تشغيلها بطريقة مثلى من أجل تلبية طلبات السوق في الزمن المناسب، هذا يعني وجود إمكانية العمل الإضافي بإضافة الطاقة المتاحة بالوحدات الإنتاجية أو بعضها. ومن الممكن تخفيض التكاليف الكلية عن طريق الاستعمال العقلاني للوحدات الإنتاجية مع مراعاة العمل الاحتياطي من أجل اعتماد الأهمية النسبية لتكاليف الإنتاج والتوزيع وغيرها.
- تساعد على إمكانية تقسيم العمل المطلوب إنجازه وفق الخطة المعلنة حسب كل مرحلة.
- التحديد الأمثل للإمكانيات الإنتاجية عند وجود بدائل انتاج، وذلك عن طريق معرفة زمن انتاج المنتج على الآلات، الحجم الساعي المحدد للآلات، الاحتياجات من المنتج وربح الوحدة من كل منتج.

2-7 تطبيقات بحوث العمليات على مستوى وظائف المؤسسة:

إن التطبيقات لأساليب بحوث العمليات متعددة ومتنوعة حسب أهداف الدراسة، فمنها التطبيقات الاقتصادية والإدارية ومنها التطبيقات في ميادين أخرى تخص مجالات الهندسة بكل فروعها والتطبيقات على مستوى علم النفس التربوي وغيرها من التطبيقات.

ويعتبر تعريف التطبيق معقدا لأنه عملية طويلة وغير محددة المعالم، ويعرف على أنه " الطريقة التي تستعمل بها نتائج الجهود العلمية من قبل المسير "[8].

1-2-7 التطبيقات المالية:

[8] نعيم نصير، (2005)، **"الأساليب الكمية وبحوث العمليات في الإدارة"**، عالم الكتب الحديث للنشر والتوزيع، الأردن، ص 671.

تستخدم بحوث العمليات في الجوانب المالية للمؤسسة، كاستخدامها في تسيير الميزانية والتسيير المالي، وتسيير المحفظة المالية التي تستوجب على متخذ القرار اختيار أفضل الاستثمارات من بين مجموعة من البدائل المتاحة والتي تسعى إلى تعظيم العائد المتوقع وتخفيض المخاطر، وفي هذه الحالة تعتبر بحوث العمليات أفضل الأساليب لمعالجة مثل هذه الأهداف[9].

7-2-2 التطبيقات التسويقية:

تطبيقات بحوث العمليات على المستوى التسويقي يتمثل على مستوى الاشهار والاعلان لمساعدة متخذي القرار لتحديد ميزانية الإشهار عبر عدد من الوسائل كالمجلات، القنوات المرئية، القنوات المسموعة إلى غيرها من الوسائل إلى جانب وسائل التواصل الاجتماعي التي تمتاز بالانتشار الواسع وبسرعة نقل المعلومة.

7-2-3 التطبيقات على مستوى الإدارة:

تتجلى هذه التطبيقات على مستويين وهما تخصيص القوى العاملة ومزج المواد الأولية:

- تخصيص القوى العاملة تظهر عند اتخاذ القرارات التي تخص متطلبات اليد العاملة في أي فترة تخطيط، وتخصيص قوة العمل يجب أن يظهر مرونة في تخصيص اليد العاملة على المناصب الموجودة حتى لا يكون هناك عجز في بعض المناصب الأخرى وبالتالي التكوين للعاملين مطلوب حتى لا تلجأ المؤسسة للعمل الإضافي والمرونة في تخصيص اليد العاملة تساهم في تقليل ضياع الوقت، تحسين استعمال قوة العمل، تحسين الأداء.
- مزج المواد الأولية يظهر عندما تحتاج المؤسسة لمعرفة عدد المواد المطلوبة للمزج لإنتاج منتوج أو أكثر، وعليه فالمواد الأولية يجب أن تحتوي على مجموعة من المكونات لإظهار مواصفات المنتوج، كما أن متخذ القرار يجب عليه تحديد الكمية التي يجب توفرها من أجل تحقيق دورة انتاج مثلى.

7-3 تطبيقات بحوث العمليات على مستوى الإنتاج:

تتمثل في تطبيقات بحوث العمليات على مستوى الإنتاج من الناحية الاقتصادية التي تتجلى في اشباع حاجيات ورغبات الأفراد من سلع وخدمات ومن الناحية التسييرية لما له من أهمية في تسيير المؤسسة كالبرمجة والتخطيط والرقابة.

---

[9] السيد، ناجي، (2000)، **"المبادئ والقرارات الأساسية"**، دار النهضة العربية، القاهرة، مصر، ص 212.

8- حدود استخدام بحوث العمليات[10]:

- إنها تتضمن الكثير من الصيغ والمعادلات والتعبيرات الرياضية للبيانات المستخدمة فهناك النماذج الرياضية باختلاف أنواعها والجداول الرياضية والاحصائية التي قد يبدو في معظم الأحيان أنها صعبة الفهم والاستعمال.
- تفترض ظروفا وشروطا عند صياغة الكثير من النماذج والمعادلات وهذه لا يمكن تطبيقها في كثير من المشاكل الإدارية والصناعية ولذا فإن تطبيق هذه النماذج كما هي يقود إلى نماذج خاطئة.
- يتطلب تطبيق الأساليب الكمية أو بحوث العمليات الكثير من النفقات والمصاريف حيث هناك حاجة لخدمات الكثير من الخبراء واستخدام أجهزة حاسوب وبرمجيات وتحتاج صياغة بعض النماذج لحل مشكلة معينة في الشركات الكبيرة إلى فرق عمل ووقت طويل وهذا أمر قد تعجز عن توفير تكاليفه كثير من الشركات أو لا تجد الإدارات فيه جدوى لذا تستبدل الأساليب الكمية بآراء واجتهادات المدراء وكذلك الحال في الكثير من الشركات الصغيرة ومتوسطة الحجم غالبا ما تلجأ إلى خبرة المدراء والخبراء وحكمهم الشخصي بدلا عن اعتماد بحوث العمليات.
- أنها لا تدرس العوامل النوعية التي لا يمكن التعبير عنها كميا مثل المهارات والقدرات والتصرفات وصدق الإداريين عند اتخاذ القرارات والتي تكون مهمة في كثير من القرارات وبهذا فإن اعتماد الأساليب الكمية لن يكون مفيدا إذا ما كانت هذه العوامل النوعية حاكمة في عملية اتخاذ القرار.
- لا يمكن لأساليب بحوث العمليات الحلول محل الحكم الشخصي للمدير في موقف اتخاذ القرار فهي عبارة عن أدوات تستخدم في تحليل وتفسير المشاكل التي يكون فيها القرار عائد للعقل البشري.
- تتطلب أساليب بحوث العمليات معرفة نظرية وعملية في حقول علمية مختلفة فعند صياغة نموذج معين لابد أن يكون مستخدم الأساليب الكمية على معرفة نظرية واسعة في الرياضيات والاحصاء وبحوث العمليات وكذلك معرفة عملية بميادين الأعمال وتطبيقاتها، وغالبا لا يكون هذا الأمر أي الجمع بين المهارتين متاحا أو متوفرا في شخص واحد.

---

[10] صالح العامري وعواطف الحداد، **مرجع سبق ذكره**، ص 31.

- ان عدم ايمان الإدارة وتعاونها أو وجود قناعة لديها بأن هذه الأساليب طورت في دول متقدمة ولا تصلح إلا لتلك الدول، يعرقل كثيرا انتشار تطبيق هذه الأساليب والاستفادة منها وكذلك هناك الكثير من الإدارات التي لا توفر البيانات للباحثين والمحللين الأمر الذي يعقد مهمتهم ويجعل من الصعب عليهم الوصول إلى نتائج وحلول للمشاكل التي يعالجونها.

1- مدخل

تكون البرمجة الخطية فرعا من فروع البرمجة الرياضية وتحتوي البرمجة الرياضية على نظرية و مناهج حل مسائل لتحقيق الأمثلية، ويعني تحقيق الأمثلية في هذا الإطار تعظيم أو تدنئة دالة تحت ظل مجموعة من القيود.

- عندما تكون الدالة المعنية أمثلية والقيود المرتبطة بها خطية تصبح في إطار البرمجة الخطية.
- في حال دالة تربيعية و مهما كانت نوعية القيود نتكلم عندئذ عن البرمجة التربيعية.
- في حال دالة محدبة بشرط أن تكون القيود محدبة تصبح عندئذ أمام مسألة للبرمجة المحدبة.

إن مجموعة القيود للصيغة العامة للبرمجة تحدد منطقة أو مجموعة من الحلول تسمى بمجموعة الحلول المقبولة أو الممكنة وتحتوى هذه المجموعة عادة على عدد لا نهائي من الحلول. تنحصر مسألة البرمجة حينئذ بالبحث عن حل أثل على الأقل من جملة الحلول المقبولة، الحل الذي يحقق الأمثلية أي الحل الذي يعظم أو يصغر دالة القيمة المعنية لتحقيق الأمثلية.

2- ماهية البرمجة الخطية:

تعد البرمجة الخطية من أبسط وأسهل الأساليب الرياضية التي يمكن الاستعانة بها لمعالجة المشاكل التي تواجه المؤسسة الاقتصادية، وتهدف عموما الى حل المشاكل والمسائل بتعيين التوليفة المثلى للنتاج. وذلك لتحقيق الأهداف المحددة ولقد شهدت البرمجة الخطية العديد من التعريفات، وهذا حسب مختلف المفكرين والمحللين وميولهم الاقتصادية أو الإدارية.

2-1تعريف البرمجة الخطية:

- "أسلوب رياضي يستخدم في إيجاد الحل الأمثل لكيفية استخدام المشروع لموارده. وتشير كلمة خطية إلى أن العلاقات بين المتغيرات المكونة للمشكلة المدروسة وهي علاقة خطية أما كلمة برمجة فتشير إلى التكنيك الرياضي المستخدم في إيجاد الحل".[1]

- كلمة البرمجة الخطية تعني: البرمجة من كلمة برنامج ويعني وضع خطوات محددة لحل مشكلة معينة لتحقيق هدف معين. أما كلمة خطية فتعني المسار الذي تأخذه قيم الظاهرة المدروسة والذي يأخذ شكل خط مستقيم.

[1] موفق محمود الكبيسي، **"بحوث العمليات تطبيقات وخوارزميات"**، دار الحامد للنشر والتوزيع، 1999، عمان، الأردن، ص 32.

أما مجال البرمجة الخطية فهي تستخدم في العديد من المجالات الاقتصادية والإدارية وأهمها ميدان الإنتاج فهذه الأخيرة تسمح بتخطيط الإنتاج على ضوء الهدف وعلى ضوء القيود المتاحة كما يمكن استخدامها لرقابة المخزون أو لتخطيط مسائل النقل من مراكز الإنتاج إلى مراكز التوزيع.

2-2 بناء البرنامج الخطي:

تقوم عملية بناء برنامج خطي بالتعرف على العناصر أو النقاط التالية:

1- **مسألة الحلول المثلى:** مسألة الحلول المثلى تحاول تعظيم أو تصغير قيمة محددة تدعى بالهدف والتي تعتمد على عدد محدد من متحولات الدخل قد تكون هذه المتحولات مستقلة عن بعضها البعض أو قد تكون مرتبطة بواحد أو مجموعة من القيود.

فدالة الهدف تسعى إما لتحقيق أقصى ربح في حالة المعظمة (Max) أو تقليل التكاليف إلى أدنى حد في حالة التدنئة (Min).

في حالة المعظمة فدالة الهدف تتكون من ربح كل متغير أما في حالة التدنئة فإن دالة الهدف تتكون من كلفة أو وقت كل متغير.

2- **مجموعة القيود:** والتي تعني كميات الموارد المتاحة وكذا احتياج كل متغير من الموارد المتاحة.

3- **البرمجة الرياضية:** البرنامج الرياضي هو مسألة حلول مثلى يكون فيها الهدف والقيود ممثلين بتوابع رياضية وعلاقات رياضية وفق الشكل العام التالي:

$$\text{Optimization } Z= f(x1,x2,x3,\ldots\ldots..xn)$$

$$\text{Subject to:} \qquad C1:(x1,x2,x3,\ldots.xn) \ \leq b1$$

$$C2: (x1,x2,x3,\ldots\ldots xn) \ \leq b2$$

$$Cm:(x1,x2,x3,\ldots\ldots xn) \ \leq \ bm$$

$$f(x1,x2,x3,\ldots\ldots..xn)=c1x1+c2x2+c3x3+\ldots\ldots+cnxn$$

$$Cm=am1x1+am2x2+am3x3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.+amnxn$$

حيث:

(cn): هي ربح أو تكلفة حسب دالة الهدف.

(am): تعبر عن احتياج المتغير من المورد.

(bm): تعبر عن المتاح من المورد.

($x_1,x_2,\ldots x_n\geq 0$): يسمى شرط عدم السلبية، ما يعني أن المتغيرات قيد الدراسة يمكن أن تأخذ قيم صفرية أو قيم موجبة.

3- متطلبات مشاكل البرمجة الخطية:[2]

- كل المشاكل عن تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف ويشار إلى ذلك بدلالة الهدف (Objective function).
- في مشاكل البرمجة الخطية هناك قيود (Constraints) ومحددات (Restrictions) التي تحد من تحقيق الهدف.
- يجب أن تكون هناك بدائل يتم الاختيار منها (Alternatives) فإذا لم تكن هناك بدائل فعند ذلك لا تكون هناك حاجة لاستخدام البرمجة الخطية.
- دالة الهدف (Objective Function) و كافة القيود (Constraints) في مشاكل البرمجة الخطية يجب التعبير عنها بمعادلات خطية أو متباينات.

4- شروط استخدام البرمجة الخطية[3]:

لاستخدام البرمجة الخطية ينبغي توفر شروط معينة، من أهمها:

- ✓ تحديد المشكلة تحديدا رياضيا دقيقا بمتغيرات القرار، التي تكون معاملاتها على شكل ثوابت ومعلومة مسبقا، هذا كله لإيجاد دالة الهدف التي يمكنها قياس الفعالية من خلال دراسة (الربح، كمية الإنتاج، التكاليف ... إلخ)، والهدف من البرمجة الخطية هو تعظيم أو تقليل دالة الهدف حسب حاجة النموذج.
- ✓ لتحقيق غرض أو هدف البرمجة الخطية في دالة الهدف، يجب مراعاة الموارد المتاحة، وتظهر هذه الخاصية على شكل مجموعة قيود في صورة علاقات رياضية خطية بمتغيرات القرار (معاملاتها عبارة عن ثوابت محددة مسبقا)، وعلاقة كل منها على شكل متباينة غالبا أو مساواة للتأكيد على عدم تجاوز الكميات المتاحة من الموارد.

---

[2] محمود الجنابي، (2010)، **"الأحدث في بحوث العمليات"**، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع. الأردن، ص 46.

[3] عفاف الدش، ، (2012)، **"بحوث العمليات واتخاذ القرارات (الأساليب-التطبيق-استخدام حزم البرامج الجاهزة"**، الطبعة الثانية، مكتبة عين شمس للنشر، القاهرة، مصر ، ص 37.

- ✓ تتعمق كل من العلاقات الرياضية الخطية ومتغيرات القرار في المسألة المدروسة ببعضها البعض بشكل وثيق، حيث أن أي تغيير من زيادة أو نقصان لأحد هذه المتغيرات يؤثر على مجموع المتغيرات من خلال تغيير بعضها أو كلها.
- ✓ إتباع شرط عدم سلبية متغيرات القرار، أي كميات الانتاج المنقولة من مركز لآخر التي تكبر أو تصغر دالة الهدف يجب أن لا تكون سالبة، ويساعد هذا الشرط على تحديد منطقة الحلول المقبولة ثم إيجاد الحل الأمثل.
- ✓ أن يكون لدينا عدد من المتغيرات التي تؤثر في تغيرها على القرارات المتخذة سواء بالزيادة أو النقصان حسب البرنامج المقترح، وتؤثر هذه الزيادة أو النقصان على الهدف المطلوب تحقيقه.
- ✓ يخضع تغير متغيرات القرار لحدود أو قيود تفرضها المواد المتاحة لدينا، والتي يمكن استخدامها في إنتاج كل أو بعض المنتجات، إلا أن طاقات الآلات محدودة ومعروفة والوقت المستغرق للإنتاج يكون أيضا معروفا ومحدودا.

يمكن تمثيل مسائل البرمجة الخطية وفق ثلاث صيغ هي:

- ➢ **الصيغة العامة (المختلطة) (mixte Forme):** عادة ما تكتب البرامج الخطية في بداية وضعها على شكل صيغة عامة تحتوي على كل الإشارات (≥، ≤، =).
- ➢ **الصيغة القانونية (canonique Forme):** هي الصيغة التي تحتوي على إشارتي ≥ أو ≤ فقط.

  فإذا كانت الصيغة تحتوي على إشارة أقل أو تساوي فإننا نبحث عن التعظيم (Max).

  أما إذا كانت الصيغة تحتوي على إشارة أكبر أو تساوي، فإننا نبحث عن التخفيض (Min).
- ➢ **الصيغة المعيارية (Forme standard):** هي الصيغة التي تحتوي على إشارة = فقط.

مثال 01: تقوم مؤسسة ما بإنتاج الطاولات والكراسي، حيث أن إنتاج طاولة واحدة يتطلب 2 كلغ من الخشب و3 كلغ من الحديد، ويحقق ربح وحدوي يقدر بـ 500 دج، أما لإنتاج كرسي واحد يتطلب 1 كلغ من الخشب و2 كلغ من الحديد، ويحقق ربح وحدوي يقدر بـ 300 دج. تتوفر المؤسسة على 50 كلغ من الخشب و60 كلغ من الحديد.

المطلوب: كتابة البرنامج الخطي الذي يتوافق مع هذه المسألة بحيث تحقق المؤسسة أكبر ربح ممكن؟

1-تحديد متغيرات القرار:

x_1**:** تمثل كمية الطاولات التي ستنتجها المؤسسة وتحقق لها أكبر ربح،

x_2**:** تمثل كمية الكراسي التي ستنتجها المؤسسة وتحقق لها أكبر ربح،

2-صياغة دالة الهدف:

الربح الوحدوي من انتاج طاولة واحدة هو 500 دج.

الربح الوحدوي من انتاج كرسي واحد هو 300 دج.

وبما أن المؤسسة تسعى إلى تعظيم أرباحها فإنه يمكن صياغة دالة الهدف على النحو التالي:

$$\textbf{Max } f(x)= 500x_1+300x_2$$

3-صياغة القيود الوظيفية: فعلى المؤسسة أن تحترم ما تتوفر عليه من مواد أولية عند تعظيمها لأرباحها:

1-3 المادة الأولية الأولى (الخشب): وهي تعبر عن كمية الخشب الكلية المستخدمة في انتاج الطاولات ($2x_1$) والخشب المستخدم في انتاج الكراسي (x_2) والذي يجب أن لا يتجاوز الكمية المتاحة والمقدرة بـ 50 كلغ. ويمكن التعبير عنها رياضيا بالصيغة التالية:

$$2x_1+x_2 \leq 50$$

2-3 المادة الأولية الثانية (الحديد): وهي تعبر عن كمية الخشب الكلية المستخدمة في انتاج الطاولات ($3x_1$) والخشب المستخدم في انتاج الكراسي (x_2) والذي يجب أن لا يتجاوز الكمية المتاحة والمقدرة بـ 50 كلغ. ويمكن التعبير عنها رياضيا بالصيغة التالية:

$$3x_1+2x_2 \leq 60$$

4-شرط عدم سلبية المتغيرات: حيث أن انتاج كل من الطاولات والكراسي لا يكمن أن يكون بكميات سالبة، فإما أن يكون موجبا أو معدوما، وهو ما يعبر عنه بالصياغة التالية:

$$x_1,x_2 \geq 0$$

وعليه وبتجميع الصيغ الرياضية المحصل عليها سابقا، نحصل على الشكل النهائي لنموذج البرمجة الخطية:

دالة الهدف $$\textbf{Max } f(x)= 500x_1+300x_2$$

Subject to constraints:

معادلة قيد الخشب $\mathbf{2x_1+x_2 \leq 50}$

معادلة قيد الحديد $\mathbf{3x_1+2x_2 \leq 60}$

شرط عدم السلبية $\mathbf{x_1,x_2 \geq 0}$

مثال 02: يتوفر لدى صانع الأثاث 6 قطع خشبية كبيرة و28 ساعة عمل من الوقت الحر، يستطيع خلاله أن ينتج بعض النماذج التزيينية الزخرفية.

وهو يقدر أن النموذج الأول يتطلب قطعتين خشب وسبع ساعات عمل بينما النموذج الثاني يتطلب قطعة خشب واحدة وثماني ساعات عمل وايراد النموذجين هو 120 دج و80 دج على الترتيب.

المطلوب: كتابة البرنامج الخطي الذي يتوافق مع هذه المسألة والذي يهدف إلى تعظيم الأرباح؟

1-تحديد متغيرات القرار:

$\mathbf{x_1}$**:** تمثل عدد الوحدات المنتجة من النموذج الأول التي سينتجها الصانع وتحقق له أكبر ربح،

$\mathbf{x_2}$**:** تمثل عدد الوحدات المنتجة من النموذج الأول التي سينتجها الصانع وتحقق له أكبر ربح،

2-صياغة دالة الهدف:

الربح الوحدوي من انتاج النموذج الأول هو 120 دج.

الربح الوحدوي من انتاج النموذج الثاني هو 80 دج.

وبما أن المؤسسة تسعى إلى تعظيم أرباحها فإنه يمكن صياغة دالة الهدف على النحو التالي:

$$\mathbf{Max\ f(x)= 120x_1+80x_2}$$

3-صياغة القيود الوظيفية: فعلى المؤسسة أن تحترم ما تتوفر عليه من مواد أولية عند تعظيمها لأرباحها:

3-1 المادة الأولية الأولى (القطع الخشبية): وهي تعبر عن كمية الخشب الكلية المستخدمة في انتاج النموذج الأول ($2x_1$) والخشب المستخدم في انتاج النموذج الثاني (x_2) والذي يجب أن لا يتجاوز الكمية المتاحة والمقدرة بـ 6 قطع. ويمكن التعبير عنها رياضيا بالصيغة التالية:

$$\mathbf{2x_1+x_2 \leq 6}$$

2-3 المورد الثاني (الوقت الحر): وهي تعبر عن الوقت المستخدم في انتاج النموذج الأول ($7x_1$) والوقت المستخدم في انتاج النموذج الثاني ($8x_2$) والذي يجب أن لا يتجاوز الوقت المتاح والمقدرة بـ 28 ساعة عمل. ويمكن التعبير عنه رياضيا بالصيغة التالية:

$$7x_1+8x_2 \leq 28$$

4-شرط عدم سلبية المتغيرات: حيث أن انتاج كل من النموذج الأول والنموذج الثاني لا يكمن أن يكون بكميات سالبة، فإما أن يكون موجبا أو معدوما، وهو ما يعبر عنه بالصياغة التالية:

$$x_1,x_2 \geq 0$$

وعليه وبتجميع الصيغ الرياضية المحصل عليها سابقا، نحصل على الشكل النهائي لنموذج البرمجة الخطية:

دالة الهدف $$\text{Max } f(x)= 120x_1+80x_2$$

Subject to constraints:

معادلة قيد القطع الخشبية $$2x_1+x_2 \leq 6$$

معادلة قيد الوقت الحر $$7x_1+8x_2 \leq 28$$

شرط عدم السلبية $$x_1,x_2 \geq 0$$

مثال 03: يمكن لإحدى الشركات الصناعية انتاج منتوجين وتريد استخدام البرمجة الخطية لتحديد فيما إذا كان مناسبا انتاج المنتجين أم واحدا منهما وكم تنتج وذلك لتعظيم الأرباح.

وقد علمت بأن الوحدة الواحدة من هذين المنتجين تمر بمرحلتين انتاجيتين حيث تحتاج الوحدة الواحدة من النوع الأول إلى أربع وحدات من المرحلة الأولى وست وحدات من المرحلة الثانية في حين تحتاج الوحدة الواحدة من النوع الثاني إلى ثمانية وحدات من المرحلة الأولى ووحدتين من المرحلة الثانية، علما أن الكميات المتاحة في المرحلتين هي 160 وحدة و120 وحدة على التوالي أما ربحية الوحدة الواحدة فقد قدرت بـ 100 دج للمنتوج الأول و240 للمنتوج الثاني

المطلوب: كتابة البرنامج الخطي الذي يتوافق مع هذه المسألة والذي يهدف إلى تعظيم الأرباح؟

1-تحديد متغيرات القرار:

x_1: تمثل عدد الوحدات المنتجة من النموذج الأول التي سينتجها الصانع وتحقق له أكبر ربح،

x_2: تمثل عدد الوحدات المنتجة من النموذج الأول التي سينتجها الصانع وتحقق له أكبر ربح،

2-صياغة دالة الهدف:

الربح الوحدوي من انتاج النموذج الأول هو 100 دج.

الربح الوحدوي من انتاج النموذج الثاني هو 240 دج.

وبما أن المؤسسة تسعى إلى تعظيم أرباحها فإنه يمكن صياغة دالة الهدف على النحو التالي:

$$\mathbf{Max\ f(x)= 100x_1+240x_2}$$

3-صياغة القيود الوظيفية: فعلى المؤسسة أن تحترم ما تتوفر عليه من مواد أولية عند تعظيمها لأرباحها:

1-3 المرحلة الأولى من الانتاج: وهي تعبر عن عدد الساعات اللازمة لانتاج النموذج الأول ($4x_1$) وعدد الساعات اللازمة لانتاج النموذج الثاني ($8x_2$) والذي يجب أن لا يتجاوز عدد الساعات المتاحة والمقدرة بـ 160 ساعة. ويمكن التعبير عنها رياضيا بالصيغة التالية:

$$\mathbf{4x_1+8x_2 \leq 160}$$

2-3 المرحلة الثانية من الانتاج: وهي تعبر عن الوقت المستخدم في انتاج النموذج الأول ($6x_1$) والوقت المستخدم في انتاج النموذج الثاني ($2x_2$) والذي يجب أن لا يتجاوز الوقت المتاح والمقدرة بـ 120 ساعة. ويمكن التعبير عنها رياضيا بالصيغة التالية:

$$\mathbf{6x_1+2x_2 \leq 120}$$

4-شرط عدم سلبية المتغيرات: حيث أن انتاج كل من النموذج الأول والنموذج الثاني لا يكمن أن يكون بكميات سالبة، فإما أن يكون موجبا أو معدوما، وهو ما يعبر عنه بالصياغة التالية:

$$\mathbf{x_1,x_2 \geq 0}$$

وعليه وبتجميع الصيغ الرياضية المحصل عليها سابقا، نحصل على الشكل النهائي لنموذج البرمجة الخطية:

دالة الهدف
$$\mathbf{Max\ f(x)= 100x_1+240x_2}$$

Subject to constraints:

معادلة قيد القطع الخشبية $4x_1+8x_2 \leq 160$

معادلة قيد الوقت الحر $6x_1+2x_2 \leq 120$

شرط عدم السلبية $x_1,x_2 \geq 0$

5- فرضيات البرمجة الخطية:[4]

تتألف البرمجة الخطية من عدد من التعابير الرياضية يدل أحدها على دالة الهدف (Objective function) والباقي على قيود المسألة (Constraints). وبشكل عام هناك عدة افتراضات لابد من توافرها في مسألة البرمجة الخطية وهي:

- **الخطية:** ويقصد بالخطية وجود علاقة خطية تربط ما بين المتغيرات سواء في دالة الهدف أو في القيود.
- **الإضافية:** ويقصد بالإضافية عدم التداخل بين الأنشطة والفعاليات المختلفة المطلوبة لإنتاج السلعة أو الخدمة، فإذا كانت المؤسسة تحتاج إلى (س) ساعة لإنتاج إحدى السلع وإلى (ع) ساعة لإنتاج سلعة أخرى على نفس الآلة فإن إجمالي الوقت الكلي لإنتاج السلعتين يساوي (س+ع).
- **القابلية للضرب والقسمة:** ويقصد بهذه الفرضية أحد الأمرين التاليين:
  - ✓ أن هناك علاقة طردية نسبية ما بين كمية الإنتاج والمواد الأولية اللازمة لإنتاج تلك الكمية، فمثلا إذا كانت السلعة النهائية الواحدة تحتاج إلى 5 وحدات من المادة الأولية فهذا يعني أننا سنحتاج إلى 50 قطعة لإنتاج 10 وحدات من السلعة النهائية.
- **الأرقام الحقيقية:** ويقصد بها أنه لا يشترط أن تكون الأرقام هي أرقاما صحيحة حتى يتم التوصل إلى حل مشكلة البرمجة الخطية وهذا يعني أن مشكلة البرمجة الخطية تتعامل بالكسور.
- **اللاسلبية:** وتعني أنه لا يجوز قيم سالبة لأي متغير من متغيرات مسألة البرمجة الخطية. ويعتبر هذا ضروريا حتى تكون مسألة البرمجة الخطية واقعية لأنه من غير المعقول مثلا

[4] علي العلاونة و محمود عبيدات وعبد الكريم عواد، (2005)، **"بحوث العمليات في العلوم التجارية"**، الطبعة الأولى، دار يزيد للنشر والتوزيع، ص 129.

إنتاج كمية سالبة من إحدى السلع ولذلك يظهر قيد اللاسلبية في أية مسألة برمجة خطية سواؤ كانت مسألة تعظيم الأرباح أو مسألة تقليل التكاليف.

1- التعريف بالطريقة البيانية:

تستخدم هذه الطريقة لحل النماذج التي تحتوي على متغيرين فقط، لأنه من غير الممكن حل مشاكل البرمجة الخطية بيانيا عندما يكون عدد المتغيرات (متغيرات القرار) أكثر من اثنان، حيث يمثل المحور الأفقي (Horizontal Axis) قيم المتغير (x1) والمحور الرأسي (Vertical Axis) قيم متغير القرار (x2)، ويمكن تحديد قيم (x1) و (x2) عند أي نقطة، والنقطة التي يكون فيها قيمة (x1) و (x2) تساوي الصفر تشير إلى نقطة الأصل أو الحل المبدئي (Initial solution)، كما يجب الانتباه إلى أن قيم (x1) و (x2) يجب أن تكون أكبر من أو مساوية إلى الصفر(شرط عدم السلبية).[1]

لتوضيح ما سبق ذكره نأخذ المثال التالي:

مثال 01: نفرض أننا أمام وحدة اقتصادية تصنع منتوجين (A) و (B) حيث يسوق المنتوج الأول بـ 30 دج ويسوق المنتوج الثاني بـ 50 دج ويتطلب انتاج هذين المنتوجين استعمال مصالح ورشتين للعمل:

ورشة1: هي ورشة التصنيع وطاقتها 75 ساعة عمل في الأسبوع.

ورشة2: هي ورشة التركيب وطاقتها 100 ساعة عمل في الأسبوع.

رئيس عملية الإنتاج يريد معرفة عدد الوحدات التي يمكن انتاجها من كلا النوعين (A) و (B) لتحقيق أكبر عائد ممكن وعلما أنه لإنتاج وحدة واحدة من (A) يجب استعمال 5 ساعات من ورشة التصنيع وساعتين من ورشة التركيب. ولإنتاج وحدة واحدة من (B) يجب استعمال 3 ساعات من ورشة التصنيع و5 ساعات من ورشة التركيب.

كيف يمكننا استخدام الورشتين أحسن استخدام لتعظيم الأرباح؟

2- أهم المراحل التي يجب اتباعها في الطريقة البيانية كما يلي:

- بناء البرنامج الخطي الذي يتوافق مع المسألة.
- نقوم برسم كل معادلات القيود.
- ومن ثم تحديد منطقة الحلول أي المنطقة التي تحقق كافة القيود معا.

[1] الجنابي، **مرجع سبق ذكره**، ص 47.

- تحديد كل زاوية أو النقاط المتطرفة لمنطقة الحل.
- القيام بحساب الأرباح أو التكاليف لكل نقطة من النقاط وذلك بالتعويض في دالة الهدف.
- تحديد الحل الأمثل (Optimal solution) عن طريق اختيار النقطة التي تعطي أكبر ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة.

- بناء البرنامج الخطي للمثال:

x_1: عدد الوحدات المنتجة من (A).

x_2: عدد الوحدات المنتجة من (B).

القيد الأول يمثل الورشة الأولى (ورشة تصنيع).

القيد الثاني يمثل الورشة الثانية (ورشة تركيب).

$$\mathbf{Max\ Z = 30x_1 + 50x_2}$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 75 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 100 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- تمثيل القيود:

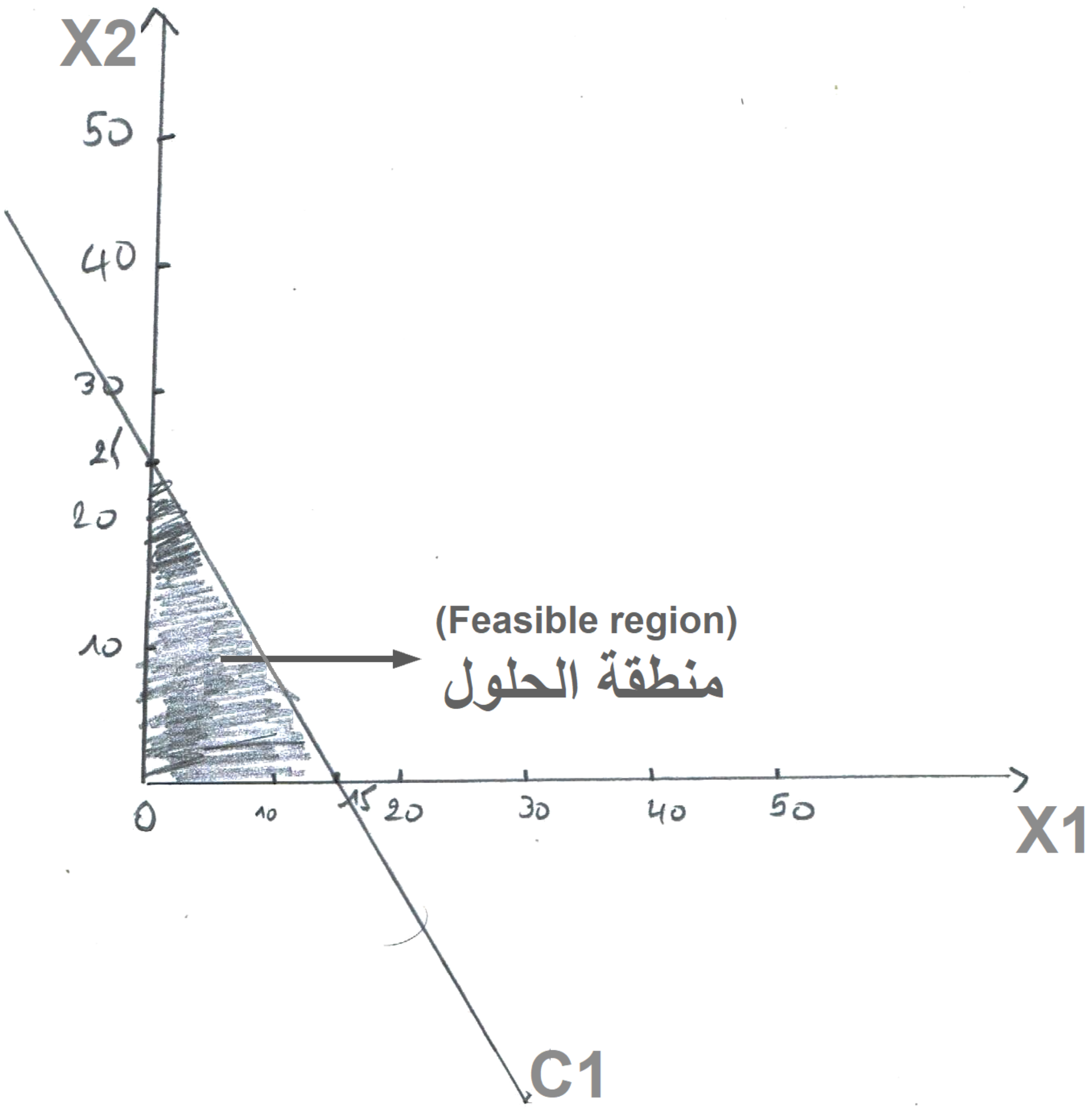
لتمثيل كل قيد نقوم أولا بتحويل المتراجحات إلى معادلات ولحل هذه المعادلات نفرض أن قيمة ($x_1=0$) ونحسب قيمة (x_2) وبعد ذلك نفرض أن ($x2=0$) ونحسب قيمة (x_1).

C1 : 5x1+3x2=75

Si x1=0, 3x2=75, x2=25

Si x2=0, 5x1=75, x1=15

يتم بعد ذلك رسم قيد المتباينة الأولى (C1) حيث نصل بين النقطة (15) على المحور الأفقي (x_1) و النقطة (25) على المحور العمودي (x_2)، ولأن القيد (C1) من الشكل أصغر أو يساوي فإن اتجاه منطقة الحل (Feasible Solution) ستكون باتجاه نقطة المبدأ.



شكل رقم (1)

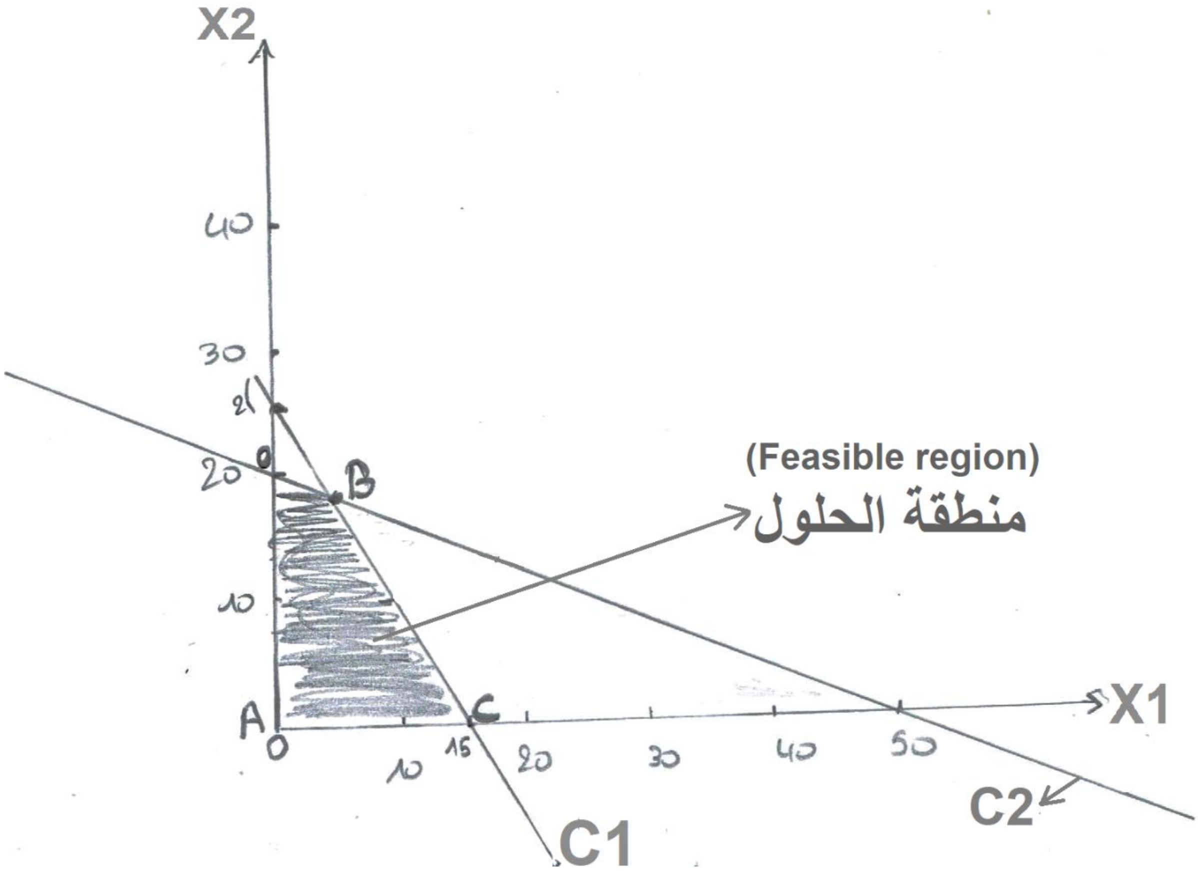
وبنفس الطريقة يتم إيجاد قيم (x_1) و (x_2) للقيد الثاني (C2).

C2 : 2x1+5x2=100

Si x1=0, x2= 100/5=20

Si x2=0, X1=100/2=50

يتم بعد ذلك رسم قيد المتباينة الأولى (C2) حيث نصل بين النقطة (50) على المحور الأفقي (x_1) والنقطة (20) على المحور العمودي (x_2)، ولأن القيد (C2) من الشكل أصغر أو يساوي فإن اتجاه منطقة الحل (Feasible Solution) ستكون باتجاه نقطة المبدأ.



شكل رقم (2)

وبعد أن ترسم جميع معادلات القيود نقوم بتحديد منطقة الحل الممكن (Feasible Region) وبالنظر لكون كل القيود كانت أصغر أو تساوي، فإن منطقة الحل ستكون في اتجاه نقطة الأصل وهي المساحة التي لا يمر خلالها أي مستقيم من مستقيمات القيود وبذلك ستكون المنطقة المحددة بالمضلع (AOBC).

يتم بعد ذلك بإيجاد احداثيات رؤوس المضلع بيانيا كما يلي:

جدول رقم (1)

النقاط	x_1	x_2
A	0	0
O	0	20
B	3.94	18.42
C	15	0

بالنسبة للنقطة (B)، فإن احداثياتها تم تحديدها بيانيا بالإسقاط على محور (x_1) ومحور (x_2). أما رياضيا فإن النقطة (B) هي نقطة تقاطع (C1) و (C2) وعليه تحسب احداثياتها بحل جملة المتراجحتين على النحو التالي:

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2=75 \ (*-5) \\ 2x_1+5x_2=100 \ (*3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -25x_1-15x_2=-375 \\ 6x_1+15x_2=300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -19x_1=-75 \\ x_1=3.94 \end{cases}$$

$X_1=3.94,\ 5(3.94)+3x_2=75,\ x_2=18.42$

يتم بعد ذلك حساب قيمة الأرباح لكل نقطة من نقاط المضلع (AOBC) أي حساب الأرباح عند رؤوس المضلع وذلك بالتعويض في دالة الهدف.

$$Z= 30x_1+50x_2$$

عند النقطة (A) ذات الاحداثيات (0,0) فإن ($Z= 30(0) +50(0) =0$).

عند النقطة (O) ذات الاحداثيات (0,0) فإن ($Z= 30(0) +50(20) =1000$).

عند النقطة (B) ذات الاحداثيات (0,0) فإن ($Z= 30(3.94) +50(18.42) =1039.2$).

عند النقطة (C) ذات الاحداثيات (0,0) فإن ($Z= 30(15) +50(0) =450$).

يتضح من أعلاه أن النقطة (B) هي التي تحقق أكبر عائد ممكن ومقداره (1039.2) وحدة نقدية وذلك بإنتاج (3.94) وحدة من النوع الأول و (18.42) وحدة من النوع الثاني.

مثال 02:

اليك البرنامج الخطي التالي والمطلوب حله بالطريقة البيانية؟

x_1: عدد الوحدات المنتجة من المنتوج الأول.

x_2: عدد الوحدات المنتجة من المنتوج الثاني.

$$\textbf{Max } Z = 100x_1 + 240x_2$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \leq 160 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- تمثيل القيود:

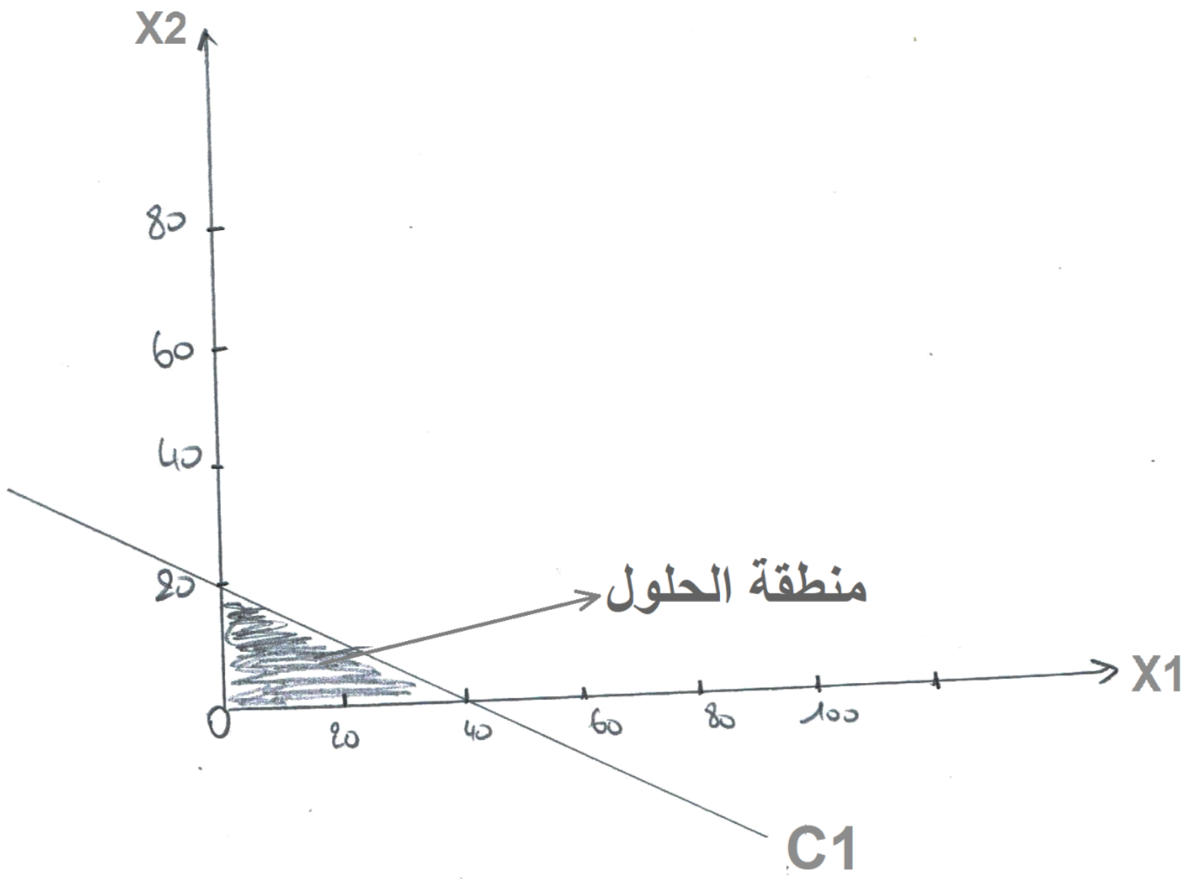
لتمثيل كل قيد نقوم أولا بتحويل المتراجحات إلى معادلات ولحل هذه المعادلات نفرض أن قيمة ($x_1=0$) ونحسب قيمة (x_2) وبعد ذلك نفرض أن (x2=0) ونحسب قيمة (x_1).

C1 : 4x1+8x2=160

Si x1=0, 8x2=160, x2=20

Si x2=0, 4x1=160, x1=40

يتم بعد ذلك رسم قيد المتباينة الأولى (C1) حيث نصل بين النقطة (40) على المحور الأفقي (x_1) والنقطة (20) على المحور العمودي (x_2)، ولأن القيد (C1) من الشكل أصغر أو يساوي فإن اتجاه منطقة الحل (Feasible Solution) ستكون باتجاه نقطة المبدأ.



شكل رقم (3)

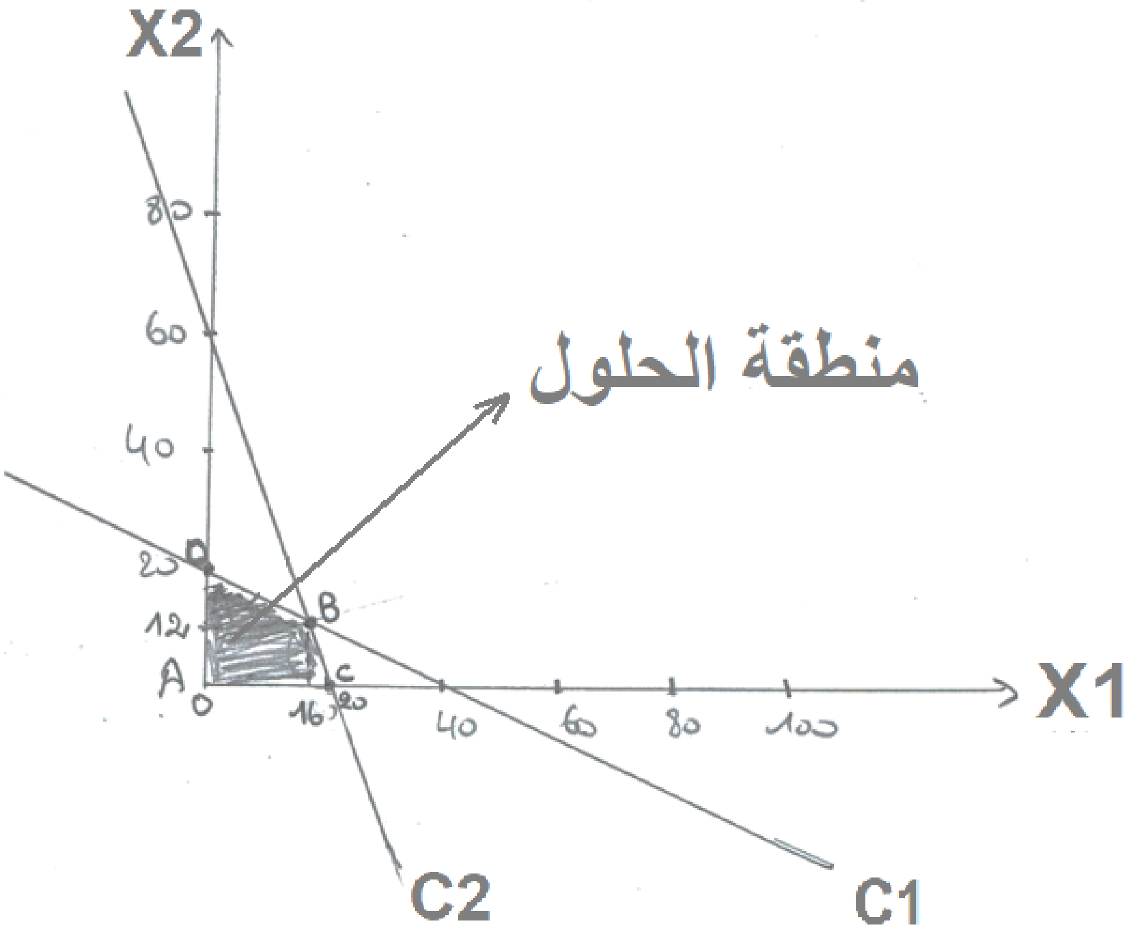
وبنفس الطريقة يتم إيجاد قيم (x_1) و (x_2) للقيد الثاني (C2).

C2 : 6x1+2x2=120

Si x1=0, x2= 120/2=60

Si x2=0, X1=120/6=20

يتم بعد ذلك رسم قيد المتباينة الثانية (C2) حيث نصل بين النقطة (20) على المحور الأفقي (x_1) والنقطة (60) على المحور العمودي (x_2)، ولأن القيد (C2) من الشكل أصغر أو يساوي فإن اتجاه منطقة الحل (Feasible Solution) ستكون باتجاه نقطة المبدأ.



شكل رقم (4)

وبعد أن ترسم جميع معادلات القيود نقوم بتحديد منطقة الحل الممكن (Feasible Region) وبالنظر لكون كل القيود كانت أصغر أو تساوي، فإن منطقة الحل ستكون في اتجاه نقطة الأصل وهي المساحة التي لا يمر خلالها أي مستقيم من مستقيمات القيود وبذلك ستكون المنطقة المحددة بالمضلع (AOBC).

يتم بعد ذلك بإيجاد احداثيات رؤوس المضلع بيانيا كما يلي:

جدول رقم (2)

النقاط	x_1	x_2
A	0	0
O	0	20
B	16	12
C	20	0

بالنسبة للنقطة (B)، فإن احداثياتها تم تحديدها بيانيا بالإسقاط على محور (x_1) ومحور (x_2). أما رياضيا فإن النقطة (B) هي نقطة تقاطع (C1) و (C2) وعليه تحسب احداثياتها بحل جملة المتراجحتين على النحو التالي:

$$\begin{cases} 4x_1+8x_2=160 \; (*1) \\ 6x_1+2x_2=120 \; (*-4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1+8x_2=160 \\ -24x_1-8x_2=-480 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -20x_1=-320 \\ x_1=16 \end{cases}$$

$X_1=16,\ 4(16)+8x_2=160,\ x_2=12$

يتم بعد ذلك حساب قيمة الأرباح لكل نقطة من نقاط المضلع (AOBC) أي حساب الأرباح عند رؤوس المضلع وذلك بالتعويض في دالة الهدف.

$$Z= 100x_1+240x_2$$

عند النقطة (A) ذات الاحداثيات (0,0) فإن ($Z= 100(0) +240(0) =0$).

عند النقطة (O) ذات الاحداثيات (0,0) فإن ($Z= 100(0) +240(20) =4800$).

عند النقطة (B) ذات الاحداثيات (0,0) فإن ($Z= 100(16) +240(12) =4480$).

عند النقطة (C) ذات الاحداثيات (0,0) فإن ($Z= 100(20) +240(0) =2000$).

يتضح من أعلاه أن النقطة (O) هي التي تحقق أكبر عائد ممكن ومقداره (4800) وحدة نقدية وذلك بإنتاج (20) وحدة من النوع الثاني وإلغاء المنتوج الأول تماما بمعنى تخصيص كل قدراتها الإنتاجية للمنتوج الثاني فقط.

مثال 03:

اليك البرنامج الخطي التالي والذي يعبر عن حالة تدنية التكاليف والمطلوب حله باستخدام الطريقة البيانية؟

$$\textbf{Min } Z = 24x_1 + 28x_2$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 2000 \\ x_1 + x_2 \geq 300 \\ x_1 \geq 80 \\ x_2 \geq 100 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- تمثيل القيود:

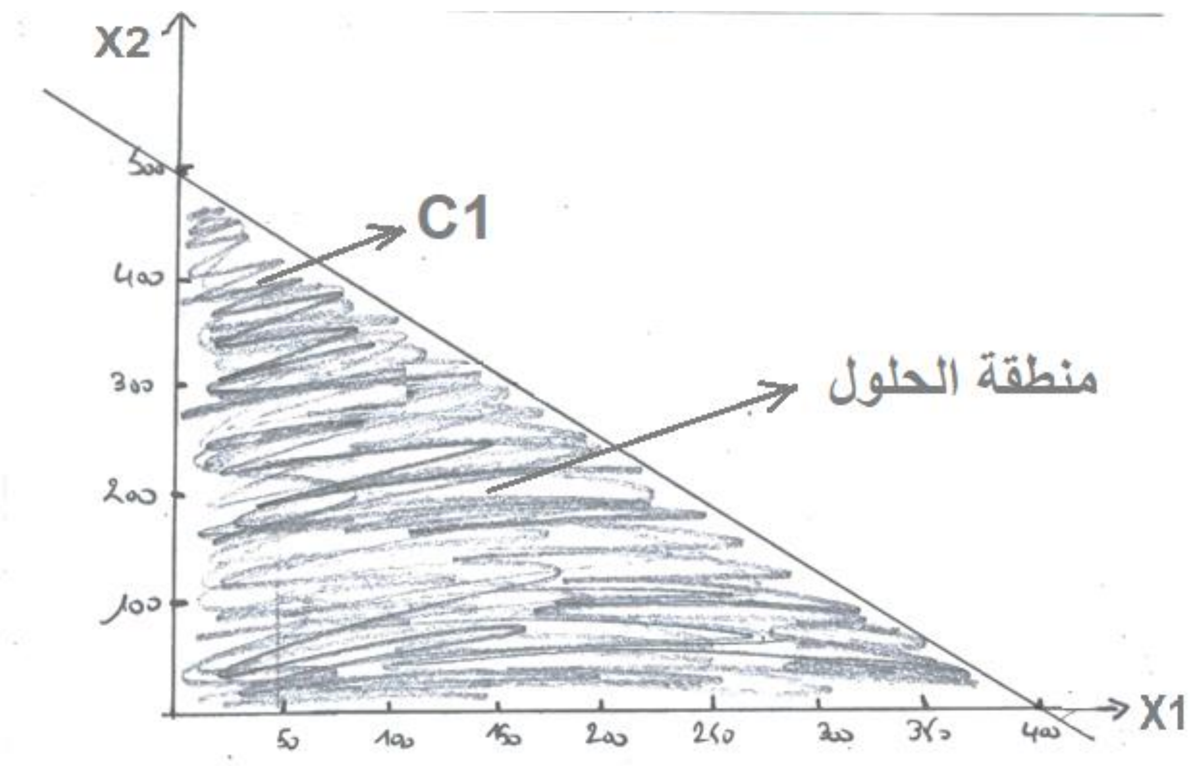
لتمثيل كل قيد نقوم أولا بتحويل المتراجحات إلى معادلات ولحل هذه المعادلات نفرض أن قيمة ($x_1=0$) ونحسب قيمة (x_2) وبعد ذلك نفرض أن ($x2=0$) ونحسب قيمة (x_1).

C1 : 5x1+4x2=2000

Si x1=0, 4x2=2000, x2=500

Si x2=0, 5x1=2000, x1=400

يتم بعد ذلك رسم قيد المتباينة الأولى (C1) حيث نصل بين النقطة (400) على المحور الأفقي (x_1) والنقطة (500) على المحور العمودي (x_2)، ولأن القيد (C1) من الشكل أصغر أو يساوي فإن اتجاه منطقة الحل (Feasible Solution) ستكون باتجاه نقطة المبدأ.



شكل رقم (5)

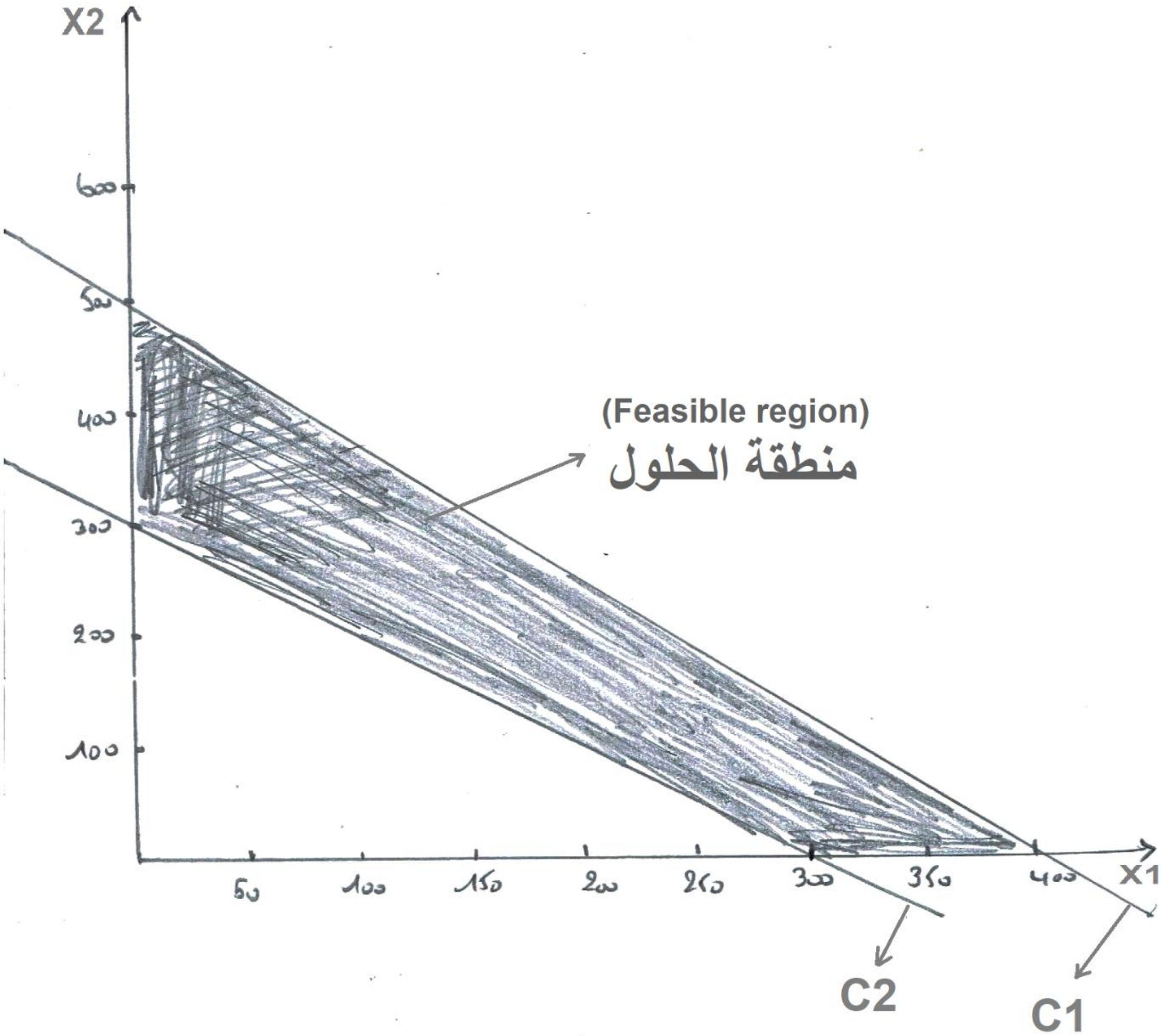
وبنفس الطريقة يتم إيجاد قيم (x_1) و (x_2) للقيد الثاني (C2).

C2 : x1+x2=300

Si x1=0, x2= 300

Si x2=0, X1=300

يتم بعد ذلك رسم قيد المتباينة الثانية (C2) حيث نصل بين النقطة (300) على المحور الأفقي (x_1) والنقطة (300) على المحور العمودي (x_2)، ولأن القيد (C2) من الشكل أكبر أو يساوي فإن اتجاه منطقة الحل (Feasible Solution) ستكون باتجاه اليمين أي بعكس اتجاه نقطة المبدأ.



شكل رقم (6)

وبنفس الطريقة يتم إيجاد قيم (x_1) و (x_2) للقيد الثالث (C3).

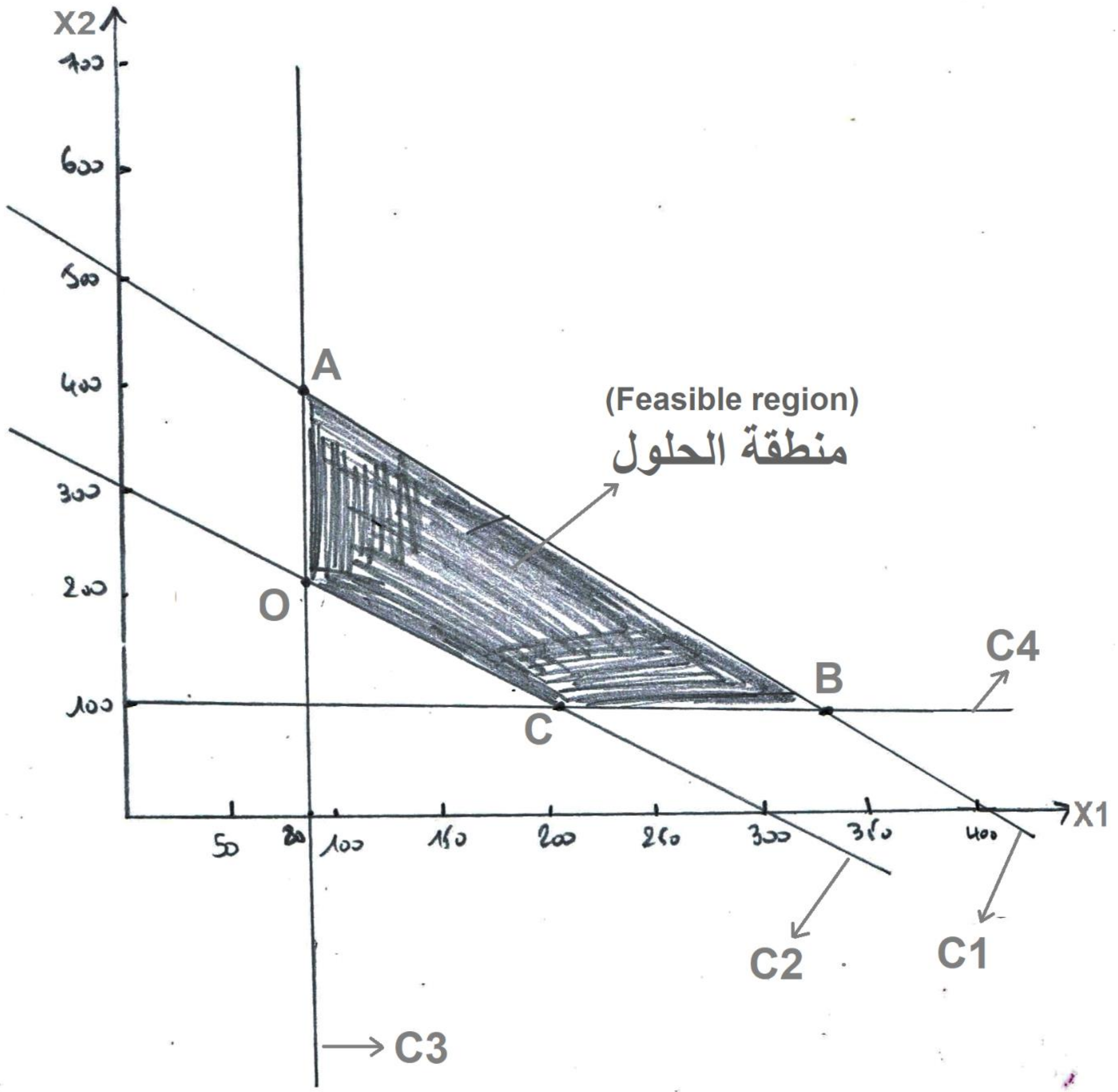
C3 : x1=80

يتم بعد ذلك رسم قيد المتباينة الثالثة (C3: x1=80)، وبالتالي سوف يتم رسم هذا القيد عموديا على المحور الأفقي (x1)، ولأن القيد (C3) من الشكل أكبر أو يساوي فإن اتجاه منطقة الحل (Feasible Solution) ستكون باتجاه اليمين أي بعكس اتجاه نقطة المبدأ.

وبنفس الطريقة يتم إيجاد قيم (x_1) و (x_2) للقيد الرابع (C4).

C4 : x2=100

يتم بعد ذلك رسم قيد المتباينة الرابعة ($C4: x2=100$) وبالتالي سوف يتم رسم هذا القيد عموديا على المحور العمودي (x_2)، ولأن القيد (C4) من الشكل أكبر أو يساوي فإن منطقة الحل (Feasible Solution) ستكون في الجهة العليا من القيد.



شكل رقم (7)

وبعد أن ترسم جميع معادلات القيود نقوم بتحديد منطقة الحل الممكن (Feasible Region) فإن منطقة الحل هي المساحة التي لا يمر خلالها أي مستقيم من مستقيمات القيود وبذلك ستكون المنطقة المحددة بالمضلع (OABC).

يتم بعد ذلك بإيجاد احداثيات رؤوس المضلع بيانيا كما يلي:

جدول رقم (3)

النقاط	x_1	x_2
O	80	220
A	80	336
B	320	100
C	200	100

بالنسبة للنقطة (O)، فإن احداثياتها تم تحديدها بيانيا بالإسقاط على محور (x_1) ومحور (x_2). أما رياضيا فإن النقطة (O) هي نقطة تقاطع (C3) و (C2) وعليه تحسب احداثياتها بحل جملة المتراجحتين على النحو التالي:

$$\begin{cases} x_1+x_2=300 \ (*1) \\ x_1=80 \ (*-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=220 \\ x_1=80 \end{cases}$$

بالنسبة للنقطة (A)، فإن احداثياتها تم تحديدها بيانيا بالإسقاط على محور (x_1) ومحور (x_2). أما رياضيا فإن النقطة (A) هي نقطة تقاطع (C1) و (C3) وعليه تحسب احداثياتها بحل جملة المتراجحتين على النحو التالي:

$$\begin{cases} 5x_1+4x_2=2000 \\ x_1=80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5*80+4x_2=2000 \\ x_1=80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=336 \\ x_1=80 \end{cases}$$

بالنسبة للنقطة (C)، فإن احداثياتها تم تحديدها بيانيا بالإسقاط على محور (x_1) ومحور (x_2). أما رياضيا فإن النقطة (C) هي نقطة تقاطع (C2) و (C4) وعليه تحسب احداثياتها بحل جملة المتراجحتين على النحو التالي:

$$\begin{cases} x_1+x_2=300 \\ x_2=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=200 \\ x_2=100 \end{cases}$$

بالنسبة للنقطة (B)، فإن احداثياتها تم تحديدها بيانيا بالإسقاط على محور (x_1) ومحور (x_2). أما رياضيا فإن النقطة (B) هي نقطة تقاطع (C1) و (C4) وعليه تحسب احداثياتها بحل جملة المتراجحتين على النحو التالي:

$$\begin{cases} 5x_1+4x_2=2000 \\ x_2=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1+4*100=2000 \\ x_2=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=320 \\ x_2=100 \end{cases}$$

يتم بعد ذلك حساب قيمة التكاليف لكل نقطة من نقاط المضلع (OABC) أي حساب التكاليف عند رؤوس المضلع وذلك بالتعويض في دالة الهدف.

$$Z= 24x_1+28x_2$$

عند النقطة (O) ذات الاحداثيات (80,220) فإن ($Z= 24(80) +28(220) =8080$).

عند النقطة (A) ذات الاحداثيات (80,336) فإن ($Z= 24(80) +28(336) =11328$).

عند النقطة (B) ذات الاحداثيات (320,100) فإن ($Z= 24(320) +28(100) =10480$).

عند النقطة (C) ذات الاحداثيات (200,100) فإن ($Z= 24(200) +28(100) =7600$).

يتضح من أعلاه أن النقطة (C) هي التي تحقق اقل تكلفة مقدارها (7600) وحدة نقدية وذلك بإنتاج (200) وحدة من النوع الأول و (100) وحدة من النوع الثاني.

3- الحالات الخاصة المرافقة للطريقة البيانية:

هناك أربعة حالات خاصة يمكن أن تحدث عند استخدام الطريقة البيانية في حل مشاكل البرمجة الخطية وهي[2]:

3-1أكثر من حل (Alternative Optimal Solution):

[2] حسين الجنابي، (2010)، **مرجع سبق ذكره**، ص 59.

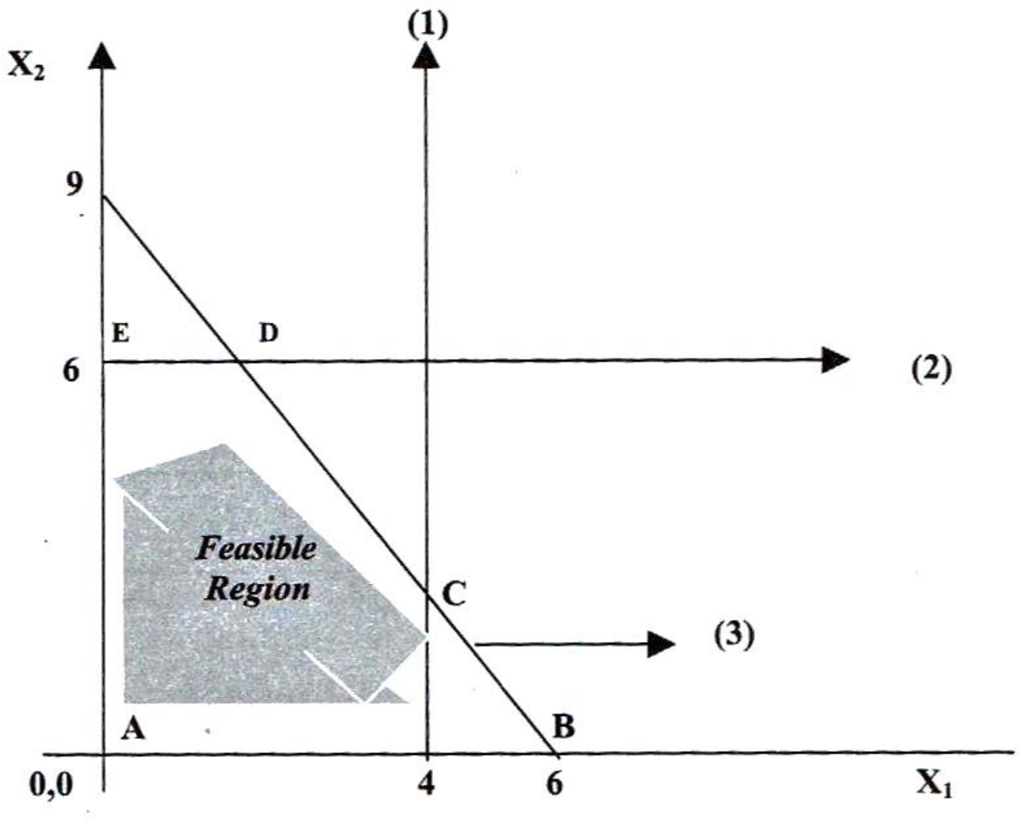
في بعض حالات مشاكل البرمجة الخطية يمكن أن يكون هناك أكثر من حل (أي أكثر من بديل) وفي هذه الحالة تكون لدي المدير مرونة اتخاذ القرار بالتشكيلة التي يراها مناسبة، لتوضيح هذه الحالة نأخذ المثال التالي:

مثال 04:

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 4x_2$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 6 \\ 1.5x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



شكل رقم (8)

2-3عدم محدودية الحل (Unboundancy):

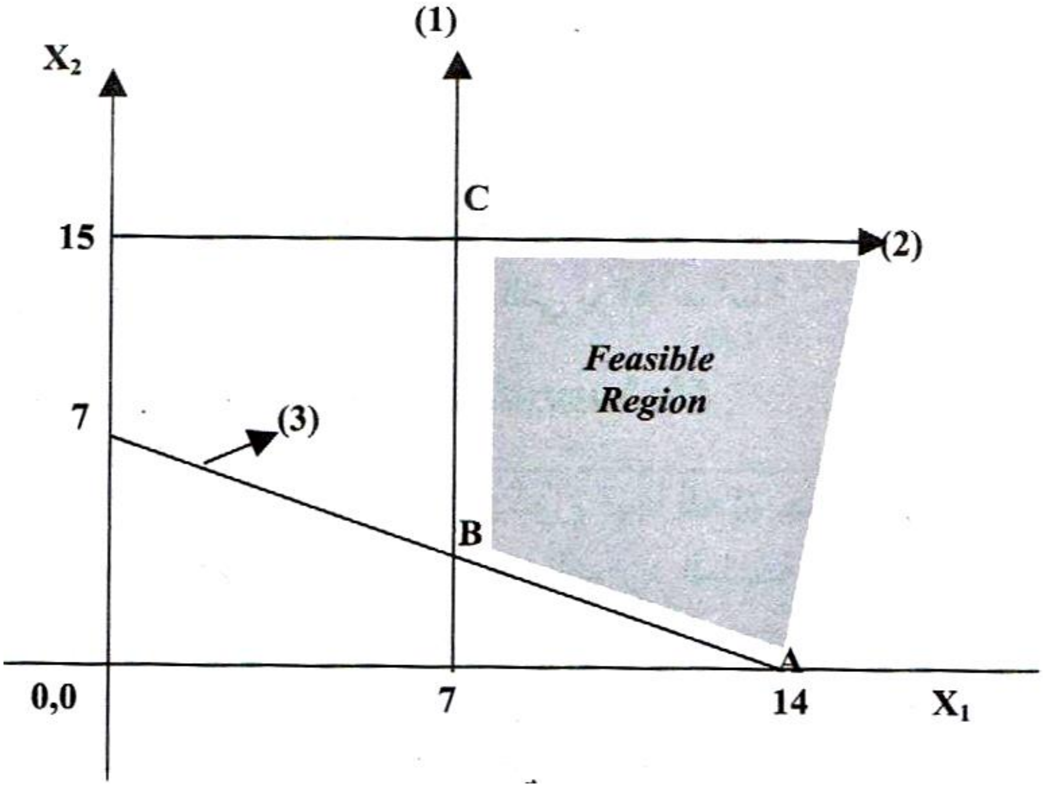
هناك حالات في البرمجة الخطية لا يكون فيها للحل حدود وتكون هذه الحالة مرافقة لمشاكل التعظيم، مما يعني أن زيادة الموارد المتاحة لواحد أو أكثر من قيود المشكلة سوف يؤدي إلى زيادة الأرباح بدون حدود وبدون أي تأثير على قيود المشكلة، وكما يلاحظ في الشكل التالي لمشكلة تعظيم في البرمجة الخطية حيث يلاحظ أن منطقة الحل (Feasible Region) تمتد إلى ما لا نهاية إلى الجهة اليمنى، هذه الحالة تسمى عدم المحدودية (Unboundeness) أو عدم محدودية الحل (Unbounded solution) مما يعني أن المنشأة تستطيع أن تنتج وتبيع أي كمية من المنتوج (x1) وبالتالي تحقق الربح الموافق لذلك المنتوج (x1).

مثال 05:

$$\mathbf{Max\ Z = 6x_1 + 10x_2}$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 2x_1 \geq 14 \\ 0.5x_2 \leq 7.5 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 28 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



شكل رقم (9)

3-3الفائض (Redundancy):

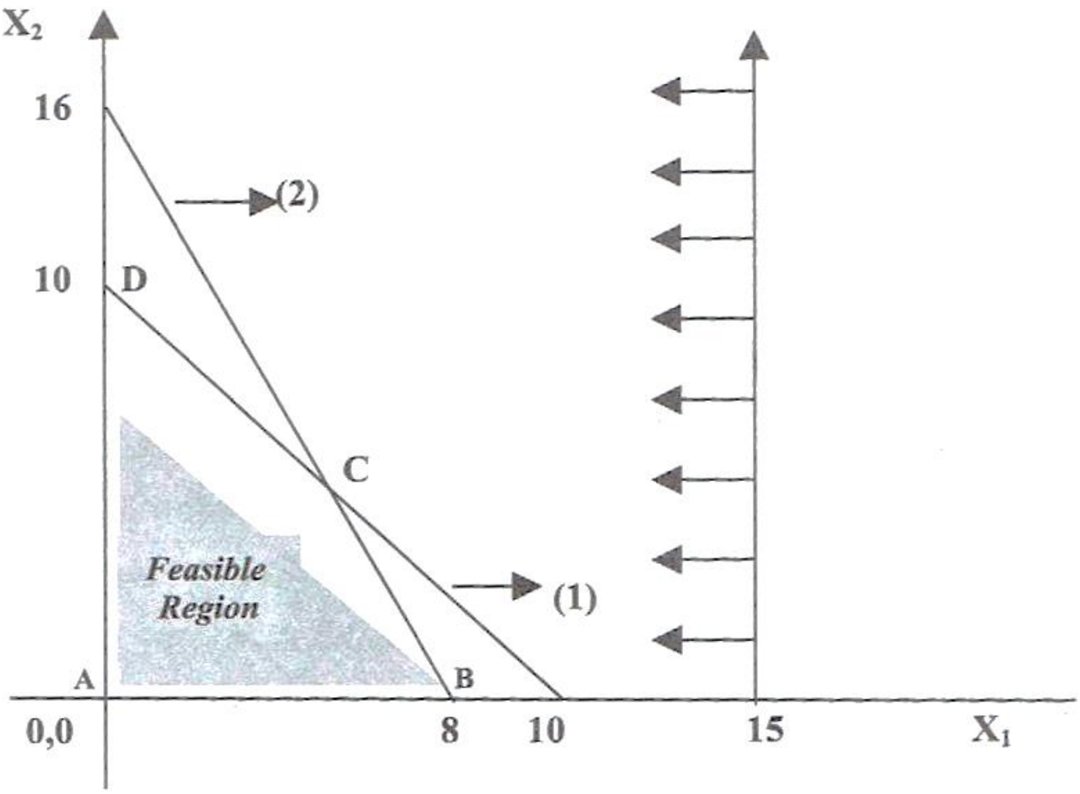
القيود الفائضة هي أيضا من الحالات الشائعة الحدوث في مشاكل البرمجة الخطية، والقيد الفائض (Redundancy constraint) لا يسبب مشاكل رئيسية في حل مشاكل البرمجة الخطية وبعبارة أخرى هو القيد الذي لا يؤثر على منطقة الحل (Feasible solution region) لكن يتطلب تحديد حدوثه.

مثال 06:

$$\text{Max } Z = 7x_1 + 10x_2$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



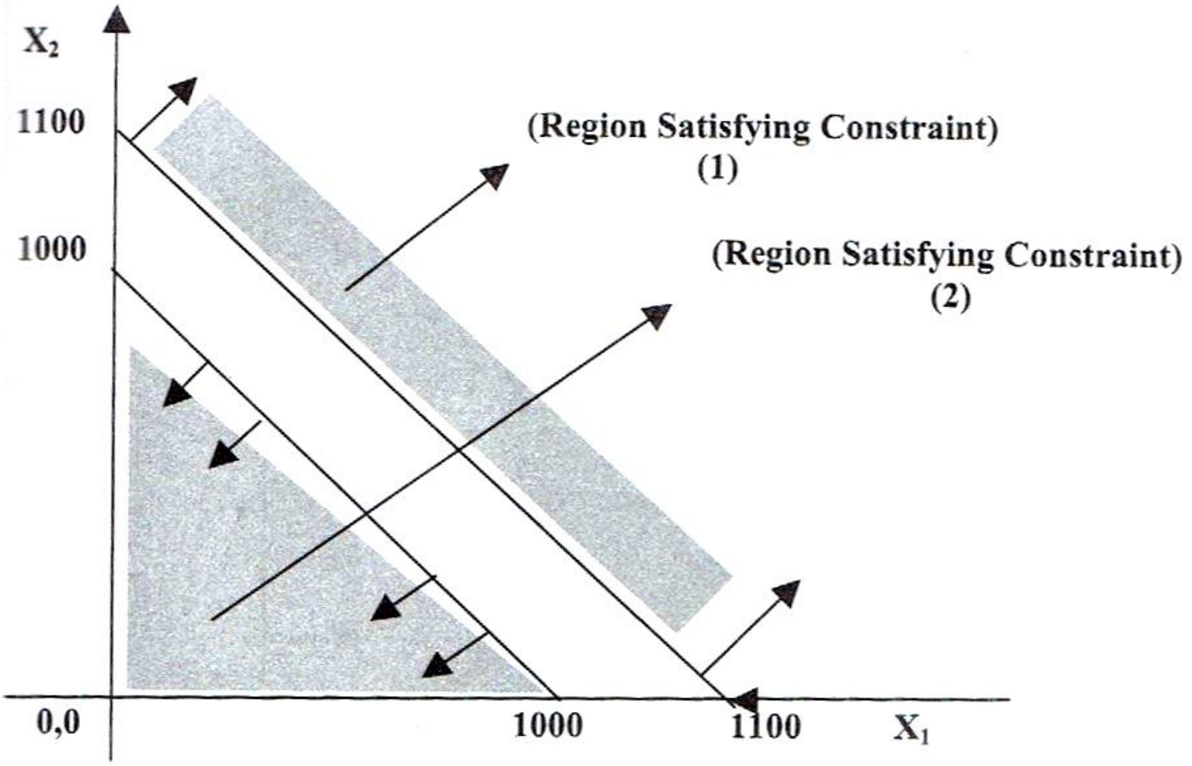
شكل رقم (10)

نلاحظ أن القيد الثالث ليس له أي تأثير على منطقة الحل، كما هو موضح في الشكل السابق.

3-4 عدم إمكانية الحل (Infeasibility):

تحدث حالة عدم وجود حل لمشكلة البرمجة الخطية عندما لا يكون هناك حل يفي بكل متطلبات قيود المشكلة المعطاة، أي عدم وجود منطقة حل (No Feasible solution Region Exists) وهذه الحالة يمكن حدوثها في حالة المشكلة التي تتطلب مئات القيود.

مثال ذلك متخذي القرار يعتقد أنه يجب انتاج ($x_1+x_2 \geq 1100$) والثاني يعتقد أنه يجب انتاج ($x_1+x_2 \leq 1000$).



شكل رقم (11)

1- تمهيد

تمتاز الطريقة المبسطة عن الطريقة البيانية بإمكانية استخدامها لحل مشاكل البرمجة الخطية الأكثر تعقيدا من تلك التي يتم معالجتها باستخدام الطريقة البيانية، وذلك لأنه يمكن باستخدام الطريقة المبسطة معالجة مسائل تزيد عدد متغيراتها على متغيرين اثنين.

وتعتبر الطريقة المبسطة أو طريقة الجداول من الطرق التي تتمتع بدرجة عالية من الكفاءة بصدد الحصول على الحل الأمثل لمشكلات البرمجة الخطية.

ولقد تم تطوير هذه الطريقة سنة 1947 من طرف الباحث (Dantzig) الذي أشار إلى كيفية استخدام دالة الهدف لإيجاد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية من بين العديد من الحلول المتاحة. ومنذ ذلك الحين أصبح المدراء يستعملون الطريقة المبسطة لتحليل ومعالجة الكثير من مشاكل البرمجة الخطية.[1]

2- تعريف الطريقة:

وتمتاز الطريقة المبسطة بطبيعتها التكرارية أي أننا نعود لاستخدام نفس الإجراءات كلما تم تطوير مصفوفة حل وحتى يتم الوصول للحل الأمثل. وما يميز هذه الطريقة أن كل حل تقدمه يكون أفضل من الحل الذي تم التوصل إليه في مصفوفة الحل السابقة لها. هذا يعني أننا ننتقل من جدول إلى آخر نحو الحل الأمثل.

3- خطوات حل مشاكل البرمجة الخطية:

3-1 حالة المعظمة (Maximisation):

حتى تتمكن من حل المثال السابق باستخدام طريقة الجداول لابد من اتباع الخطوات التالية:

1- تحويل المتباينات إلى معادلات:[2]

الخطوة الأولى في استخدام الطريقة المبسطة لحل مسائل البرمجة الخطية هي تحويل المتباينات إلى قيود، ويفصل ما بين طرفي كل منهما إشارة (=). ولقد تم الإشارة سابقا إلى أنه ليس بالضرورة استخدام كافة المورد المتاح في كل مرحلة من مراحل التصنيع حتى يتم

---

[1] علي العلاونة و محمود عبيدات وعبد الكريم عواد، (2005)، **مرجع سابق**، ص 169.

[2] محمود الجنابي، (2010)، **"الأحدث في بحوث العمليات"**، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، ص 65.

تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل من (x1,x2). وهذا يعني ضرورة إضافة متغير جديد إلى الطرف الأيسر لكل متباينة ليمثل باقي المتاح غير المستخدم في المرحلة الإنتاجية.

ويسمى ذلك المتغير بالمتغير الحر أو المتغير الراكد (Slack variable) أو المتغير المتمم إذا كان القيد ($\leq$).

2- تضاف المتغيرات الراكدة أو المتممة إلى دالة الهدف ويكون المعامل (coefficient) المرافق لها يساوي الصفر.

3- تحويل معادلة دالة الهدف إلى معادلة صفرية عن طريق نقل كافة المتغيرات في الجهة اليمنى إلى الجهة اليسرى حيث تصبح المعادلة تساوي الصفر.

4- تحديد عدم السلبية أي أن كافة قيم المتغيرات في المشكلة تكون إما موجبة أو مساوية للصفر ($x1,x2,x3,\ldots\geq0$)، مع ملاحظة أن كل المتغيرات الإضافية أو المتغيرات المتممة لا يمكن أن تكون سالبة.

5- تشكيل مصفوفة القيود وايجاد المصفوفة الأحادية.

6- تشكيل جدول الحل الأساسي الأولي الذي يبدأ من نقطة الأصل أي بعبارة أخرى إذا كانت المتغيرات مساوية للصفر ($x1=x2=x3=\ldots xn=0$) فإن المتغيرات المتممة تكون ذات قيم ($Si=bi$) وأن قيمة ($Z=0$)، أي أن المتغيرات الأساسية تطلق على المتغيرات (Si) ومن ضمنها دالة الهدف (Z) في حين أن المتغيرات (Xj) تعتبر متغيرات غير أساسية (Non-basic variables)، حيث يتم نقل المعلومات إليه من معادلة دالة الهدف والمعادلات الممثلة للقيود (Constraints).

7- تحديد المتغير الداخل (entering variable) والذي يمثله المتغير ذو القيمة الأكبر في صف دالة الهدف.

8- تحديد المتغير الخارج وذلك بقسمة الحدود المطلقة في الجانب الأيمن من الجدول والممثلة للقيود فقط على المعاملات (coefficient) تحت المتغير الداخل (entering variable) وتحديد أقل ناتج قسمة بالموجب مع اهمال القيم السالبة (negative) والقيم غير المعرفة (infinity) حيث يكون المتغير الخارج (leaving variable) المتغير الذي يقابل أقل القيم الموجبة وبذلك يحل المتغير الداخل محل المتغير الخارج (leaving variable) في الجدول

التالي للجدول الأولي، أي أن المتغير الداخل يصبح متغير غير أساسي (None basic variable).

9- تحديد العنصر المحوري (Pivot) والذي يمثل تقاطع العمود المحوري للمتغير الداخل (entering variable) مع الصف المحوري للمتغير الخارج (leaving variable) ومن ضمنها قيمة العنصر المحوري (Pivot element) على قيمة العنصر المحوري وبذلك يتكون لدينا صف جديد يسمى المعادلة المحورية (Pivot equation) ويكون موقعه في نفس صف المتغير الخارج في الجدول التالي (Second iteration) ليحل بدلا عنه المتغير الداخل (entering variable).

10- بيان تأثير المتغير الداخل بقيمته الجديدة (Pivot equation) على كل من دالة الهدف (Objective function) والقيود الأخرى (Constraints) للمشكلة، وكمايلي:

- نأخذ المعامل العددي في صف دالة الهدف (Objective row) تحت المتغير الداخل (entering variable) بإشارة مختلفة ونضربه في المعادلة المحورية (Pivot equation) و حاصل الضرب يتم جمعه مع قيمة دالة الهدف في الجدول السابق وتظهر النتيجة في الجدول اللاحق (الجدول الثاني).
- بيان تأثير المتغير الداخل بقيمته الجديدة على القيود الأخرى: نأخذ المعامل العددي للمتغير المراد اختبار التأثير عليه تحت عمود المتغير الداخل والذي يقابل المتغير المراد اختبار التأثير عليه بإشارة مختلفة ونضربه في المعادلة المحورية (Pivot equation) ومن ثم يجمع الناتج مع قيم المتغير المراد اختبار التأثير عليه في الجدول السابق ويظهر في نفس المكان في الجدول اللاحق.

11- يتم الوصول إلى الحل الأمثل (optimal solution) عندما تكون جميع القيم في صف دالة الهدف مساوية إلى الصفر أو سالبة في حالة المعظمة ومساوية إلى الصفر أو موجبة في حالة التدنية.

12- إذا لم يتحقق ذلك تعاد الخطوات السابقة نفسها المتعلقة بتحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج ونقطة الارتكاز ومن ثم المعادلة المحورية وتأثيرها على دالة الهدف وبقية القيود الأخرى.

مثال 01:

وحتى يتم توضيح الطريقة المبسطة سنأخذ المثال التالي:

$$\textbf{Max } Z = 8x_1 + 6x_2$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

في البداية نقوم بكتابة الشكل العياري وذلك بتحويل المتباينات إلى معادلات بإضافة متغيرات متممة لأننا في حالة (≤):

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + S_1 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 + S_2 = 48 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

- نضيف المتغيرات المتممة إلى دالة الهدف بمعاملات صفرية على النحو التالي:

$$\text{Max } Z = 8x1 + 6x2 + 0s1 + 0s2$$

- تشكيل مصفوفة القيود:

جدول رقم (1)

X1	X2	S1	S2
4	2	1	0
2	4	0	1

عمود (S1) وعمود (S2) يشكلان الأعمدة الأحادية.

- تشكيل جدول الحل الأساسي باستخدام الخطوات السابقة من (6 إلى 9).

جدول رقم (2)

Z		8	6	0	0	XB	ϴ
B	VB	X1	X2	S1	S2		
S1	0	4	2	1	0	60	60/4=15
S2	0	2	4	0	1	48	48/2=24
Fj		0	0	0	0	Z=0	
Z-Fj		8	6	0	0		

من الجدول السابق نجد أن العنصر الداخل هو (x1) لأنه يحمل أعلى قيمة في سطر (Z-fj) لأننا في حالة المعظمة، ومن ثم نقوم بقسمة قيم عمود (XB) على عمود العنصر الداخل (X1) أما سطر العنصر الخارج فهو (S1) لأنه يملك أدنى قيمة في عمود (ϴ) أما خانة التقاطع (الخانة الحمراء) فهي تمثل محور التقاطع (Pivot).

سطر (Fj) يمثل حاصل ضرب (VB) و (Xj).

سطر (Z-Fj) يبين لنا إذا ما كان لدينا حل أمثل أم لا.

عمود (ϴ) يمثل حاصل قسمة عمود (X1) باعتباره عمود العنصر الداخل وعمود (XB).

ومحور الارتكاز أو التقاطع هو الذي سنعتمد عليه في احتساب القيم الجديدة في الجدول الموالي:

القيم الجديدة في الجدول الموالي تحتسب كمايلي:

قيم عمود (Pivot) تعوض بأصفار، قيم سطر (Pivot) تقسم على قيمة (Pivot)، أما القيم المقابلة تحسب بالعلاقة التالية **((القيمة المستهدفة*محور التقاطع) - (جداء القيم المقابلة)) / (Pivot).**

جدول رقم (3)

Z		8	6	0	0	XB	Ɵ
B	VB	X1	X2	S1	S2		
X1	8	4/4=1	2/4=1/2	1/4	0/4=0	60/4=15	30
S2	0	0	((4*4)-(2*2))/4=3	((0*4)-(1*2))/4=-1/2	((1*4)-(0*2))/4=1	((48*4)-(60*2))/4=18	6
Fj		8	4	2	0	**Z=(15*8)+(18*0)**	
Z-Fj		0	2	-2	0	**Z= 120**	

من الجدول السابق يتبين لنا أنه لا يمثل جدول الحل الأمثل لأن كل القيم الموجودة في سطر (Z-Fj) ليست أصغر من الصفر. وعليه فالعنصر الداخل هو (X2) أما العنصر الخارج فهو (S2) أما عنصر الارتكاز (Pivot) فهو العدد 3 (المربع الأحمر). وبتطبيق نفس الخطوات السابقة نحصل على الجدول الموالي:

جدول رقم (4)

Z		8	6	0	0	XB
B	VB	X1	X2	S1	S2	
X1	8	((1*3)-(0*1/2))/3=1	0	((1/4*3)-(-1/2*1/2))/3=1/3	((0*3)-(1*1/2))/3=-1/6	((15*3)-(18*1/2))/3=**12**
X2	6	0/3=0	3/3=1	-0.5/3=-1/6	1/3	18/3=**6**
Fj		8	6	5/3	2/3	**Z=(12*8)+(6*6)**
Z-Fj		0	0	-5/3	-2/3	**Z=132**

بما أن الجدول السابق فيه كل قيم سطر **(Z-Fj)** سالبة أو معدومة فإنه يمثل جدول الحل الأمثل وقيم المتغيرات هي على النحو التالي: (x1=12) و (x2=6) لبلوغ أقصى ربح يقدر بـ 132 وحدة نقدية. ولو عوضنا قيمة كل من (x1) و (x2) في دالة الهدف لتحصلنا على الرقم 132. أما قيم المتغيرات (s1) و (s2) في جدول الحل الأمثل فهي معدومة (لم تظهر في الجدول النهائي) وهذا ما يعني أن كل الطاقات المتاحة تم تخصيصها لإنتاج (x1) و (x2) ولا يوجد فائض.

ولو قمنا بتعويض قيم كل من ($x1=12$) و ($x2=6$) في قيود البرنامج لوجدنا ($s1=0$) و ($s2=0$)، ما يعني الاستغلال الكامل للموارد المتوفرة.

2-3 حالة التدنية أو تخفيض التكاليف (Minimization):

في حالة تقليل التكاليف فإننا نعتمد على نفس الخطوات السابقة التي اتبعناها في حالة المعظمة بإضافة مجموعة من الشروط:

- في حالة التدنية عموما القيود تكون من الشكل أكبر أو تساوي (≥) ففي هذه الحالة نقوم بطرح متغيرات متممة أو راكدة (slack variables) ونضيف متغيرات اصطناعية (Artificial variables) إلى الطرف الأيسر لقيود البرنامج ونرمز له بالرمز (A) والغاية من إضافة متغير اصطناعي هو تشكيل المصفوفة الأحادية.
- أما في حالة إذا كانت القيود من الشكل (=) فإنني نكتفي بإضافة متغير اصناعي فقط إلى الطرف الأيسر من معادلات القيود.
- المتغيرات المتممة تأخذ معاملات الصفر في دالة الهدف سواء في حالة التعظيم أو التدنية أما المعاملات الاصطناعية تأخذ معامل (+M) في حالة (Min) و (-M) في حالة (Max).
- عند اعداد الجدول الأولي للحل يتم ضرب كل صف يحتوي على متغير اصطناعي بالمعامل الذي يرمز له بالرمز (M) في حالة التقليل و (-M) في حالة التعظيم، وتجمع النتيجة مع دالة الهدف وتؤشر في الجدول اللاحق في حين تبقى قيم المتغيرات الأخرى، أي أن التغير في الجدول اللاحق يكون فقط في صف دالة الهدف، وفي ضوء الجدول الجديد يتم انجاز الإجراءات السابقة كما في حالة التعظيم مع الانتباه أن تحديد المتغير الداخل سيكون للمتغير ذو القيمة الموجبة الأكبر في صف دالة الهدف بعد أن نفترض أن قيمة المعامل (M) قيمة كبيرة أي أكبر من أي قيمة في صف دالة الهدف بقيمة موجبة، أي بعد تحويل دالة الهدف إلى معادلة صفرية كما في حالة التعظيم، وبعدها المتغير الخارج (leaving variable) والمحور (pivot) لغاية التوصل إلى جدول الحل الأمثل الذي تكون فيه قيم صف دالة الهدف إما صفر أو سالبة.

مثال 02:

$$\text{Min } Z = 10x_1+12x_2+15x_3$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 3x_1+3x_2+x_3 \geq 120 \\ 3x_1+5x_2+2x_3 \geq 180 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

في البداية نقوم بكتابة الشكل العياري وذلك بتحويل المتباينات إلى معادلات بطرح متغيرات متممة لأننا في حالة (≤) واضافة متغيرات اصطناعية كما يلي:

$$3x1+3x2+x3-s1+A1=120$$

$$3x1+5x2+2x3-s2+A2=180$$

- نضيف المتغيرات المتممة إلى دالة الهدف بمعاملات صفرية والمتغيرات الاصطناعية بمعامل (M) على النحو التالي:

$$\text{Min } Z= 10x1+12x2+15x3+0s1+0s2+MA1+MA2$$

- تشكيل مصفوفة القيود:

جدول رقم (5)

X1	X2	X3	S1	S2	A1	A2
3	3	1	-1	0	1	0
3	5	2	0	-1	0	1

عمود (A1) وعمود (A2) يشكلان الأعمدة الأحادية.

- تشكيل جدول الحل الأساسي باستخدام الخطوات السابقة من (6) إلى (9).

جدول رقم (6)

Z		10	12	15	0	0	M	M	XB	ϴ
B	**VB**	**X1**	**X2**	**X3**	**S1**	**S2**	**A1**	**A2**		
A1	**M**	3	3	1	-1	0	1	0	120	40
A2	**M**	3	5	2	0	-1	0	1	180	36
Fj		6M	8M	3M	-M	-M	0	0	**Z=300M**	
Z-Fj		10-6M	12-8M	15-3M	+M	+M	M	M		

من الجدول السابق نجد أن العنصر الداخل هو (x1) لأنه يحمل أقل قيمة في سطر (Z-fj) لأننا في حالة التدنية، ومن ثم نقوم بقسمة قيم عمود (XB) على عمود العنصر الداخل (X2) أما سطر العنصر الخارج فهو (A2) لأنه يملك أدنى قيمة في عمود (ϴ) أما خانة التقاطع (الخانة الحمراء) فهي تمثل محور التقاطع (Pivot).

سطر (Fj) يمثل حاصل ضرب (VB) و (Xj).

سطر (Z-Fj) يبين لنا إذا ما كان لدينا حل أمثل أم لا.

عمود (ϴ) يمثل حاصل قسمة عمود (X2) باعتباره عمود العنصر الداخل وعمود (XB).

ومحور الارتكاز أو التقاطع هو الذي سنعتمد عليه في احتساب القيم الجديدة في الجدول الموالي:

القيم الجديدة في الجدول الموالي تحتسب كمايلي:

قيم عمود (Pivot) تعوض بأصفار، قيم سطر (Pivot) تقسم على قيمة (Pivot)، أما القيم المقابلة تحسب بالعلاقة التالية **((القيمة المستهدفة*محور التقاطع) - (جداء القيم المقابلة)) / (Pivot).**

جدول رقم (7)

Z		10	12	15	0	0	M	M	XB	Ɵ
B	**VB**	**X1**	**X2**	**X3**	**S1**	**S2**	**A1**	**A2**		
A1	**M**	6/5	0	-1/5	-1	3/5	1	-3/5	12	12/6/5 =10
X2	**12**	3/5	5/5= 1	2/5	0/5 =0	-1/5	0/5 =0	1/5	36	36/3/5 =60
Fj		6/5M+36/5	12	24/5-1/5M	-M	3/5M-12/5	M	12/5-3/5M	**Z=12 M+432**	
Z-Fj		14/5-6/5M	0	1/5M+51/5	M	12/5-3/5M	0	8/5M-12/5		

من الجدول السابق يتبين لنا أنه لا يمثل جدول الحل الأمثل لأن كل القيم الموجودة في سطر (Z-Fj) ليست أكبر من الصفر. وعليه فالعنصر الداخل هو (X1) أما العنصر الخارج فهو (A1) أما عنصر الارتكاز (Pivot) فهو العدد 5/6 (المربع الأحمر). وبتطبيق نفس الخطوات السابقة نحصل على الجدول الموالي:

جدول رقم (8)

Z		10	12	15	0	0	M	M	XB	Ɵ
B	**VB**	**X1**	**X2**	**X3**	**S1**	**S2**	**A1**	**A2**		
X1	**10**	1	0	-1/6	-5/6	1/2			10	
X2	**12**	0	1	1/2	1/2	-1/2			30	
Fj		10	12	26/6	-14/6	-1			**Z=460**	
Z-Fj		0	0	32/3	14/6	+1				

بما أن الجدول السابق فيه كل قيم سطر **(Z-Fj)** موجبة أو معدومة فإنه يمثل جدول الحل الأمثل وقيم المتغيرات هي على النحو التالي: (x1=10) و (x2=30) لبلوغ أدنى تكلفة تقدر بـ 460 وحدة نقدية. ولو عوضنا قيمة كل من (x1) و (x2) في دالة الهدف لتحصلنا على الرقم 460. أما قيم المتغيرات (s1) و (s2) في جدول الحل الأمثل فهي معدومة (لم تظهر في الجدول النهائي)، كذلك المتغيرات

الاصطناعية لم تظهر في الجدول أعلاه أي قيمتها تساوي الصفر وهذا ما تم ذكره في الخطوات السابقة.

ولو قمنا بتعويض قيم كل من ($x1=10$) و ($x2=30$) في قيود البرنامج لوجدنا ($s1=0$) و ($s2=0$)، و ($A1=0$) و ($A2=0$).

تمهيد:

من الظواهر المهمة المصاحبة لمسائل البرمجة الخطية نموذج الثنائية و التي تعرف بتحويل نموذج البرمجة الخطية الأولي إلى نموذج الثنائية، و يختص هذا الأخير بسهولة حله عند حصول أي تغير في معاملات و إتاحة المتغيرات في النموذج الأولي بعد صياغته و حله، و تستخدم هذه الخاصية في تسهيل ظاهرة الحساسية لنموذج البرمجة الخطية.[1]

ترتبط عادة مشكلة البرمجة الخطية مع نموذج برمجي أولي (Primal Model) من نماذج البرمجة الخطية، الذي يمكن أن يخضع للمعالجة في المرحلة الأولى قبل أن يتم حله أو يكون حله معقد نوعا ما ويقترن دائما مع هذا النموذج نموذج آخر يطلق عليه النموذج المقابل (Dual Model)، ولكل نموذج مقابل حل أمثل ينطبق تماما مع حل النموذج الأولي.

إن اللجوء إلى استخدام النموذج المقابل يتضمن فوائد متعددة منها سهولة التوصل إلى تحقيق الحل الأمثل لمشاكل البرمجة الخطية وسرعته عندما يصعب حل النموذج الأولي.[2]

1- تعريف النموذج الثنائي أو النموذج المقابل:

لأي مسألة برمجة خطية خاصة بتعظيم الأرباح، مسألة ثانية تكون على شكل تخفيض، وكذلك فلأي مسألة تخفيض هناك مسألة تخفيض ثانية تكون على شكل تعظيم. ويمكن استخدام الطريقة المبسطة في حل كل من المشكلة الأولى والثانية للبرمجة الخطية. وتسمى المشكلة الأساسية للبرمجة الخطية بالمسألة الأولى بينما تسمى المشكلة المقابلة لها بالمسألة الثانية. وسواء تم حل المشكلة الأولى أو الثانية فكلاهما تؤديان لنفس الإجابة.[3]

2- خطوات تحويل النموذج الأولي إلى نموذج مقابل:

يمكن تلخيص خطوات تحويل النموذج الأصلي إلى نموذج ثنائي بالشكل التالي:[4]

- عندما يكون النموذج الأصلي يعبر عن مشكلة الوصول إلى أقصى قيمة (Max) فإنه يتحول إلى الوصول إلى أدنى قيمة (Min) عند إعداد النموذج الثنائي، والعكس صحيح.
- الموارد المتاحة والمذكورة في الجانب الأيمن لقيود النموذج الأصلي تصبح معاملات للمتغيرات الجديدة في دالة هدف النموذج المقابل.

[1] أبو القاسم مسعود الشيخ، (2014)، " **بحوث العمليات**"، الطبعة الثانية، المجموعة العربية للتدريب والنشر، القاهرة، مصر، ص 159.

[2] فتحي حمدان، (2010)، "**بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب**"، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر، الأردن، ص 129.

[3] علي العلاونة و آخرون، **مرجع سبق ذكره**، ص 211.

[4] منعم زمزير الموسوي، **بحوث العمليات-مدخل علمي لاتخاذ القرارات**-، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، 2009، ص 152.

- معاملات متغيرات دالة الهدف في النموذج الأصلي تصبح قيم الجانب الأيمن للقيود الجديدة في النموذج المقابل.
- استبدال المتغيرات المشار إليها بالرمز (X) في النموذج الأولي إلى متغيرات مشار لها بالرمز (Y) في النموذج المقابل وتحويل رمز دالة الهدف من (Z) في النموذج الأصلي إلى (W) في النموذج المقابل.
- تحويل مصفوفة المعاملات للمتغيرات في قيود النموذج الأولي بحيث تصبح الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف في النموذج المقابل.
- كلا النموذجين متحرران من مبدأ السلبية لكافة المتغيرات (إضافة شرط عدم سلبية المتغيرات).

إضافة إلى ذلك نقوم بـــ:

✓ تحويل اتجاه المتباينات من النموذج الأصلي إلى النموذج المقابل ($\leq$ تصبح $\geq$ والعكس).

✓ تغيير ترميز المتغيرات من النموذج الأصلي إلى النموذج المرافق ($x_1 \ldots x_n$) تصبح ($y_1 \ldots y_m$).

وبناءا على ذلك يصبح عدد متغيرات النموذج المقابل مساويا لعدد قيود البرنامج الأولي.

و عليه تكون الصيغ القانونية للنموذجين الأولي و الثنائي كما يلي: [5]

$$\text{Max } Z = C'x \qquad\qquad \text{Min } W = b'y$$

$$s/c \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad s/c \begin{cases} A'y \geq C \\ y \geq 0 \end{cases}$$

وللتوضيح أكثر سوف نأخذ المثال التالي:

[5] محمد راتول، (2006)، "**بحوث العمليات**"، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، الطبعة الثانية، ص 81.

مثال 01: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\textbf{Max } Z = 100\,x_1 + 200\,x_2 + 300\,x_3$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 1000 \\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 1500 \\ 8x_1 + 9x_2 + 4x_3 \leq 2000 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2500 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن النموذج يحتوي على 3 متغيرات والتي تمثل 3 أنواع من المنتجات، تعتمد المؤسسة في إنتاج هذه المنتجات على 4 موارد متاحة، حيث أنها تسعى من خلال هذه العملية إلى تعظيم الأرباح المترتبة عن بيع هذه المنتجات، في المقابل سيسعى مشتري هذه المنتجات إلى تدنية تكاليف شرائها مع تحفيز صاحب المؤسسة على البيع، فتصبح دالة الهدف الخاصة بهذا المشتري من نوع تدنية:

$$\textbf{Min } W = 1000\,y_1 + 1500\,y_2 + 2000\,y_3 + 2500\,y_4$$

حيث تمثل (y_1, y_2, y_3, y_4) أسعار المواد الأولية.

في الوقت نفسه ستقوم المؤسسة ببيع المنتجات في حال ما إذا كان العائد المحقق من بيعها أكبر من العائد على الإنتاج، فتصاغ هذه العملية كما يلي:

$$\begin{cases} 2y_1 + 5y_2 + 8y_3 + 5y_4 \geq 100 \\ y_1 + 5y_2 + 9y_3 + 2y_4 \geq 200 \\ 4y_1 + 7y_2 + 4y_3 + 4y_4 \geq 300 \end{cases}$$

وعليه فإن النموذج المرافق للنموذج الأولي أعلاه يكون من الشكل:

$$\textbf{Min W} = 1000\, y_1+1500\, y_2+2000\, y_3+2500\, y_4$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 2y_1+5y_2+8y_3+5y_4 \geq 100 \\ y_1+5y_2+9y_3+2y_4 \geq 200 \\ 4y_1+7y_2+4y_3+4y_4 \geq 300 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

مثال 02: أكتب النموذج المقابل لنموذج البرمجة الخطية الأولي التالي:

$$\textbf{Min Z} = 4\, x_1+1\, x_2$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 30x_1+10x_2 \geq 100 \\ 125x_1+12x_2 \geq 200 \\ 120x_1+15x_2 \geq 150 \\ x_1, x_2, \geq 0 \end{cases}$$

بالاعتماد على الخطوات السابقة ستكون صيغة النموذج المقابل كما يلي:

عدد المتغيرات في النموذج الأولي 2 وعدد القيود 3، وفي النموذج المقابل سيصبح عدد المتغيرات 3 وعدد القيود 2.

لنفرض أن متغيرات النموذج المقابل هي (y_1,y_2,y_3) ودالة الهدف (W)، فسيصبح النموذج المقابل على الشكل التالي:

$$\textbf{Max Z} = 100y_1+200y_2+150y_3$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 30y_1+125y_2+120y_3 \leq 04 \\ 10y_1+12y_2+15y_3 \leq 01 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

3- القواعد الأساسية لتشكيل النموذج الثنائي[6]:

نسعى من خلال هذه المرحلة إلى التعرف على مجموعة من القواعد والتي تستخدم عادة في تشكيل البرنامج الثنائي للنماذج الأصلية التي لا تكون في صورتها النموذجية (القانونية).

3-1- الحالة الأولى: ظهور القيد (i) بإشارة (≥) في نموذج (Max):

لتوضيح هذه الحالة، سوف نتناولها في شكل مثال.

مثال 03: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 4x_2 + 9x_3$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 100 \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 200 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن القيد الثاني لا يحقق شرط الشكل النموذجي للنموذج أعلاه، لذا وجب تحويله إلى متراجحة من الشكل **أصغر أو تساوي (≤)** بضرب طرفي المعادلة في القيمة (-1)، فيصبح:

$$-7x_1 - 4x_2 - 3x_3 \leq -200$$

وعليه فإن النموذج الأولي سيكون:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 4x_2 + 9x_3$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 100 \\ -7x_1 - 4x_2 - 3x_3 \leq -200 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

وبالتالي سيكون النموذج المقابل كما يلي:

6 فتيحة بن جيلالي، مطبوعة بعنوان: **"محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة"**، جامعة ابن خلدون، تيارت، 2017-2018، ص 67.

$$\text{Min } W = 100\,y_1 - 200\,y'_2$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 2y_1 - 7y'_2 \geq 5 \\ 3y_1 - 4y'_2 \geq 4 \\ 8y_1 - 3y'_2 \geq 9 \\ y_1 \geq 0,\ y'_2 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن القيد الثاني وبعد تعديله، لم يحافظ على إشارة بعض من معاملات النموذج الأصلي، وللمحافظة على إشارات النموذج الأولي نضع: $y_2 = -\,y'_2$

فيصبح الشكل النهائي للنموذج الثنائي كما يلي:

$$\text{Min } W = 100\,y_1 + 200\,y_2$$

Subject to constraints :

$$\begin{cases} 2y_1 + 7y_2 \geq 5 \\ 3y_1 + 4y_2 \geq 4 \\ 8y_1 + 3y_2 \geq 9 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0 \end{cases}$$

وعليه فإن ظهور القيد رقم i بإشارة أكبر أو تساوي ≥ في نموذج التعظيم الأولي (Max) يؤثر على المتغيرة رقم i فتكون أقل أو تساوي الصفر في نموذج التدنية الثنائي ($y_i \leq 0$).

2-3- الحالة الثانية: ظهور القيد (i) بإشارة (=) في نموذج Max:

سنقوم بتوضيح هذه الحالة، في المثال أدناه.

مثال 04: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 120\,x_1 + 240\,x_2$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 60 \\ 3x_1 + 4x_2 = 50 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن القيد الثاني لا يحقق شرط الشكل النموذجي للنموذج أعلاه كونه مكتوبا في صورة معادلة، لذا وجب تحويله إلى متراجحتين إحداهما أصغر أو تساوي والأخرى أكبر أو تساوي، فيصبح:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 50$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 50$$

وبما أن المتراجحة الثانية تحقق هي الأخرى شرط الشكل النموذجي لنموذج التعظيم فيجب هي الأخرى تعديلها و ذلك بضرب طرفيها في (-1) لتصبح من الشكل:

$$-3x_1 - 4x_2 \leq -50$$

وبناء على ذلك يصبح الشكل النموذجي للنموذج الأولي كما يلي:

$$\text{Max } Z = 120\, x_1 + 240\, x_2$$

Subject to constraints :

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 60 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 50 \\ -3x_1 - 4x_2 \leq -50 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

وعليه يمكن استنتاج النموذج الثنائي للنموذج أعلاه، فيكون كما يلي:

$$\text{Min } Z = 60\, y_1 + 50\, y'_2 - 50y''_2$$

Subject to constraints :

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 - 3y_3 \geq 120 \\ 6y_1 + 4y_2 - 4y3 \geq 240 \\ y_1 \geq 0,\ y'_2 \geq 0,\ y''_2 \geq 0 \end{cases}$$

وبتعديله يصبح كما يلي:

$$\text{Min } Z = 60\, y_1 + 50(y'_2 - y''_2)$$

Subject to constraints :

$$\begin{cases} 2y_1 + 3(y'_2 - y''_2) \geq 120 \\ 6y_1 + 4(y_2 - y''_2) \geq 240 \\ y_1 \geq 0,\ y'_2 \geq 0,\ y''_2 \geq 0 \end{cases}$$

ما يلاحظ أن النموذج المقابل يحتوي على 3 متغيرات في حين أنه من المفروض وجود متغيرتين فقط باعتبار أن النموذج الأصلي يحتوي على قيدين فقط، لذلك وجب علينا تعديل البرنامج المرافق و ذلك بـوضع: $(y_2 = y'_2 - y''_2)$.

فيصبح الشكل النهائي للنموذج المرافق كما يلي:

$$\text{Min } Z = 60\, y_1 + 50 y_2$$

Subject to constraints :

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 \geq 120 \\ 6y_1 + 4y_2 \geq 240 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \in R \end{cases}$$

ووفقا لذلك قد تكون:

- $y_2 > 0$ إذا كانت: $y'_2 > y''_2$
- $y_2 < 0$ إذا كانت: $y'_2 < y''_2$
- $y_2 = 0$ إذا كانت: $y'_2 = y''_2$

و عليه فإن ظهور القيد رقم i بإشارة تساوي (=) في نموذج التعظيم الأولي (Max) يؤثر على المتغيرة رقم i فتكون غير محددة الإشارة (unrestricted) في نموذج التدنية الثنائي ($y_i \in R$).

3-3- الحالة الثالثة: ظهور متغيرة j غير محددة الإشارة ($x_j \in R$) (unrestricted):

لتوضيح هذه الحالة، سنتناول المثال أدناه.

مثال 05: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\mathbf{Max\ Z = 11\ x_1 + 32\ x_2}$$

Subject to constraints :

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 130 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 210 \\ 7x_1 + 9x_2 \le 90 \\ x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

ما يلاحظ من النموذج أعلاه أنه ليس في شكله النموذجي باعتبار أن المتغيرة الأولى غير محددة الإشارة لذا وجب تعديله، بتعويض المتغيرة الأولى بفرق متغيرتين ($x_1 = x'_1 - x''_1$)، ليصبح كما يلي:

$$\mathbf{Max\ Z = 11\ (x'_1 - x''_1) + 32\ x_2}$$

Subject to constraints :

$$\begin{cases} 2(x'_1 - x''_1) + 5x_2 \le 130 \\ 4(x'_1 - x''_1) + 3x_2 \le 210 \\ 7(x'_1 - x''_1) + 9x_2 \le 90 \\ x'_1 \ge 0,\ x''_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{Max\ Z = 11\ x'_1 - 11x''_1 + 32\ x_2}$$

Subject to constraints :

$$\begin{cases} 2x'_1 - 2x''_1 + 5x_2 \le 130 \\ 4x'_1 - 4x''_1 + 3x_2 \le 210 \\ 7x'_1 - 7x''_1 + 9x_2 \le 90 \\ x'_1 \ge 0,\ x''_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

فيصبح الشكل النهائي للنموذج المرافق كما يلي:

$$\mathbf{Min\ W = 130\ y_1 + 210y_2 + 90y3}$$

Subject to constraints :

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + 7y_3 \ge 11 \\ -2y_1 - 4y_2 - 7y_3 \ge -11 \\ 5y_1 + 3y_2 + 9y_3 \ge 32 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0 \end{cases}$$

سبق و أن تمت الإشارة إلى أن عدد متغيرات النموذج الأولي يجب أن تكون مساوية لعدد قيود النموذج المرافق، و هذا ما لا يحققه النموذج أعلاه، لذا وجب علينا تعديله بضرب القيد الثاني في (-1)، و ذلك بغية كتابة القيدين الأول و الثاني في شكل مساواة، فيصبح الشكل النهائي للنموذج الثنائي كما يلي:

$$\text{Min } W = 130y_1 + 210y_2 + 90y_3$$

Subject to constraints :

$$2y_1 + 4y_2 + 7y_3 \geq 11$$
$$2y_1 + 4y_2 + 7y_3 \leq 11$$
$$5y_1 + 3y_2 + 9y_3 \geq 32$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$\text{Min } W = 130y_1 + 210y_2 + 90y_3$$

Subject to constraints :

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + 7y_3 = 11 \\ 5y_1 + 3y_2 + 9y_3 \geq 32 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

وعليه فإن ظهور المتغيرة رقم j غير محددة الإشارة ($y_i \in R$) في نموذج التعظيم الأولي (Max)، يؤثر على القيد رقم j فيظهر بالإشارة (=) في نموذج التدنية الثنائي.

3-4- الحالة الرابعة: وجود متغيرة j أقل أو تساوي ($x_j \leq 0$):

لتوضيح هذه الحالة، سوف نتناولها في شكل مثال.

مثال 06: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 15x_1 + 13x_2 + 23x_3$$

Subject to constraints :

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 210 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 240 \\ 6x_1 + 7x_2 + 6x_3 \leq 160 \\ x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

يلاحظ أن النموذج أعلاه غير مكتوب في شكله النموذجي باعتبار أن المتغيرة الأولى أقل أو تساوي الصفر، ولذلك وجب تعديل النموذج بحيث نضع: $x_1 = -x'_1$ فيصبح الشكل النموذجي كما يلي:

$$\text{Max } Z = -15x'_1 + 13x_2 + 23x_3$$

Subject to constraints :

$$\begin{cases} -4x'_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 210 \\ -3x'_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 240 \\ -6x'_1 + 7x_2 + 6x_3 \leq 160 \\ x'_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

و بناء عليه يصبح شكل النموذج المقابل كما يلي:

Min W = 210 y_1+ 240 y_2 + 160 y_3

Subject to constraints :

$$\begin{cases} -4y_1 - 3y_2 - 6y_3 \geq -15 \\ 2y_1 + 3y_2 + 7y_3 \geq 13 \\ 8y_1 + 5y_2 + 6y_3 \geq 23 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Min W = 210 y_1+ 240 y_2 + 160 y_3

Subject to constraints :

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + 6y_3 \leq 15 \\ 2y_1 + 3y_2 + 7y_3 \geq 13 \\ 8y_1 + 5y_2 + 6y_3 \geq 23 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

وعليه فإن ظهور المتغيرة رقم j بإشارة أقل أو تساوي الصفر ($x_j \leq 0$) في نموذج التعظيم الأولي (Max)، يؤثر على القيد رقم j فيظهر بالإشارة أقل أو تساوي (≤) في نموذج التدنية الثنائي.

4- علاقة النموذج الثنائي بالنموذج الأولي:

4-1- نظرية الثنائية القوية:

إذا كان النموذج الأولي P والنموذج الثنائي P_D، حيث أن ($x^*_1, x^*_2 \ldots x^*_n$) حل أساس مقبول للنموذج الأولي P، و ($y^*_1, y^*_2 \ldots y^*_m$) حل أساس مقبول للنموذج الثنائي P_D، وحقق الحلان المقبولان العلاقة:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

أي: Z = W

فإن: الحلين المقبولين ($x^*_1, x^*_2 \ldots x^*_n$) و ($y^*_1, y^*_2 \ldots y^*_m$) هما حلين أمثلين للنموذجين الأولي والثنائي على التوالي.

4-2- نظرية الثنائية الضعيفة:

إذا كان النموذج الأولي P والنموذج الثنائي P_D، حيث أنه من أجل أي حل أساس مقبول ($x'_1, x'_2 \ldots x'_n$) للنموذج الأولي P، ومن أجل أي حل أساس مقبول ($y'_1, y'_2 \ldots y'_m$) للنموذج الثنائي P_D فإن:

أ- إذا كان النموذج الأولي من نوع تعظيم Max: قيمة دالة الهدف Z للنموذج الأولي من أجل أي حل أساس مقبول تكون دائما **أصغر أو تساوي** قيمة دالة الهدف W للنموذج الثنائي، أي:

$$Z_{(x'1,\, x'2 \ldots x'n)} \leq W_{(y'1,\, y'2 \ldots y'm)}$$

$$C_1x'_1 + C_2x'_2 + \ldots C_nx'_n \leq b_1y'_1 + b_2y'_2 + \ldots b_mx'_m$$

$$\sum_{j=1}^{n} C_j x'_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y'_i$$

ب- إذا كان النموذج الأولي من نوع تدنية Min: قيمة دالة الهدف Z للنموذج الأولي من أجل أي حل أساس مقبول تكون دائما **أكبر أو تساوي** قيمة دالة الهدف W للنموذج الثنائي، أي:

$$Z_{(x'1,\, x'2 \ldots x'n)} \geq W_{(y'1,\, y'2 \ldots y'm)}$$

$$C_1x'_1 + C_2x'_2 + \ldots C_nx'_n \geq b_1y'_1 + b_2y'_2 + \ldots b_mx'_m$$

$$\sum_{j=1}^{n} C_j x'_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y'_i$$

3-4- نظرية الفجوات المكملة:

لا تقتصر العلاقة بين النموذجين الأولي والثنائي على تساوي دالتي الهدف عند الحل الأمثل، ولكنها تتعدى إلى استنتاج الحل الأمثل لأحد النموذجين انطلاقا من الحل الأمثل للنموذج الآخر الذي تم حله باستخدام طريقة السمبلكس، وهذا ما يمثل مضمون نظرية الفجوات المكملة، والتي مفادها ما يلي:

أ- $S_i\, y'_i = 0$

- ❖ إذا كانت: $S_i=0$ فإن $y'_i \neq 0$ أي $y'_i > 0$

أي أنه إذا كان القيد رقم i للنموذج الأولي مشبعا، فإن المتغيرة رقم i (y_i) للنموذج الثنائي أكبر من الصفر.

- ❖ إذا كانت: $y'_i = 0$ فإن $S_i \neq 0$ أي $S_i > 0$

أي أنه إذا كان القيد رقم i للنموذج الأولي غير مشبع، فإن المتغيرة رقم i (y_i) للنموذج الثنائي تساوي الصفر.

ب- $k_i\, x'_i = 0$

❖ إذا كانت: $k_i=0$ فإن $x'_i \neq 0$ أي $x'_i>0$

أي أنه إذا كان القيد رقم i للنموذج الثنائي مشبعا، فإن المتغيرة رقم i (x_i) للنموذج الأولي أكبر من الصفر.

❖ إذا كانت: $x'_i=0$ فإن $k_i \neq 0$ أي $x_i>0$

أي أنه إذا كان القيد رقم i للنموذج الثنائي غير مشبع، فإن المتغيرة رقم i (x_i) للنموذج الثنائي تساوي الصفر.

وبغرض فهم محتوى هذه النظرية أكثر، سنتناولها في المثال أدناه:

مثال 07: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

جدول رقم (1)

النموذج الثنائي	النموذج الأولي
$\text{Min } W = 300y_1+190y_2+110y_3+130y_4$ Subject to constraints : $y_1+y_2+y_3 \geq 200$ $2y_1+y_2+y_4 \geq 370$ $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$	$\text{Max } Z = 200x_1+370x_2$ Subject to constraints : $\begin{cases} x_1+2x_2 \leq 300 \\ x_1+x_2 \leq 190 \\ x_1 \leq 110 \\ x_2 \leq 130 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

الحل الأمثل للنموذج الأولي هو: $x_1=80$، $x_2=110$، قيمة دالة الهدف: $Z=56700$

ولاستنتاج الحل الأمثل للنموذج الثنائي، نتبع الخطوات التالية:

أ- كتابة النموذجين على الشكل المعياري:

جدول رقم (2)

النموذج الثنائي	النموذج الأولي
Min W = 300 y_1+190 y_2 +110 y_3+130 y_4 Subject to constraints : $\begin{cases} y_1+y_2+y_3+k_1=200 \\ 2y_1+y_2+y_4+k_2=370 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, k_1, k_2 \geq 0 \end{cases}$	**Max Z = 200 x_1+370 x_2** Subject to constraints : $\begin{cases} x_1+2x_2+S_1=300 \\ x_1+x_2+S_2=190 \\ x_1+S_3=110 \\ x_2+S_4=130 \\ x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0 \end{cases}$

ب- استنتاج قيم متغيرات الفجوة للنموذج الأولي:

$S_1=300-x_1-2x_2=300-80-2(110) \Rightarrow S_1=0$

$S_2=190-x_1-x_2=190-80-110 \Rightarrow S_2=0$

$S_3=110-x_1=110-80 \Rightarrow S_3=30$

$S_4=130-x_2=130-110 \Rightarrow S_4=20$

جـ- استنتاج قيم متغيرات النموذج الثنائي و الحل الأمثل الموافق له:

لاستنتاج قيم متغيرات النموذج الثنائي، نقوم باستخدام نظرية الفجوات المكملة، و التي تقوم على الشرطين:

❖ $S_i\, y'_i=0$

بما أن: $S_1=0$ فإن $y_1\neq 0$ أي $y_1>0$

بما أن: $S_2=0$ فإن $y_2\neq 0$ أي $y_2>0$

بما أن: $S_3=30$ أي $S_3\neq 0$ أي $S_3>0$ فإن $y_3=0$

بما أن: $S_4=20$ أي $S_4\neq 0$ أي $S_4>0$ فإن $y_4=0$

❖ $k_i\, x'_i=0$

بما أن: $x_1=80$ أي $x_1\neq 0$ أي $x_1>0$ فإن $k_1=0$

بما أن: $x_2=110$ أي $x_2\neq 0$ أي $x_2>0$ فإن $k_2=0$

وبغية الحصول على قيم باقي المتغيرات y_1 و y_2 نقوم بتعويض: $y_3=0$، $y_4=0$، $k_1=0$، $k_2=0$ المحصل عليها أعلاه في القيود الوظيفية للنموذج الثنائي في شكله المعياري، فنجد:

$$\begin{cases} y_1+y_2+0+0=200 \\ 2y_1+y_2+0+0=370 \end{cases}$$

نقوم بحل جملة المعادلات، فنحصل على: $y_1=170$ و $y_2=30$، و بعد تعويض القيم المحصل عليها في دالة الهدف للنموذج الثنائي نحصل على: $W = 300\,(170) + 190\,(30) + 110\,(0) + 130\,(0) = 56700$.

وبما أن قيم دوال الهدف للنموذجين الأولي والثنائي متساوية، فإن الحل المستنتج للنموذج الثنائي هو **الحل الأمثل.**

5- قراءة قيم متغيرات النموذج الثنائي انطلاقا من جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي[7]:

إضافة إلى نظرية الفجوات المكملة المستخدمة في استنتاج الحل الأمثل لأحد نماذج البرمجة الخطية اعتماداً على الأمثل للآخر، هناك أيضا طريقة أخرى لذلك انطلاقا من جدول السمبلكس الحل الأمثل.

نعلم أن الوصول للحل الأمثل يكون عند تحقق معيار الأمثلية للنموذج كما يلي:

$$\text{Max}: \quad C_j - Z_j \leq 0$$

$$\text{Min}: \quad C_j - Z_j \geq 0$$

وتتم قراءة واستنتاج الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الآخر (الثنائي أو الأولي) كما يلي:

1-5- قراءة قيم متغيرات القرار للنموذج الثنائي:

أ- إذا كان النموذج الأولي على شكله النموذجي فإن: y_i هي Z_j لمتغيرة الفجوة S_i؛

ب- إذا كان النموذج الأولي ليس على شكله النموذجي فإن:

- ❖ القيد i أقل أو يساوي ($\leq$) فإن: $y_i = Z_j$.
- ❖ القيد i أكبر أو يساوي ($\geq$) فإن: +.
- ❖ القيد i بإشارة تساوي (=) فإن: $y_i = Z_j$.

2-5- قراءة قيم متغيرات الفجوة للنموذج الثنائي:

أ- إذا كان النموذج من الشكل (Max) فإن: $k_i = -(C_j - Z_j)$ ؛

---

[7] سهيلة عبد الله سعيد، (2007)، **"الأساليب الكمية وبحوث العمليات"**، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر، الأردن، ص 130.

ب- إذا النموذج من الشكل (Min) فإن: $k_i = (C_j - Z_j)$.

مثال 08: ليكن نموذج البرمجة الخطية الأولي التالي:

$$\mathbf{Max\ Z = 40\ x_1 + 60\ x_2 - 20\ x_3}$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 300 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 220 \\ x_1 + x_3 \leq 100 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

وجدول الحل الأمثل للنموذج أعلاه هو التالي:

جدول رقم (3): جدول السمبلكس الذي يمثل الحل الأمثل للمثال 08

Cj		40	60	-20	0	0	0	XB	Ө
B	**VB**	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
x_2	**60**	0	1	-1/6	2/9	-1/6	0	30	
x_1	**40**	1	0	1/3	-1/9	1/3	0	40	
S_2	**0**	0	0	7/6	-2/9	1/6	1	70	
F_j		40	60	10/3	80/9	10/3	0	**Z=3400**	
$C_j - F_j$		0	0	-50/3	-80/9	-10/3	0		

الحل الأمثل للنموذج الثنائي الموافق للنموذج الأولي أعلاه هو التالي:

أ- متغيرات القرار: بما أن النموذج الأولي على شكله النموذجي فإن: y_i هي Z_j لمتغيرة الفجوة S_i، وعليه:

$$\mathbf{y_1 = 80/9, \quad y_2 = 10/3, \quad y_3 = 0}$$

ب- متغيرات الفجوة: بما أن النموذج من الشكل (Max) فإن:$k_i = -(C_j - Z_j)$

$$\mathbf{k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 50/3}$$

6- تحليل الحساسية (Analysis Sensitivity):

تكمن أهمية تحليل الحساسية في أنه يعطي دراسة كاملة للتغيرات التي تطرأ على كل المتغيرات الداخلة في النموذج الرياضي بحيث يبقى لنا أكبر عائد أو أقل تكلفة وما هو مدى التغيرات في هذه المتغيرات فمثلا إذا أنتجنا نوع من السلع وأردنا تسويق هذا المنتج فإن هناك عدة ظروف تلعب دورا

في تحديد سعر هذه السلعة. فما هو أقل مدى و أكبر مدى يمكن أن يأخذه سعر هذه السلعة بحيث يبقى الربح أفضل ما يمكن[8]. وسنعرض هذا الموضوع للحل الأمثل للنموذج الرياضي سواء كان هذا الحل بالطريقة البيانية أو بالطريقة المبسطة.

يقصد بتحليل الحساسية معرفة مدى تأثر الحل الأمثل بالتغيرات التي قد تطرأ على المعطيات التي تم إعداد البرنامج الخطي على أساسها. و هذه التغيرات يمكن أن تكون:[9]

- ✓ على معاملات متغيرات دالة الهدف (C_j).
- ✓ على قيم الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة) (b_j).
- ✓ على استخدامات الموارد (a_{ij}).

6-1- حالة تغير المعاملات C_j لمتغيرات القرار x_i:

في هذه الحالة قد تكون متغيرة القرار، إما متغيرة خارج الأساس، أو متغيرة أساس، لذا نمير بين حالتين هنا:

الحالة 01: تغير المعامل C_j لمتغيرة القرار x_i خارج الأساس:

بغرض التعرف أكثر على هذه الحالة، سوف نأخذ المثال التالي:

مثال 09: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\mathbf{Max\ Z = 100\,x_1+60\,x_2+80\,x_3}$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 6x_1+3x_2+6x_3 \leq 1200 \\ 4x_1+4x_2+6x_3 \leq 1000 \\ 4x_1+12x_2+8x_3 \leq 3800 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

والحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أعلاه يقدمه الجدول التالي:

[8] فتحي حمدان، **مرجع سبق ذكره**، ص 145.
[9] فتيحة بلجيلالي، **مرجع سبق ذكره**، ص 76.

جدول رقم (4): جدول السمبلكس الذي يمثل الحل الأمثل للمثال 09

Cj		100	60	80	0	0	0	XB	Ө
B	**VB**	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
x_1	100	1	0	1/2	1/3	-1/4	0	150	
x_2	60	0	1	1	-1/3	1/2	0	100	
S_3	80	0	0	-6	8/3	-5	1	2000	
F_j		100	60	110	40/3	5	0	**Z=21000**	
$C_j - F_j$		0	0	-30	-40/3	-5	0		

قد يتغير معامل x_3 بمقدار (موجب أو سالب) يساوي ΔC_3 فيصبح C'_3 حيث أن: $C'_3 = C_3 + \Delta C_3$
أي: $C'_3 = 80 + \Delta C_3$، وبتعويض القيمة الجديدة في جدول الحل الأمثل نحصل على:

جدول رقم (5): جدول السمبلكس الذي يمثل الحل الأمثل بعد تغير معامل x_3 للمثال 09

Cj		100	60	80+ ΔC_3	0	0	0	XB	Ө
B	**VB**	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
x_1	100	1	0	1/2	1/3	-1/4	0	150	
x_2	60	0	1	1	-1/3	1/2	0	100	
S_3	0	0	0	-6	8/3	-5	1	2000	
F_j		100	60	110	40/3	5	0	**Z=21000**	
$C_j - F_j$		0	0	**-30+ ΔC_3**	-40/3	-5	0		

عند تغير معامل x_3 فإن قيمة $C_j - Z_j$ تتغير فتصبح: $-30+ \Delta C_3$، ويبقى جدول الحل الأمثل إذا تحقق شرط الأمثلية لنموذج التعظيم $C'_3 - Z_3 \leq 0$:

$$C'_3 - Z_3 \leq 0 \;\Rightarrow\; -30 + \Delta C_3 \leq 0 \;\Rightarrow\; \Delta C_3 \leq 30$$

أي أن الحل الأمثل الذي يقدمه الجدول يبقى أمثلا مادام مقدار التغير للمتغيرة $\mathbf{x_3}$ أقل أو يساوي 30، أما إذا تعدى هذه القيمة فإن الحل لا يبقى أمثلا.

لدينا: $\Delta C_3 \leq 30$

بإضافة القيمة 80 للطرفين نحصل على:

$$\Delta C_3+80 \leq 30+80$$

$$\Delta C_3+80 \leq 110$$

نعلم أن: $C'_3= 80+ \Delta C_3$، وعليه تكون: $\mathbf{C'_3 \leq 110}$

أي أن الحل المتوصل إليه يبقى أمثلا ما دام معامل المتغيرة x_3 أقل أو يساوي 110، أما إذا تعدى هذه القيمة فإنه لا يصبح حلا أمثلا.

- ✓ **إذا كان مقدار التغير أقل من 30:** تصبح في هذه الحالة قيمة $C'_3 - Z_3$ سالبة، ما يحقق معيار الأمثلية، وبالتالي يبقى الحل أمثلا.
- ✓ **إذا كان مقدار التغير مساويا تماما لــ 30:** تصبح في هذه الحالة قيمة $C'_3 - Z_3$ معدومة، ما يحقق معيار الأمثلية، وبالتالي يبقى الحل أمثلا.
- ✓ **إذا كان مقدار التغير أكبر من 30:** تصبح في هذه الحالة قيمة $C'_3 - Z_3$ موجبة، وهذا ما لا يحقق شرط الأمثلية، مما يستوجب إنشاء جدول آخر لتحسين الحل مرة أخرى.

الحالة 02: تغير المعامل C_j لمتغيرة القرار x_i كمتغيرة أساس:

بأخذ المثال السابق، و بافتراض أن معامل متغيرة الأساس $\mathbf{x_1}$ قد تغير بمقدار (موجب أو سالب) يساوي ΔC_1 فيصبح C'_1 حيث أن: $C'_1= C_1+ \Delta C_1$ أي: $C'_1=100+ \Delta C_1$، و بتعويض القيمة الجديدة في جدول الحل الأمثل نحصل على:

جدول رقم (6): جدول السمبلكس الذي يمثل الحل الأمثل بعد تغير معامل x_1 للمثال 09

Cj		$100+\Delta C_1$	60	80	0	0	0	XB	Ɵ
B	**VB**	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
x_1	$100+\Delta C_1$	1	0	1/2	1/3	-1/4	0	150	
x_2	60	0	1	1	-1/3	1/2	0	100	
S_3	00	0	0	-6	8/3	-5	1	2000	
F_j		$100+\Delta C_1$	60	$100+1/2\Delta C_1$	$40/3+1/3\Delta C_1$	$5-1/4\Delta C_1$	0	**Z=21000**	
$C_j - F_j$		0	0	$-30-1/2\Delta C_1$	$-40/3-1/3\Delta C_1$	$-5+1/4\Delta C_1$	0		

يبقى الجدول أعلاه جدول الحل الأمثل إذا تحقق شرط الأمثلية $C_j - Z_j \leq 0$ للمتغيرات خارج الأساس، أي:

$$-30-1/2\Delta C_1 \leq 0 \Rightarrow \Delta C_1 \geq -60$$

$$-40/3-1/3\Delta C_1 \leq 0 \Rightarrow \Delta C_1 \geq -40$$

$$-5+1/4\Delta C_1 \leq 0 \Rightarrow \Delta C_1 \leq 20$$

مما سبق نستنتج أن: ($-40 \leq \Delta C_1 \leq 20$) أي أن الحل يبقى أمثلا ما دامت قيمة تغير معامل متغيرة الأساس x_1 أقل أو تساوي 20، وأكبر أو تساوي (-40).

لدينا: $-40 \leq \Delta C_1 \leq 20$

بإضافة القيمة 100 للطرفين نحصل على:

$$100 - 40 \leq 100+\Delta C_1 \leq 20+100$$

$$60 \leq 100+\Delta C_1 \leq 120$$

نعلم أن: $C'_1 = 100+ \Delta C_1$، وعليه تكون: $\mathbf{60 \leq C'_1 \leq 120}$

أي أن الحل المتوصل إليه يبقى أمثلا ما دام معامل المتغيرة x_1 أقل أو يساوي 120، وأكبر أو يساوي 60، أما إذا تعدى هاتين القيمين فإنه لا يصبح حلا أمثلا.

6-2- حالة تغير الطرف الأيمن للقيود الوظيفية (المتاح) b_j:

إذا تغير الطرف الأيمن للقيود الوظيفية (المتاح) في جدول الحل الأمثل، فإن ذلك سيؤدي إلى تغير قيم متغيرات الأساس.

مثال: تغير المورد الأول b_1:

بأخذ نفس المثال السابق، وتبعا لقيم عمود المتغيرة S_1 فإنه يمكن تفسير تلك القيم كما يلي:

$\frac{1}{3}$: يمثل مقدار تغير (زيادة) قيمة متغيرة الأساس x_1 عند زيادة المتاح الأول b_1 بوحدة واحدة.

$-\frac{1}{3}$: يمثل مقدار تغير (انخفاض) قيمة متغيرة الأساس x_2 عند زيادة المتاح الأول b_1 بوحدة واحدة.

$\frac{8}{3}$: يمثل مقدار تغير (زيادة) قيمة متغيرة الأساس S_3 عند زيادة المتاح الأول b_1 بوحدة واحدة.

عند تغير المورد الأول b_1 بمقدار Δb_1 فيصبح $b'_1 = b_1 + \Delta b_1$، فإن القيم الجديدة لمتغيرات الأساس تصبح عبارة عن القيم القديمة لمتغيرات الأساس مضافاً إليها مقدار التغير في المتاح مضروبا في مقدار تغير قيمة متغيرة الأساس، فتكون على النحو التالي:

$$x_1 = 150 + \frac{1}{3}\Delta b_1$$

$$x_2 = 100 - \frac{1}{3}\Delta b_1$$

$$S_3 = 2000 + \frac{8}{3}\Delta b_1$$

يبقى الحل أمثلا، إذا كانت القيم الجديدة لمتغيرات الأساس تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات، أي:

$$x_1 \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; 150 + \frac{1}{3}\Delta b_1 \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \Delta b_1 \geq -450$$

$$x_2 \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; 100 - \frac{1}{3}\Delta b_1 \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \Delta b_1 \leq 300$$

$$S_3 \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; 2000 + \frac{8}{3}\Delta b_1 \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \Delta b_1 \geq -750$$

$$-450 \leq \Delta b_1 \leq 300$$

و هذا يعني أن الحل المتوصل إليه يبقى حلا أمثلا ما دام مقدار التغير في المورد الأول أقل أو يساوي 300 و أكبر أو يساوي (450-).

لدينا: $50 \leq \Delta b_1 \leq 300$

بإضافة القيمة 1200 للطرفين نحصل على:

$$1200 - 450 \leq 1200 + \Delta b_1 \leq 1200 + 300$$

$$750 \leq 1200 + \Delta b_1 \leq 1500$$

نعلم أن: $b'_1 = 1200 + \Delta b_1$، وعليه تكون: $\mathbf{750 \leq b'_1 \leq 1500}$

أي أن الحل المتوصل إليه يبقى أمثلا ما دام مجال تغير المورد الأول $\mathbf{b_1}$ أقل أو يساوي 1500، وأكبر أو يساوي 750، أما إذا تعدى هاتين القيمين فإنه لا يصبح حلا أمثلا. فمثلا:

- ✓ **إذا كان مقدار التغير أقل من 300:** في هذه الحالة تصبح القيم الجديدة ($150 + \frac{1}{3}\Delta b_1$) **أكبر تماما من الصفر**، أي أنها تحقق شرط عدم سلبية المتغيرات، و تتغير تبعا لذلك قيمة دالة الهدف.
- ✓ **إذا كان مقدار التغير مساويا لــ 300:** في هذه الحالة تصبح القيمة الجديدة لإحدى متغيرات الأساس **مساوية للصفر**، أي أنها تحقق شرط عدم سلبية المتغيرات، و تتغير تبعا لذلك قيمة دالة الهدف.
- ✓ **إذا كان مقدار التغير أكبر من 300:** في هذه الحالة تصبح القيمة الجديدة لإحدى متغيرات الأساس **أقل تماما من الصفر**، أي أنها **لا** تحقق شرط عدم سلبية المتغيرات، و بالتالي فإن الحل المتوصل إليه سيكون مرفوضا، مما يستوجب تحسين الحل مرة أخرى عن طريق تطبيق **الخوارزمية الثنائية للسمبلكس** (تحديد المتغيرة **الخارجة** أي سطر الارتكاز و التي توافق **أقل معامل سالب لــ $\mathbf{b_i}$**، و المتغيرة **الداخلة** أي عمود الارتكاز و التي توافق **أقل معامل سالب** في سطر الارتكاز، ثم عنصر الارتكاز و من ثَم تحسين الحل بطريقة السمبلكس العادية إلى أن نصل إلى شرط عدم سلبية المتغيرات و معيار الأمثلية سنوضحها في المثال الموالي :

بصفة عامة: للحصول على الحل الأمثل الجديد عند تغير الطرف الأيمن للقيود الوظيفة نقوم بتطبيق العلاقة التالية: $\mathbf{X'_i = B^{-1} \times b_i}$

حيث:

x'_i: تمثل قيم الحل الجديد المراد الوصول إليه بعد تغير الموارد.

B^{-1}: معكوس المصفوفة B وتمثل معاملات متغيرات الفجوة في جدول الحل الأمثل.

b_i: تمثل قيم متغيرات الأساس في جدول الحل الأمثل.

بالرجوع إلى المثال السابق، وبافتراض ارتفاع المورد الأول إلى 1500 وحدة، وانخفاض المورد الثالث إلى 3700 وحدة، مع بقاء المورد الثاني ثابتا، فإنه يمكن إيجاد القيم الجديدة للحل في حالة تغير الموارد كما يلي:

$$X'_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{8}{3} & -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1500 \\ 1000 \\ 3700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 0 \\ 2700 \end{pmatrix}$$

وبتعويض القيم الجديدة في دالة الهدف نحصل على القيمة الجديدة لــ $Z=25000$، أي قيمة الحل قد ارتفعت، وأصبحت تمثل الحل الأمثل الجديد.

ملاحظة:

- ✓ إذا ارتفعت قيمة مورد ما، حيث أن هذا المورد لم يتم استخدامه كليا في جدول الحل الأمثل، فإن **متغيرات الأساس لن تتغير** مهما كان مقدار الزيادة، وإنما **يكون التغير (الزيادة) فقط على مستوى متغيرات الفجوة؛**
- ✓ إذا انخفضت قيمة مورد ما، أن هذا المورد لم يتم استخدامه كليا في جدول الحل الأمثل، فإنه يجب ألا يكون مقدار الانخفاض أقل مما تحتاجه المؤسسة لإنتاج قيم متغيرات القرار (متغيرات الأساس).

3-6- حالة إضافة قيد جديد:

في هذه الحالة سوف نفترض إضافة قيد آخر جديد و ليكن:

$$20x_1+30x_2+40x_3 \leq 5000 \quad \Rightarrow \quad 20x_1+30x_2+40x_3+S_4=5000$$

تتم إضافة القيد الجديد على مستوى جدول الحل الأمثل، فيصبح كما يلي:

جدول رقم (7): جدول السمبلكس الذي يمثل الحل الأمثل بعد إضافة قيد جديد للمثال 09

Cj		100	60	80	0	0	0	0	XB	Ɵ
B	VB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4		
x_1	100	1	0	1/2	1/3	-1/4	0	0	150	
x_2	60	0	1	1	-1/3	1/2	0	0	100	
S_3	0	0	0	-6	8/3	-5	1	0	2000	
S_4	0	20	30	40	0	0	0	1	5000	
F_j		100	60	110	40/3	5	0	0	**Z=21000**	
$C_j - F_j$		0	0	-30	-40/3	-5	0	0		

عند تعويض قيم الحل الأمثل المتوصل إليه في الجدول أعلاه نحصل على:

$$20\ (150)+30\ (100)\ +40\ (0)\ +S_4= 5000 \quad \Rightarrow \quad S_4= -1000$$

نلاحظ أن قيمة متغيرة الفجوة الرابعة سالبة، ما يعني أن المورد الرابع غير كافي لإنتاج المنتجات الثلاث بالكميات (150، 100، 0) على التوالي، وبالتالي فإن قيمة الحل الأمثل سوف تتغير، ولاستنتاج الحل الآخر نقوم بما يلي:

- تُضرب قيم السطر الأول في القيمة (20-)، فنحصل على:

x_1	-20	0	-10	-20/3	5	0	0	-3000

- تُضرب قيم السطر الثاني في القيمة (30-)، فنحصل على:

x_2	0	-30	-30	10	15	0	0	-3000

- أما بالنسبة للقيم الجديدة لسطر متغيرة الأساس S_4 يتم الحصول عليها عن طريق جمع قيم الأسطر الجديدة لمتغيرتي القرار الأولى و الثانية (السطر الأول و الثاني)، مع القيم القديمة لـــ S_4 فنحصل على:

x_1	-20	0	-10	-20/3	5	0	0	-3000
x_2	0	-30	-30	10	15	0	0	-3000
S_4	20	30	40	0	0	0	1	5000
S_4	**0**	**0**	**0**	**10/3**	**-10**	**0**	**1**	**-1000**

وبتعويض القيم الجديدة فقط لمتغيرة الأساس S_4 في جدول الحل الأمثل نحصل على:

جدول رقم (8): جدول السمبلكس الذي يمثل الحل الأمثل بعد إضافة قيد جديد للمثال 09

Cj		100	60	80	0	0	0	0	XB	Ө
B	**VB**	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4		
x_1	100	1	0	1/2	1/3	-1/4	0	0	150	
x_2	60	0	1	1	-1/3	1/2	0	0	100	
S_3	0	0	0	-6	8/3	-5	1	0	2000	
S_4	0	**0**	**0**	**0**	**10/3**	**-10**	**0**	**1**	**-1000**	
F_j		100	60	110	40/3	5	0	0	**Z=21000**	
$C_j - F_j$		0	0	-30	-40/3	-5	0	0		

الحل المتوصل إليه في الجدول أعلاه غير مقبول، لذا وجب تحسينه عن طريق استخدام الخوارزمية الثنائية للسمبلكس بدءا بتحديد:

- المتغيرة الخارجة (سطر الارتكاز) والتي توافق أقل معامل سالب في عمود (XB) والتي تمثل في هذه الحالة S_4.
- المتغيرة الداخلة والتي توافق أكبر قيمة بالقيمة المطلقة في سطر ($C_j - F_j$)، والتي تمثل في هذه الحالة S_2.
- عنصر الارتكاز أو (Pivot)، والذي يمثل القيمة الحمراء (10-) في الجدول والذي سنعتمد عليه لإجراء الحسابات الجديدة للجدول الموالي.

جدول رقم (9): جدول السمبلكس الذي يمثل الحل الأمثل بعد إضافة قيد جديد للمثال 09

Cj		100	60	80	0	0	0	0	XB	Ө
B	**VB**	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4		
x_1	100	1	0	1/2	5/12	0	0	-1/40	175	
x_2	60	0	1	1	-1/6	-1/2	0	1/20	50	
S_3	0	0	0	-6	1	0	1	-1/2	2500	
S_2	0	0	0	0	-1/3	1	0	-1/10	100	
F_j		100	60	110	40/3	5	0	0	**Z=20500**	
$C_j - F_j$		0	0	-30	-40/3	-5	0	0		

وعليه فإن الحل المتوصل إليه هو **حل أمثل** (لأنه يحقق شروط عدم سلبية المتغيرات، ومعيار الأمثلية) والذي يمكن قراءته على النحو التالي:

$$x_1 = 175, \quad x_2 = 50, \quad x_3 = 0, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 100, \quad S_3 = 2500, \quad S_4 = 0$$

4-6- حالة إضافة متغيرة جديدة:

إن إضافة متغيرة جديد سيؤثر على أمثلية المسألة، حيث أنها ستضيف معاملات جديدة إلى دالة الهدف وقيود المسألة، و قد تكون متغيرة أساس لها دور في تحسين الحل (قيمة دالة الهدف)، أو متغيرة خارج الأساس ليس لها القدرة على تحسين قيمة الحل الأمثل.[10]

ويبقى **الحل أمثلا** طالما كانت C_j للمتغيرة المضافة **تحقق شرط الأمثلية** (سالبة في نموذج التعظيم، وموجبة في نموذج التدنية)، حيث يمكن حسابها وفق العلاقة التالية**:**

$$C'_j = C_j - C_{j\,base} \times B^{-1} \times a_i$$

حيث:

C'_j: معامل المتغيرة الجديدة في جدول الحل الأمثل.

C_j: معامل المتغيرة الجديدة في دالة الهدف.

$C_{j\,base}$: معاملات متغيرات الأساس في دالة الهدف.

B^{-1}: معكوس المصفوفة B و تمثل معاملات متغيرات الفجوة في جدول الحل الأمثل.

a_i: معاملات المتغيرة الجديدة في القيود الوظيفية.

الحالة 01: بأخذ نفس المثال السابق، نفرض أن المؤسسة تود إنتاج منتج آخر x_4، يحقق ربحا قدره 55 وحدة، كما أن إنتاجه يتطلب 4,5 وحدات من المورد الأول، ووحدتين من المورد الثاني و3 وحدات من المورد الثالث.

$$\text{Max } Z = 100\,x_1 + 60\,x_2 + 80\,x_3 + 55\,x_4$$

Subject to constraints :

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4{,}5\,x_4 \le 1200 \\ 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 \le 1000 \\ 4x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 3\,x_4 \le 3800 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

[10] سهيلة عبد الله سعيد، **مرجع سبق ذكره**، ص 144.

بتطبيق العلاقة أعلاه نحصل على:

$$C'_4 = 55 - (100 \quad 60 \quad 0) \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{8}{3} & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4,5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$55 - 70 = -15 < 0$$

بما أن قيمة C_j سالبة (تحقق شرط الأمثلية لنموذج التعظيم) فذلك يعني أن إنتاج هذا المنتج غير اقتصادي، أي أن إنتاج كل وحدة واحدة منه ستؤدي إلى تخفيض الأرباح بمقدار 15 وحدة، ما يعني أنه عبارة عن **متغيرة خارج الأساس**، أي ليس لها أي تأثير على قيمة الحل الأمثل.

جدول رقم (10): جدول السمبلكس الذي يمثل الحل الأمثل بعد إضافة متغيرة جديدة للمثال 09

Cj		**100**	**60**	**80**	**55**	**0**	**0**	**0**	**XB**	**Ɵ**
B	**VB**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**S_1**	**S_2**	**S_3**		
x_1	100	1	0	1/2	1	1/3	-1/4	0	150	
x_2	60	0	1	1	-1/2	-1/3	1/2	0	100	
S_3	0	0	0	-6	-1	8/3	-5	1	2000	
F_j		100	60	110	70	40/3	5	0	**Z=21000**	
$C_j - F_j$		0	0	-30	-15	-40/3	-5	0		

الحالة 02: بأخذ نفس المثال السابق، نفرض أن المؤسسة تود إنتاج منتج آخر x_4، يحقق ربحا قدره 50 وحدة، كما أن إنتاجه يتطلب 3 وحدات من المورد الأول، ووحدة واحدة من المورد الثاني و4 وحدات من المورد الثالث.

$$\textbf{Max } Z = 100\, x_1 + 60\, x_2 + 80\, x_3 + 50\, x_4$$

Subject to constraints :

$$\begin{cases} 6x_1+3x_2+6x_3+3\,x_4 \leq 1200 \\ 4x_1+4x_2+6x_3+x_4 \leq 1000 \\ 4x_1+12x_2+8x_3+4\,x_4 \leq 3800 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

بتطبيق العلاقة أعلاه نحصل على:

$$C'_j = 50 - (100 \quad 60 \quad 0) \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{8}{3} & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$50 - 45 = 5 > 0$$

جدول رقم (11): جدول السمبلكس الذي يمثل الحل الأمثل بعد إضافة متغيرة جديدة للمثال 09

Cj		100	60	80	50	0	0	0	XB	θ
B	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	S_3		
x_1	100	1	0	1/2	3/4	1/3	-1/4	0	150	200
x_2	60	0	1	1	-1/2	-1/3	1/2	0	100	/
S_3	0	0	0	-6	7	8/3	-5	1	2000	2000/7
F_j		100	60	110	45	40/3	5	0	Z=21000	
$C_j - F_j$		0	0	-30	5	-40/3	-5	0		

بما أن قيم السطر ($C_j - F_j$) ليست كلها أصغر أو تساوي (أي لا تحقق شرط الأمثلية لنموذج التعظيم)، الأمر الذي يستوجب تشكيل جدول سمبلكس آخر لتحسين الحل، المتغير الداخل هو (x4) والمتغير الخارج (x1) أما عنصر الارتكاز هو (3/4).

جدول رقم (12): جدول سمبلكس الحل الأمثل بعد إضافة متغيرة جديدة للمثال 09

Cj		100	60	80	50	0	0	0	XB	θ
B	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	S_3		
x_4	50	4/3	0	2/3	1	4/9	-1/3	0	200	
x_2	60	2/3	1	4/3	0	-1/9	1/3	0	200	
S_3	0	-28/3	0	-32/3	0	-4/9	-8/3	1	600	
Z_j		320/3	60	340/3	50	140/9	10/3	0	Z = 22000	
$C_j - Z_j$		-20/3	0	-100/3	0	-140/9	-10/3	0		

وبما أن كل القيم أصغر أو تساوي الصفر، فإن هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل أما قيم المتغيرات فهي: ($x1=0, x2=200, x3=0, x4=200, s1=0, s2=0, s3=600, Z=22000$).

1- مفهوم مسائل النقل:

هو أسلوب رياضي يساعد في اتخاذ القرارات الخاصة بنقل حجم معين من مادة أو مواد من مصادر متعددة إلى مراكز متعددة بهدف سد احتياجات هذه المراكز بأقل تكلفة ممكنة. ومن فرضيات هذا الأسلوب ما يلي:

- عدد المصادر الإنتاجية (m).
- عدد مراكز التوزيع (n).
- حجم المواد المعروضة = حجم الطلب عليها أي (الطلب=العرض).

1-1 تعريف المشكلة:

تعتبر مشكلة النقل من أهم المشاكل التي تناولتها أساليب بحوث العمليات بكفاءة. فتكلفة نقل سلعة معينة (أو خدمة ما) من مراكز إنتاجها (أو مراكز عرضها أو تصديرها) (Sources) إلى مراكز استهلاكها (أو مراكز الطلب أو الاستيراد) (Destination) جزء هام في التكلفة الكلية للسلعة وبالتالي من سعر بيع الوحدة أيضا. وتحديد أقل تكلفة للنقل يعتبر هدف هام لمتخذ القرار في المشاكل الاقتصادية والتجارية لتأثيرها على التكلفة الكلية للسلعة.

وتتلخص مشكلة النقل في وجود عدد (m) من مراكز الإنتاج تقوم بإنتاج أو (عرض) نفس المنتج، ووجود عدد (n) من مراكز الاستهلاك أو (مراكز الطلب) ترغب في سد احتياجاتها من مراكز الإنتاج المختلفة بحيث يكون إجمالي تكاليف النقل من جميع مراكز الإنتاج إلى جميع مراكز الاستهلاك لهذه السلعة (أو الخدمة) أقل ما يمكن.

فإذا فرضنا أن الكميات المتاحة في مركز الإنتاج (i) تساوي (Si) بحيث (i=1,2,3,4,…m) كذلك إذا أشرنا إلى الكميات المطلوبة لمركز الاستهلاك (j) تساوي (Dj) بحيث (j=1,2,3,4,…n). كذلك إذا أشرنا لتكلفة نقل الوحدة الواحدة من السلعة من مركز الإنتاج (i) إلى مركز الاستهلاك (j) بالرمز (Cij) كما هو موضح بالجدول التالي:

فإذا فرضنا أن (Xij) تشير إلى الكمية المنقولة (عدد الوحدات) من مركز الإنتاج (i) إلى مركز الاستهلاك (j)، مع العلم أن (Xij)، بحيث (j=1,2,3,..,n) و (i=1,2,3,…m) كما هو موضح بالجدول التالي:

جدول رقم (1)

الكميات المتاحة	n	…………	j	………	2	1	مركز الاستهلاك / مركز الانتاج
S1	C1n	………	C1j	………	C12	C11	1
S2	C2n	………	C2j	………	C22	C21	2
….	………	………		………	……	…..	3
…..		………		………			…..
Si	Cin	………	Cij	………	Ci2	Ci1	i
….	………	………	………	………	………	………	……
Sm	Cmn	………	Cmj	………	Cm2	Cm1	m
$\sum Si$ / $\sum Dj$	Dn	……..	Dj	…….	D2	D1	الكميات المطلوبة

ويمكن صياغة مشكلة النقل كنموذج برمجة خطية كما سبق توضيحه في الفصل الثاني:

2-1 طرق حل مشاكل النقل:

هناك ثلاث طرق تستعمل لحل مشاكل النقل، وعليه فإن درجة النتائج المتحصل عليها تتفاوت هذا من جهة ومن جهة أخرى، تختلف نماذج النقل باختيار المعيار المأخوذ بعين الاعتبار وفيما يتعلق بموضوع توازنية مشكلة النقل، فإننا أمام نوعين رئيسيين:

- مشاكل النقل المتوازنة.
- مشاكل النقل غير المتوازنة.

I. **نماذج النقل المتوازن:** يقصد بالنموذج المتوازن تساوي الكمية المعروضة مع الكميات المطلوبة (Si=Dj) حيث (i=1…n و j=1….m).

1- طرق الحل المبدئي:

1-1طريقة الركن الشمال الغربي أو الزاوية الشمالية الغربية (North west corner methods):

هي طريقة بسيطة قد لا تحقق الحل الأمثل في معظم الأحيان، أما الخطوات التي تعتمد عليها هذه الطريقة هي:

- اختيار أقصى أعلى وشمال الجدول لتكون نقطة بداية الحل.
- اشباعها (أي نقل إليها) أدنى قيمة بين العرض والطلب.
- إنقاص القيمة المنقولة من مجموع العرض والطلب حسب الجهة المنقولة.

- حذف العمود أو الصف الذي قد تم اشباعه وذلك عندما يصل مجموع العرض في الصف أو مجموع المطلوب في العمود يساوي الصفر.
- تكرار الخطوات حتى الوصول إلى أن مجموع الصف يساوي الصفر وكذلك مجموع العمود يساوي الصفر.

مثال 01:

شركة لديها ثلاث مصانع لإنتاج الاسمنت ولديها ثلاث مراكز للتوزيع على مختلف المناطق، والجدول التالي يحتوي على:

- ✓ كلفة شحن الوحدة الواحدة من مراكز الإنتاج إلى مراكز التوزيع.
- ✓ طاقة الإنتاج الممكنة في كل مراكز الإنتاج (المصادر).
- ✓ إمكانية التوزيع لكل مركز توزيع وهي معطاة في الجدول التالي:

جدول رقم (2)

التوزيع / الانتاج	Dist 1	Dist 2	Dist 3	الطاقة الانتاجية
P1	10	4	11	70
P2	12	5	8	50
P3	9	7	6	30
الطلب	40	50	60	....

المطلوب: حل هذه المسألة باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية؟

جدول رقم (3)

التوزيع / الانتاج	Dist 1		Dist 2		Dist 3		الطاقة الانتاجية
P1	10	40	4	30	11	-	70
P2	12	-	5	20	8	30	50
P3	9	-	7	-	6	30	30
الطلب		40		50		60	**150**

بعدما قمنا بحل مسالة النقل السابقة باستخدام الزاوية الشمالية الغربية بدءا من أعلى زاوية تقع في الجدول وهي الخانة (P1Dist1) التي تم تعبئتها بالقيمة 40 وحدة (لأن ما بين 70 و40 نختار أقل قيمة 40) وهكذا نكرر نفس الخطوات حتى نقوم بتعبئة جميع خانات الجدول. وبعد ذلك نقوم باحتساب الكلفة الكلية لمسالة النقل السابقة على الشكل التالي:

Total cost= (40*10) +(30*4) +(20*5) +(30*8) +(30*6)

Total cost=1040 U.M

2-1 طريقة أقل التكاليف (Minimum cost methods):

تحاول هذه الطريقة تجنب أي عيوب قد تظهر في النموذج السابق، وتقتصر هذه الطريقة على التركيز على اقل تكلفة واردة في جدول النقل ومن ثم تحديد جهتي العرض والطلب.

أما الخطوات التي يجب احترامها هي:

- البحث عن أقل تكلفة كما وجدت في جدول النقل وتحديد الخلية الموجودة فيها هذه التكلفة.
- تخصيص هذه الخلية بأقل الكميتين من مجموع العرض ومجموع الطلب والتي تشكل هذه الخلية تقاطعا لهما.
- تعديل العرض والطلب في خلايا الجدول بعد كل عملية تخصيص معينة كما في طريقة الزاوية الشمالية الغربية (NWCM).
- شطب العمود أو الصف الذي يتم تلبية احتياجاته من العرض والطلب.
- تعاد الخطوات السابقة لغاية الوصول إلى مجموع الصفوف ومجموع الأعمدة يساوي إلى الصفر.
- تحسب بعدها مجموع الكلف كما في الطريقة السابقة.

مثال 02: إليك مسألة النقل التالية والمطلوب حلها باستخدام طريقة أقل تكلفة:

جدول رقم (4)

التوزيع / الانتاج	D 1	D2	D3	الطاقة الانتاجية
S1	15	3	24	10
S2	6	12	2	12
S3	9	18	21	2
الطلب	7	8	9	……

باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي نحصل على الجدول التالي:

جدول رقم (5)

التوزيع / الانتاج	D 1		D2		D3		الطاقة الانتاجية
S1	15	7	3	3	24	-	10
S2	6	-	12	5	2	7	12
S3	9	2	18	-	21	2	2
الطلب	7		8		9		**24**

Total cost= (7*15) +(2*9) +(3*3) +(5*12) +(7*2) +(2*21)

Total cost= 230 UM

أما باستخدام طريقة أقل تكلفة لنفس المثال نحصل على الجدول التالي:

جدول رقم (6)

التوزيع / الانتاج	D 1		D2		D3		الطاقة الانتاجية
S1	15	2	3	8	24	-	10
S2	6	3	12	-	2	9	12
S3	9	2	18	-	21	-	2
الطلب		7		8		9	**24**

Total cost= (15*2) +(3*6) +(2*9) +(8*3) +(9*2)

Total cost= 108 UM

لفهم أكثر لطريقة أقل التكاليف، نعيد حل المثال الأول باستخدام طريقة أقل التكاليف، لنحصل على الجدول التالي:

جدول رقم (7)

التوزيع / الانتاج	Dist 1		Dist 2		Dist 3		الطاقة الانتاجية
P1	10	20	4	50	11	-	70
P2	12	20	5	-	8	30	50
P3	9	-	7	-	6	30	30
الطلب		40		50		60	**150**

Total cost= (10*20) + (12*20) +(50*4) + (30*8) +(30*6)

Total cost= 1060 UM

3-1طريقة فوجل التقريبية (Vogel Approximation Methods):

تعد أهم الطرق باعتبارها تؤدي إلى الحل الأمثل في كثير من الحالات وتعتمد هذه الطريقة على:

- حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف وفي كل عمود، وتوضع هذه الفروق على جانبي الجدول.

- تحديد الصف أو العمود الذي يحتوي على أكبر فرق في التكلفة.
- اختيار الخلية ذات الكلفة الأقل من ذلك الصف أو العمود.
- مقارنة احتياجات المركز في الخلية المختارة من الخطوة السابقة مباشرة مع ماهو متوفر في المصدر لأخذ القيمة الأقل.
- إعادة حسابات الفرق مرة أخرى لكل عمود وصف مكررين العملية السابقة إلى أن يتم تلبية احتياجات جميع مراكز الطلب من المصادر المتاحة.
- بعد أن يتم حساب (Xij) بوضع أقل القيمتين، يتم إنقاص هذه القيمة من مجموع الكميات المعروضة والمطلوبة من ذلك الصف والعمود، أي:
  - ✓ يتم تعديل مجموع الصف ومجموع العمود بعد كل عملية نقل كمية لخلية ما.
  - ✓ يتم شطب الصف أو العمود الذي يتم اشباعه.

مثال 03: نعيد حل المثال الثاني باستخدام طريقة فوجل التقريبية:

جدول رقم (8)

التوزيع / الانتاج	D1	D2	D3	الطاقة الانتاجية	ف1	ف2	ف3	ف4
S1	15 2	3 8	24 -	10	12	12	*	*
S2	6 3	12 -	2 9	12	4	6	؟	*
S3	9 2	18 -	21 -	2	9	9	؟	؟
الطلب	7	8	9	**24**				
ف1	3	9	19					
ف2	3	9	*					
ف3	3	*	*					
ف4	6	*	*					

Total cost = (15*2) +(6*3) +(2*9) +(8*3) +(9*2)

Total cost= 108

مثال 04: فيما يلي جدول نقل لإحدى الشركات الصناعية التي تمتلك ثلاث مصانع مع ثلاث منافذ توزيع كما يلي:

جدول رقم (9)

مصانع \ منافذ توزيع	D1	D2	D3	طاقة
S1	3	5	7	23000
S2	4	4	5	7000
S3	8	2	6	3000
احتياجات	9000	14000	10000	**.......**

المطلوب: اجراء توزيع مبدئي لاستخدام الطرق الثلاث: (الزاوية الشمالية الغربية، أقل التكاليف، طريقة فوجل)؟

- **طريقة الزاوية الشمالية الغربية:**

جدول رقم (10)

مصانع \ منافذ توزيع	D1	D2	D3	طاقة
S1	3 9000	5 14000	7 -	23000
S2	4 -	4 -	5 7000	7000
S3	8 -	2 -	6 3000	3000
احتياجات	9000	14000	10000	**33000**

Total cost= (9000*3) +(14000*5) +(7000*5) +(3000*6)

Total cost= 150000

- **طريقة أقل التكاليف:**

جدول رقم (11)

منافذ توزيع / مصانع	D1	D2	D3	طاقة
S1	3 9000	5 4000	7 10000	23000
S2	4 -	4 7000	5 -	7000
S3	8 -	2 3000	6 -	3000
احتياجات	9000	14000	10000	**33000**

Total cost= (9000*3) +(4000*5) +(10000*7) +(7000*4) +(3000*2)

Total cost=151000

- **طريقة فوجل التقريبية:**

جدول رقم (12)

منافذ توزيع / مصانع	D1	D2	D3	طاقة	ف1	ف2	ف3	ف4
S1	3 9000	5 4000	7 10000	23000	2	2	2	2
S2	4 -	4 7000	5 -	7000	0	0	1	*
S3	8 -	2 3000	6 -	3000	4	*	*	*
احتياجات	9000	14000	10000	**33000**				
ف1	1	2	1					
ف2	1	1	2					
ف3	*	1	2					
ف4	*	؟	؟					

Total cost= (9000*3) +(4000*5) +(10000*7) +(7000*4) +(3000*2)

Total cost=151000

2- طرق الوصول إلى الحل النهائي أو الحلول المثلى:

لما كانت النتائج التي حصلنا عليها من الطرق الثلاث (NWCM, MC, Vogel) غير متفقة في كثير من الأحيان، كان لابد من ضرورة تقييم النتائج بحثا عن أمثلية الحلول التي توصلنا إليها، وهذا يعني أننا أمام دراسة لأثر الحلول المبدئية المقترحة والنظر في نتائج احداث تغيير في التوزيع ما يؤدي إلى تحريك وحدات من الخلايا المشغولة إلى الخلايا الفارغة وتأثير ذلك على

تخفيض التكاليف وعدد الوحدات المنقولة إلا أن هذه الأخيرة لا يمكن أن تتم إلا بتوفر الشرط التالي:

عدد الخلايا الفارغة = (عدد الأعمدة+ عدد الصفوف) -1.

1-2 طريقة الحجر المتنقل (Slipping stone Methods):

وتعتمد هذه الطريقة على الخطوات التالية:

- تحديد المسار المغلق لكل خلية أي تحديد الخلايا المتعلقة بالخلية الفارغة المطلوب حساب كلفتها غير المباشرة.
- وضع إشارات بالتناوب على المسار بدءا من الخلية الفارغة المطلوب تقييمها بـ +-+-+-....
- إن هذه الإشارات تعني الإضافة في حالة (+) والطرح في حالة (-).
- إن القيمة المضافة أو المطروحة هي أصغر رقم موجود في الخلايا ذات الإشارات السالبة.
- حساب الكلف غير المباشرة لكل الخلايا الواقعة في المسار بعد وضع الإشارات فيها.
- النتيجة السالبة لخلية ما تعني أن اشغال هذه الخلية سوف يؤدي إلى تخفيض التكاليف.
- تحديد الخلايا التي يمكن النقل منها وهي: الخلايا ذات الكلف غير المباشرة السالبة (التي حصلنا عليها بالحساب) ولتحديدها يوجد أصغر رقم سالب، ومن ثم:
  - ✓ يجمع إلى الكلف في الخلايا ذات التكاليف غير المباشرة الموجبة.
  - ✓ يطرح من الكلف في الخلايا ذات التكاليف غير المباشرة السالبة وذلك في المسار الواحد.

مثال 05: لدينا الجدول النهائي المحصل عليه بطريقة فوجل والمطلوب دراسة أثر أي تعديل يمكن أن يحصل بحيث يؤدي إلى وفر في تكاليف النقل.

جدول رقم (13)

منافذ توزيع / مصانع	C1		C2		C3		C4		طاقة
R1	4	3	3	12	8	-	7	-	15
R2	8	7	6	-	3	7	4	4	18
R3	3	8	6	-	5	-	6	-	8
الطلب		18		12		7		4	**41**

Total cost= (4*3) +(12*3) +(8*7) +(3*8) +(7*3)+(4*4)

Total cost=165

- عدد الخلايا الفارغة = (3+4) -1 =6.
- تحديد هذه الخلايا: (R1C3,R1C4,R2C2, R3C2, R3C3, R3C4)
- تقييم الخلايا الفارغة وتكوين المسارات المغلقة:

الخلية (R1C3): المسار المغلقة هو: R1C3-R1C1-R2C1-R2C3

+8-4+8-3=+9

الخلية (R1C4): المسار المغلق هو: R1C4-R1C1-R2C1-R2C3

+7-4+8-4=+7

الخلية (R2C2): المسار المغلقة هو: R2C2-R1C2-R1C1-R2C1

+6-3+4-8=-1

الخلية (R3C2): المسار المغلقة هو: R3C2-R1C2-R1C1-R3C1

+6-3+4-3=+4

الخلية (R3C3): المسار المغلقة هو: R3C3-R2C3-R2C1-R3C1

+5-3+8-3=+7

الخلية (R3C4): المسار المغلقة هو: R3C4-R2C4-R2C1-R3C1

+6-4+8-3=+7

من النتائج نلاحظ أن كل القيم موجبة ما عدى الخلية (R2C2) تساوي (-1) وهي سالبة وتعني أن نقل وحدة واحدة إليها سيؤدي إلى تخفيض التكاليف بوحدة واحدة (يوفر دينار واحد). أما الخلايا الموجبة كلها تؤدي إلى زيادة التكاليف يعني لا تحقق أي توفير (ما يفسره القيم الموجبة). بعدما حددنا الخلية التي يجب شغلها نقوم بتحديد الكمية المطلوب نقلها ومن أي خلايا ستنتقل هذه الكمية.

الكمية المنقولة تمثل أصغر رقم سالب في المسار المغلق ثم:

نجمع هذه الكمية مع كميات الخلايا ذات الكلف الموجبة في نفس المسار.

ونطرح هذه الكمية من كميات الخلايا ذات الكلف السالبة في نفس المسار.

الخلية المعنية هي (R2C2) والمسار المغلق هو: R2C2-R1C2-R1C1-R2C1

+6-3+4-8=-1

الخلايا ذات الإشارات السالبة هي (R1C1) و (R2C1) فالخلية (R1C1) تحمل الكمية (12) في جدول الحل المبدئي أما الخلية (R2C1) فتحمل الكمية (7) في جدول الحل المبدئي وعليه أصغر كمية هي (7) وهي الكمية المنقولة. أما جدول مسألة النقل الجديد فيأخذ الشكل التالي:

جدول رقم (14)

منافذ توزيع / مصانع	C1		C2		C3		C4		طاقة
R1	4	10	3	5	8	-	7	-	15
R2	8	-	6	7	3	7	4	4	18
R3	3	8	6	-	5	-	6	-	8
الطلب	18		12		7		4		**41**

Total cost= (4*10) +(5*3) +(6*7) +(3*7) +(8*3)+ (4*4)

Total cost=158

بعد إيجاد الجدول الجديد بعد التعديل، نعيد نفس الخطوات السابقة حتى تصبح كل قيم الخلايا الفارغة موجبة (أي كلفها غير المباشرة موجبة).

نبحث من جديد عن الخلايا الفارغة: (4+3) -1=6

- الخلايا الفارغة هي: (R1C3,R1C4,R2C1, R3C2, R3C3, R3C4)
- تقييم الخلايا الفارغة وتكوين المسارات المغلقة:

الخلية (R1C3): المسار المغلقة هو: R1C3-R1C2-R2C2-R2C3

+8-3+6-3=+8

الخلية (R1C4): المسار المغلق هو:R1C4-R1C2-R2C2-R2C4

+7-3+6-4= +6

الخلية (R2C1): المسار المغلقة هو:R2C1-R1C1-R1C2-R2C2

+8-4+3-6=+1

الخلية (R3C2): المسار المغلقة هو: R3C2-R1C2-R1C1-R3C1

+6-3+4-3=+4

الخلية (R3C3): المسار المغلقة هو: R3C3-R2C3-R2C2-R1C2-R1C1-R3C1

+5-3+6-3+4-3=+6

الخلية (R3C4): المسار المغلقة هو: R3C4-R2C4-R2C2-R1C2-R1C1-R3C1

+6-4+6-3+4-3=+6

كل النتائج موجبة ما يعني أن شغر أي خلية من هاته الخلايا لا يجدي أي نفع ولا يؤدي إلى تخفيض التكاليف والجدول السابق هو جدول الحل الأمثل الذي يحقق اجمالي تكاليف تقدر بـ 158 وحدة نقدية.

ملاحظة: نتيجة معدومة تعني وجود أكثر من مسار ويؤدي إلى نفس النتيجة بمعنى لا يحسن الحل وإنما التكلفة تبقى كما هي.

2-2 طريقة التوزيع المعدلة (Modified distribution Methods):

تعتبر طريقة التوزيع المعدلة مثلها مثل طريقة الحجر المتنقل حيث تهدف إلى التحقق من الأمثلية. أي إذا ما كانت النتائج المحصل عليها سابقا من احدى الطرق الثلاث (NWCM, MC, Vogel) نتائج مثالية أو لابد من تحسين الحل والذي يسمح لنا بذلك هو تطبيق هاته الطريقة.

تعتمد هذه الطريقة على خلق معادلات للخلايا المشغولة لا الفارغة وفق الصيغة التالية:

قيمة الصف+ قيمة العمود= -كلفة نقل الوحدة الواحدة (الكلف هي الأرقام الموجودة في أعلى يسار خلايا الجدول).

$$UCij=ROWi+COLj$$

حيث:

UCij: كلفة نقل الوحدة من الصف (i) إلى العمود (j).

ROWi: الصف (i).

COLj: العمود (j).

مثال 06: نأخذ المثال التالي ونقوم بإيجاد الحل المبدئي بطريقة الركن الشمالي الغربي:

جدول رقم (15)

مراكز / مصادر	C1		C2		C3		C4		العرض
R1	4	15	3	-	8	-	7	-	15
R2	8	3	6	12	3	3	4	-	18
R3	3	-	6	-	5	4	6	4	8
الطلب	18		12		7		4		**41**

Total cost= (4*15) +(6*12) +(3*8) +(3*3) +(4*5)+ (4*6)

Total cost=209

الخطوة الأولى في طريقة التوزيع المعدلة هو التأكد من أن:

عدد الخلايا المشغولة= (عدد الصفوف+ عدد الأعمدة) -1، والمثال هي (4+3)-1= 6

الخطوة الثانية هي تحديد معادلات الخلايا المشغولة، لدينا 6 معادلات لأن لدينا 6 خلايا مشغولة وهي كما يلي:

$$R1+C1=-4$$

$$R2+C1=-8$$

$$R2+C2=-6$$

$$R2+C3=-3$$

$$R3+C3=-5$$

$$R3+C4=-6$$

من المعادلات السابقة نلاحظ أنه لدينا 7 متغيرات (C2,R2,C1,R1,C4,R3,C3) مما يستلزم افتراض قيمة أحدهما يساوي الصفر لضرورة الحل وعليه بافتراض (C1) يساوي الصفر فإن حل المعادلات كما يلي:

$$C1=0,\ R1=-4$$

$$C1=0,\ R2=-8-0=-8$$

$$R2+C2=-6, C2=-6+8=+2$$

$$R2+C3=-3,\ C3=-3+8=+5$$

$$R3+C3=-5, R3=-10$$

$$R3+C4=-6,C4=4$$

الآن لإيجاد قيم الخلايا فير المشغولة (الفارغة) نتبع القانون التالي:

قيمة الخلية الفارغة = (قيمة الصف + قيمة العمود)- كلفة نقل الوحدة الواحدة.

أما الخلايا الفارغة للمثال السابق هي:

R1C2, R1C3, R1C4, R2C4, R3C1, R3C2

- R1C2=R1+C2-(-U12)
  R1C2=-4+2+3=+1
- R1C3= R1+C3-(-U13)
  R1C3=-4+5+8=+9
- R1C4= R1+C4-(-U14)
  R1C4=-4+4+7=+7
- R2C4= R2+C4-(-U24)
  R2C4=-8+4+4=0
- R3C1= R3+C1-(-U31)
  R3C1=-10+0+3=-7
- R3C2= R3+C2-(-U32)
  R3C2=-10+2+6=-2

النتيجة المعدومة تعني وجود أكثر من مسار لنفس الخلية يؤدي إلى نفس النتيجة.

أما القيم السالبة فتعني أن هناك حل أمثل آخر يحقق لنا وفر يقدر بـ 7 وحدات إذا قمنا بملأ الخلية (R3C1) و2 وحدات إذا قمنا بملأ الخلية (R3C2) وعليه نختار الخلية (R3C1) التي تحقق لنا أكبر وفر.

الآن نقوم بتحديد المسار المغلق لهذه الخلية (R3C1):

R3C1-R2C1-R2C3-R3C3

+3-8+3-5=-7

نختار أصغر رقم في الخلية السالبة وهو (3 وحدات) وهو الرقم المطلوب نقله إلى الخلية (R3C1) ويصبح الجدول الجديد كما يلي:

جدول رقم (16)

مراكز / مصادر	C1		C2		C3		C4		العرض
R1	4	15	3	-	8	-	7	-	15
R2	8	-	6	12	3	6	4	-	18
R3	3	3	6	-	5	1	6	4	8
الطلب	18		12		7		4		**41**

Total cost= (4*15) +(6*12) +(3*6) +(3*3) +(1*5)+ (4*6)

Total cost=188

نعيد الخطوات السابقة من جديد على النحو التالي:

عدد الخلايا المشغولة= (عدد الصفوف+ عدد الأعمدة) -1، والمثال هي (4+3)-1= 6

وبعد ذلك نقوم بتحديد معادلات الخلايا المشغولة، لدينا 6 معادلات لأن لدينا 6 خلايا مشغولة وهي كما يلي:

$$R1+C1=-4$$

$$R2+C2=-6$$

$$R2+C3=-3$$

$$R3+C1=-3$$

$$R3+C3=-5$$

$$R3+C4=-6$$

من المعادلات السابقة نلاحظ أنه لدينا 7 متغيرات (C2,R2,C1,R1,C4,R3,C3) مما يستلزم افتراض قيمة أحدهما يساوي الصفر لضرورة الحل وعليه بافتراض (C1) يساوي الصفر فإن حل المعادلات كما يلي:

$$C1=0,\ R1=-4$$

$$R2+C2=-6,\ C2=-6+1=-5$$

$$R2+C3=-3,\ R2=-3+2=-1$$

$$R3+C1=-3,\ R3=-3+0=-3$$

$$R3+C3=-5,\ C3=-5+3=-2$$

$$R3+C4=-6,\ C4=-6+3=-3$$

الآن لإيجاد قيم الخلايا فير المشغولة (الفارغة) نتبع القانون التالي:

قيمة الخلية الفارغة = (قيمة الصف + قيمة العمود) - كلفة نقل الوحدة الواحدة.

أما الخلايا الفارغة للمثال السابق هي:

R1C2, R1C3, R1C4, R2C1, R2C4, R3C2

- $R1C2=R1+C2-(-U12)$

  $R1C2=-4-5+3=-6$
- $R1C3= R1+C3-(-U13)$

  $R1C3=-4-2+8=+2$
- $R1C4= R1+C4-(-U14)$

  $R1C4=-4-3+7=0$
- $R2C4= R2+C4-(-U24)$

  $R2C4=-1-3+4=0$
- $R3C1= R3+C1-(-U31)$

  $R3C1=-3+0+3=0$
- $R3C2= R3+C2-(-U32)$

  $R3C2=-3-5+6=-2$

النتيجة المعدومة تعني وجود أكثر من مسار لنفس الخلية يؤدي إلى نفس النتيجة.

أما القيم السالبة فتعني أن هناك حل أمثل آخر يحقق لنا وفر يقدر بـ 6 وحدات إذا قمنا بملأ الخلية (R1C2) و2 وحدات إذا قمنا بملأ الخلية (R3C2) وعليه نختار الخلية (R1C2) التي تحقق لنا أكبر وفر.

الآن نقوم بتحديد المسار المغلق لهذه الخلية (R1C2):

R1C2-R2C2-R2C3-R3C3-R3C1-R1C1

$+3-6+3-5+3-4=-6$

نختار أصغر رقم في الخلية السالبة وهو (1 وحدات) وهو الرقم المطلوب نقله إلى الخلية (R1C2) ويصبح الجدول الجديد كما يلي:

جدول رقم (17)

مراكز / مصادر	C1		C2		C3		C4		العرض
R1	4	14	3	1	8	-	7	-	15
R2	8	-	6	11	3	7	4	-	18
R3	3	4	6	-	5	-	6	4	8
الطلب	18		12		7		4		**41**

Total cost= (4*14) +(1*3) +(11*6) +(3*7) +(4*3)+ (4*6)

Total cost=182

نعيد الخطوات السابقة مرة أخرى على النحو التالي:

عدد الخلايا المشغولة= (عدد الصفوف+ عدد الأعمدة) -1، والمثال هي (4+3)-1= 6

وبعد ذلك نقوم بتحديد معادلات الخلايا المشغولة، لدينا 6 معادلات لأن لدينا 6 خلايا مشغولة وهي كما يلي:

$$R1+C1=-4$$

$$R1+C2=-3$$

$$R2+C2=-6$$

$$R2+C3=-3$$

$$R3+C1=-3$$

$$R3+C4=-6$$

من المعادلات السابقة نلاحظ أنه لدينا 7 متغيرات (C2,R2,C1,R1,C4,R3,C3) مما يستلزم افتراض قيمة أحدهما يساوي الصفر لضرورة الحل وعليه بافتراض (C1) يساوي الصفر فإن حل المعادلات كما يلي:

$$C1=0,\ R1=-4$$

$$R1+C2=-3,\ C2=-3+4=1$$

$$R2+C2=-6,\ R2=-6-1=-7$$

$$R2+C3=-3,\ C3=-3+7=+4$$

$$R3+C1=-3,\ R3=-3-0=-3$$

R3+C4=-6, C4=-6+3=-3

الآن لإيجاد قيم الخلايا فير المشغولة (الفارغة) نتبع القانون التالي:

قيمة الخلية الفارغة = (قيمة الصف + قيمة العمود) - كلفة نقل الوحدة الواحدة.

أما الخلايا الفارغة للمثال السابق هي:

R1C3, R1C4, R2C1, R2C4, R3C2, R3C3

- R1C3=R1+C3-(-U13)

  R1C3=-4+4+3=+3
- R1C4= R1+C3-(-U14)

  R1C4=-4-3+8=+1
- R2C1= R2+C1-(-U21)

  R2C1=-7+0+7=0
- R2C4= R2+C4-(-U24)

  R2C4=-7-3+4=-6
- R3C2= R3+C2-(-U32)

  R3C2=-3+1+3=+1
- R3C3= R3+C2-(-U33)

  R3C3=-3+1+6=+4

النتيجة المعدومة تعني وجود أكثر من مسار لنفس الخلية يؤدي إلى نفس النتيجة.

أما القيم السالبة فتعني أن هناك حل أمثل آخر يحقق لنا وفر يقدر بـ 6 وحدات إذا قمنا بملأ الخلية (R2C4).

الآن نقوم بتحديد المسار المغلق لهذه الخلية (R2C4):

R2C4-R3C4-R3C1-R1C1-R1C2-R2C2

+4-6+3-4+3-6=-6

نختار أصغر رقم في الخلية السالبة وهو (4 وحدات) وهو الرقم المطلوب نقله إلى الخلية (R2C4) ويصبح الجدول الجديد كما يلي:

جدول رقم (18)

مراكز / مصادر	C1		C2		C3		C4		العرض
R1	4	10	3	5	8	-	7	-	15
R2	8	-	6	7	3	7	4	4	18
R3	3	8	6	-	5	-	6	-	8
الطلب	18		12		7		4		**41**

Total cost= (3*5) +(8*3) +(10*4) +(6*7) +(7*3)+ (4*4)

Total cost=158

نعيد الخطوات السابقة مرة أخرى على النحو التالي:

عدد الخلايا المشغولة= (عدد الصفوف+ عدد الأعمدة) -1، والمثال هي (4+3)-1= 6

وبعد ذلك نقوم بتحديد معادلات الخلايا المشغولة، لدينا 6 معادلات لأن لدينا 6 خلايا مشغولة وهي كما يلي:

$$R1+C1=-4$$

$$R1+C2=-3$$

$$R2+C2=-6$$

$$R2+C3=-3$$

$$R2+C4=-4$$

$$R3+C1=-3$$

من المعادلات السابقة نلاحظ أنه لدينا 7 متغيرات (C2,R2,C1,R1,C4,R3,C3) مما يستلزم افتراض قيمة أحدهما يساوي الصفر لضرورة الحل وعليه بافتراض (C1) يساوي الصفر فإن حل المعادلات كما يلي:

$$C1=0, R1=-4$$

$$R1+C2=-3, C2=-3+4=1$$

$$R2+C2=-6, R2=-6-1=-7$$

$$R2+C3=-3, C3=-3+7=+4$$

$$R2+C4=-4, R2=-7, C4=-4+7=+3$$

$R3+C4=-6,\ R3=-6+3=-3$

الآن لإيجاد قيم الخلايا فير المشغولة (الفارغة) نتبع القانون التالي:

قيمة الخلية الفارغة = (قيمة الصف + قيمة العمود) - كلفة نقل الوحدة الواحدة.

أما الخلايا الفارغة للمثال السابق هي:

R1C3, R1C4, R2C1, R3C2, R3C3, R3C4

- R1C3=R1+C3-(-U13)
  R1C3=-4+4+3=+3
- R1C4= R1+C4-(-U14)
  R1C4=-4+3+8=+7
- R2C1= R2+C1-(-U21)
  R2C1=-7+0+7=0
- R3C2= R3+C2-(-U32)
  R3C2=-3+1+4=+2
- R3C3= R3+C3-(-U33)
  R3C3=-3+4+3=+4
- R3C4= R3+C4-(-U34)
  R3C4=-3+3+6=+6

وبما أن كل القيم موجبة فهذا يعني أنه لا يوجد أي تحسين للحل وبأن الجدول السابق الذي تكلفته (182) هو جدول الحل الأمثل و (182) هي الكلفة المثالية.

II. نماذج النقل غير المتوازن:

نموذج غير متوازن هو النموذج الذي يختلف فيه مجموع العرض والطلب، ولحل هذا النموذج لابد أولا من موازنة هذا النموذج وبحدها يتم اتباع إحدى الطرق الثلاث السابق ذكرها أعلاه.

مثال 07:

جدول رقم (19)

مراكز / مصادر	D1	D2	D3	العرض
S1	20	50	40	10
S2	30	70	60	10
S3	20	80	10	10
الطلب	10	15	10	**30** / **35**

نلاحظ أن مجموع العرض يساوي (30) ومجموع الطلب (35) وعليه في هذه الحالة لابد من إضافة مصدر وهمي (S4) حيث تكاليف النقل من هذا المصدر إلى المراكز الثلاث هي معدومة وعليه يصبح الجدول كما يلي:

جدول رقم (20)

مراكز / مصادر	D1	D2	D3	العرض
S1	20	50	40	10
S2	30	70	60	10
S3	20	80	10	10
S4	0	0	0	5
الطلب	10	15	10	**35**

أما إذا كان العرض أكبر من الطلب ففي هذه الحالة نضيف مركز وهمي كما هو مبين في الجدول التالي:

جدول رقم (21)

مراكز / مصادر	D1	D2	D3	العرض
S1	20	50	40	10
S2	30	70	60	10
S3	20	80	10	15
الطلب	10	10	10	**35** / **30**

وبعد إضافة المركز الوهمي يصبح جدول النقل كما يلي:

جدول رقم (22)

مراكز / مصادر	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	20	50	40	0	10
S2	30	70	60	0	15
S3	20	80	10	0	10
الطلب	10	10	10	5	**35**

تمارين مقترحة:

التمرين 01:

تقوم مؤسسة بإنتاج منتوجين (P1) و (P2) باستعمال مواد أولية (A) و (B).

- انتاج وحدة واحدة من (P1) يتطلب استهلاك 4 وحدات من (A) ووحدتين من المادة (B).
- انتاج وحدة واحدة من (P2) يتطلب استهلاك 5 وحدات من (A) و 3 وحدات من المادة (B).
- انتاج وحدة واحدة من (P1) يتطلب 3 ساعات.
- انتاج وحدة واحدة من (P2) يتطلب 4 ساعات.

المؤسسة تستعمل 60 عاملا يعملون 8 ساعات يوميا، ربح الوحدة الواحدة من (P1) هو 40 ون، ربح الوحدة من (P2) هو 50 ون.

تسعى المؤسسة إلى:

- استهلاك على الأكثر 600 وحدة من المادة (A).
- تخصيص مبلغ مالي لا يزيد على 700 ون لشراء المادة (B) علما بأن سعر شراء الوحدة من المادة (B) يقدر بـ 2 ون.
- انتاج على الأقل 80 وحدة يوميا من (P1).

المطلوب: كتابة البرنامج الخطي لهذا المسألة والذي يهدف إلى تعظيم الربح الإجمالي؟

التمرين 02:

يعمل مدير اطعام في إحدى الثكنات العسكرية على إعداد وجبات الطعام المتعلقة بالجنود وفق نظام طبي خاص مؤلف من نوعين من الطعام، يدخل في تركيبة كل منها ثلاث مقومات غذائية أساسية (A,B,C) ويتوجب على الجندي أن يحصل على 1000 وحدة يوميا على الأقل من (A)، و 2000 وحدة يوميا على الأقل من (B)، و 1500 وحدة يوميا على الأقل من (C)، يحتوي كل كيلوغرام من النوع الأول من الطعام على 100 وحدة من (A) و 250 وحدة من (B) و 200 وحدة من (C)، يسعى المدير إلى إيجاد طريقة يستطيع بواسطتها اعداد وجبة الطعام الطبية الخاصة ذات الكلفة الأقل والتي تناسب احتياجات الجندي اليومية مع العلم أن كلفة الكيلوغرام الواحد من النوع الأول من الطعام تعادل 6 ون، أما كلفة الكيلوغرام من النوع الثاني من الطعام تعادل 8 ون.

التمرين 03:

تنتج احدى شركات الأدوات المنزلية نوعين من الثلاجات، ثلاجات ذات حجم عادي، وثلاجات ذات حجم كبير وتتم عملية الصنع في ثلاث مراحل: مرحلة التجميع، مرحلة الطلاء، ثم مرحلة الرقابة على الجودة، أما الوقت اللازم لإنهاء كل مرحلة من مراحل التصنيع فقد تم تحديدها في الجدول التالي:

الرقابة على الجودة	الطلاء	التجميع	النوع
5	1	3	النوع العادي
6	2	4	النوع الكبير

إذا كان الوقت المتاح أسبوعيا للقيام بكل مرحلة من المراحل يبلغ 4000 ساعة لمرحلة التجميع، و1900 ساعة لمرحلة الطلاء، و900 ساعة لمرحلة الرقابة على الجودة، وتتوقع الشركة أن تبيع أسبوعيا على الأقل ما يعادل 300 ثلاجة من الحجم العادي و180 ثلاجة على الأقل من الحجم الكبير.

بناءا على هذه المعلومات فإن مدير الإنتاج يرغب في تحديد الكمية الواجب انتاجها أسبوعيا من كل نوع من الثلاجات بحيث تحقق الشركة أكبر ربح مع العلم أن ربح الشركة من كل نوع هو 50 ون.

المطلوب: أوجد النموذج الرياضي للبرمجة الخطية؟

التمرين 04:

يقوم مصنع بإنتاج نوعين من المواد، ويقوم بإنتاج كل منهما في مرحلتين: المرحلة الأولى آلية والمرحلة الثانية يدوية، تبلغ الطاقة المحدودة والمتاحة في المرحلة الأولى 320 ساعة وفي المرحلة الثانية 340 ساعة، تباع الوحدة من (A) بـ 18 ون والوحدة من (B) بـ 25 ون، تبلغ تكاليف انتاج وحدة واحدة من (A) بـ 13 ون ومن المادة (B) بـ 19 ون، يتطلب انتاج وحدة واحدة من (A) إلى 3 ساعات آلية وساعة واحدة يدوية بينما يتطلب انتاج (B) إلى ساعتين آلية و 4 ساعات يدوية.

المطلوب: البحث عن أفضل تشكيلة إنتاجية تؤدي إلى تعظيم الأرباح باستعمال الطريقة البيانية؟

التمرين 05:

تقوم مؤسسة للإعلام الآلي بصناعة نوعين من أجهزة الإعلام الآلي ()، يمر انتاج الأجهزة بمرحلتين: مرحلة الصنع الالكتروني والتي تتطلب 30 ساعة، ومرحلة التركيب النهائي والتي تتطلب 70 ساعة.

يتطلب الجهاز من النوع الأول 1.5 ساعة في مرحلة الصنع الالكترونية وساعة واحدة في مرحلة التركيب النهائي، بينما يتطلب النوع الثاني 30 دقيقة في مرحلة الصنع الالكتروني وإلى ساعتين في مرحلة التركيب، مع العلم أن ربح المؤسسة من كل جهاز من النوع الأول هو 250 ون ويقدر ربح المؤسسة من كل جهاز من النوع الثاني 180 ون.

المطلوب: إيجاد عدد الأجهزة الواجب انتاجه من كلا النوعين وذلك لتحقيق أكبر ربح ممكن باستعمال الطريقة البيانية؟

التمرين 06:

إليك الجدول التالي لمؤسسة متخصصة في صناعة الطاولات والكراسي:

Produit / Machines	Tables	Chaises	Total des heures disponibles
M1	4	2	60
M2	2	4	48
Profit	8 UM	6 UM	

المطلوب: إيجاد الإنتاج الأمثل من الطاولات والكراسي لتحقيق أكبر ربح ممكن باستعمال الطريقة البيانية؟

التمرين 07:

قرر صانع حلويات صناعة شكولاطة وذلك من خلال نوعين (النوع الأول، النوع الثاني)، وهذا باحترام المقادير المتوفرة، التي تتكون من 18 كلغ من الكاكاو، و8 كلغ من جوز الهند، و14 كلغ من الحليب.

النوع الأول يحتاج إلى 1 كلغ من الكاكاو، و1 كلغ من جوز الهند، و2 كلغ من الحليب.

النوع الثاني يحتاج إلى 3 كلغ من الكاكاو، و1 كلغ من جوز الهند، و1 كلغ من الحليب.

عند بيع النوع الأول يتحصل هذا المنتج على ربح قدره 20 ون ويتحصل على ربح قدره 30 ون عند بيع النوع الثاني.

المطلوب:

- ماهي الكميات الواجب انتاجها من النوعين حتى يتحصل هذا المنتج على أكبر ربح ممكن باستعمال الطريقة البيانية؟
- أعطي تفسيرا اقتصاديا للنتائج المتحصل عليها؟

التمرين 08:

$$\textbf{Min } Z = 8x_1 + 6x_2$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ 3x_1 + 8x_2 \leq 24 \\ 2x_1 + 1x_2 \geq 6 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: إيجاد حل البرنامج الخطي باستعمال الطريقة البيانية؟

التمرين 09:

$$\textbf{Min } Z = 6x_1 + 4x_2$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: إيجاد حل البرنامج الخطي باستعمال الطريقة البيانية؟

التمرين 10:

لديك البرامج الخطية التالية والمطلوب تحويلها إلى الشكل العياري وتشكيل مصفوفة القيود:

$$\textbf{Min } Z = 10x_1 + 12x_2 + x_3$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 120 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 180 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\textbf{Max } Z = 50x_1 + 40x_2$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ 5x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\textbf{Max } Z = 20x_1 + 60x_2$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 110 \\ x_1 + 2x_2 \leq 200 \\ x_1 \geq 40 \\ x_2 \geq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Max } Z = 6x_1+2x_2+2x3+3x4$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} X_2+x_3 \leq 500 \\ x_4 \leq 700 \\ 5x_1+2x_2+3x_3+4x_4 \geq 2000 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين 11:

إليك البرامج الخطية التالية والمطلوب حلها بطريقة السمبلكس:

$$\text{Max } Z = 20x_1+30x_2$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} x_1+3x_2 \leq 18 \\ x_1+x_2 \leq 08 \\ 2x_1+x_2 \leq 14 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Max } Z = 800x_1+600x_2$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 6x_1+4x_2 \leq 36 \\ 2x_1+3x_2 \leq 24 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Max } Z = 9x_1+9x_2+6X_3$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x3 = 12 \\ x_2 \geq 06 \\ x_3 \leq 05 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Min } Z = 3x_1+8x_2$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} x_1+x_2 \leq 200 \\ x_1 \leq 80 \\ x_2 \geq 60 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين 12:

لتكن نماذج البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Max } Z = 20\,x_1+15\,x_2+18\,x_3$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + 4x_3 \leq 80 \\ 15x_1 + 12x_2 + 5x_3 \leq 120 \\ 7x_1 + 21x_2 + 3x_3 \leq 84 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

الحل الأمثل: $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=20$

$$\text{Max } Z = 10\,x_1+15\,x_2$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل الأمثل: $x_1=8,\ x_2=6$

$$\text{Min } W = 30y_1 + 24y_2 + 18y_3$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 80 \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 84 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

الحل الأمثل: $y_1=13,\ y_2=0,\ y_3=15$

$$\text{Min } W = 4200y_1 + 2250y_2 + 2600y_3 + 4200y_4$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 \geq 66 \\ 4y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 84 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0 \end{cases}$$

الحل الأمثل: $y_1=18,\ y_2=0,\ y_3=6,\ y_4=0$

المطلوب:

1- أوجد النماذج الثنائية للنماذج الأصلية، و العكس؟

2- باستخدام نظرية الفجوة المكملة، وانطلاقا من الحلول المثلى للنماذج الأولية أوجد الحلول المثلى للنماذج الثنائية والعكس.

التمرين 13: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

Subject to constraints:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 48 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 32 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب:

1- تطبيق طريقة السمبلكس أعطى لنا الجدول التالي:

Cj		05	03	06	0	0	0	XB	Ɵ
B	VB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
x_1	05	1	0	0	1/2	3/2	-5/2	07	
x_3	06	0	0	1	-1/2	-1/2	3/2	09	
x_2	03	0	1	0	1/2	-1/2	1/2	07	
F_j		5	3	6	1	3	-2	Z = 110	
$C_j - F_j$		0	0	0	-1	-3	2		

هل جدول السمبلكس أعلاه يمثل الحل الأمثل؟ اشرح.

2- أوجد جدول الحل الأمثل؛

3- شكِّل نموذج البرمجة الخطية الثنائي للنموذج الأولي أعلاه؛

4- انطلاقا من جدول سمبلكس الحل الأمثل المتوصل إليه، قم بقراءة الحل الأمثل للنموذج الثنائي الموافق للنموذج الأصلي.

التمرين 14:

يتم نقل بضاعة من 3 مصادر إلى 4 مراكز، الكمية المتوفرة في المصدر (A1) تساوي 220 وحدة، الكمية المتوفرة في المصدر (A2) تساوي 400 وحدة، والكمية المتوفرة في المصدر (A3) تساوي 540 وحدة.

الاحتياج في المركز (b1) يساوي 120 وحدة، الاحتياج في المركز (b2) يساوي 300 وحدة، والاحتياج في المركز (b3) يساوي 240 وحدة، والاحتياج في المركز (b4) يساوي 500 وحدة.

تكاليف نقل الوحدة الواحدة من البضاعة هي:

- 70 ون من (A1) إلى (b1)، 50 ون من (A1) إلى (b2)، 50 ون من (A1) إلى (b3)، 40 ون من (A1) إلى (b4).
- 20 ون من (A2) إلى (b1)، 35 ون من (A2) إلى (b2)، 40 ون من (A2) إلى (b3)، 50 ون من (A2) إلى (b4).
- 10 ون من (A3) إلى (b1)، 30 ون من (A3) إلى (b2)، 20 ون من (A3) إلى (b3)، 15 ون من (A3) إلى (b4).

المطلوب: ايجاد الحل الأساسي باستعمال طريقة الركن الشمالي الغربي.

التمرين 15:

أوجد الحل الأساسي للجدول التالي باستعمال طريقة الركن الشمالي الغربي:

مراكز / مصادر	B1	B2	B3	B4	العرض
A1	10	0	20	11	15
A2	12	7	9	20	25
A3	0	14	16	18	5
الطلب	5	15	15	10	

التمرين 16:

شركة تنتج منتوج معين في معاملها الثلاثة الموزعة في وهران، سعيدة وباتنة، ومن ثم تسلمه إلى مراكزها الثلاثة الموزعة في الوسط، الشرق، والغرب. أوجد الحل الأساسي باستعمال طريقة أقل تكلفة.

مراكز / مصادر	الوسط	الشرق	الغرب	العرض
وهران	1	4	5	**55**
سعيدة	5	7	3	**45**
باتنة	10	8	9	**20**
الطلب	**40**	**30**	**50**	

التمرين 17:

- أوجد الحل الأساسي للجدول التالي باستعمال طريقة أقل تكلفة؟
- قم باختبار المثالية للحل المبدئي باستخدام طريقة الحجر المتنقل؟

مراكز / مصادر	B1	B2	B3	B4	العرض
A1	11	12	10	9	60
A2	17	16	15	18	90
A3	19	21	18	22	30
الطلب	50	75	30	25	

التمرين 18:

- أوجد الحل الأساسي للجدول التالي باستعمال طريقة فوجل التقريبية؟
- هل يمثل هذا الحل المبدئي حلا أمثلا، تأكد باستخدام طريقة التوزيع المعدلة؟

مراكز / مصادر	B1	B2	B3	B4	العرض
A1	3	2	7	6	15000
A2	7	5	2	3	18000
A3	2	5	4	5	7500
الطلب	18000	12000	6000	4500	

التمرين 19:

أوجد الحل المبدئي للجدول التالي باستعمال طريقة فوجل:

مراكز / مصادر	B1	B2	B3	B4	B5	B6	العرض
S1	9	7	8	11	12	10	200
S2	14	9	5	8	13	17	150
S3	18	12	6	4	12	16	300
S4	10	7	12	2	4	1	250
الطلب	100	180	120	200	150	150	

قائمة المراجع

1- أبو القاسم مسعود الشيخ، (2014)، " **بحوث العمليات"**، الطبعة الثانية، المجموعة العربية للتدريب والنشر، القاهرة، مصر.

2- السيد، ناجي، (2000)، **"المبادئ والقرارات الأساسية"**، دار النهضة العربية، القاهرة، مصر.

3- بقه جي، صباح الدين، يوسف جمال، (2000)، **"بحوث العمليات"**، جامعة دمشق.

4- بوقرة، رابح، (2009)، **"بحوث العمليات"**، مؤسسة شباب الجامعة للنشر، الإسكندرية، مصر.

5- سهيلة عبد الله سعيد، (2007)، **"الأساليب الكمية وبحوث العمليات"**، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر، الأردن.

6- صالح العامري وعواطف الحداد، (2009)، **"تطبيقات بحوث العمليات"**، الطبعة الأولى، اثراء للنشر والتوزيع، الأردن.

7- عفاف علي حسن الدش، (2012)، **"بحوث العمليات واتخاذ القرارات (الأساليب-التطبيق-استخدام حزم البرامج الجاهزة"**، الطبعة الثانية، مكتبة عين شمس للنشر، القاهرة، مصر.

8- علي العلاونة و محمود عبيدات وعبد الكريم عواد، (2005)،**"بحوث العمليات في العلوم التجارية"**، الطبعة الأولى، دار يزيد للنشر والتوزيع.، عمان، الأردن.

9- فتحي، حمدان، (2010)، **"بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب"**، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر، الأردن.

10- فتيحة بلجيلالي، مطبوعة بعنوان: **محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة**، جامعة ابن خلدون، تيارت، 2017-2018.

11- محمد راتول، (2006)، **"بحوث العمليات"**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، الطبعة الثانية.

12- محمود الجنابي، (2010)، **"الأحدث في بحوث العمليات"**، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع. الأردن.

13- محمود الفياض وعيسى قدادة، (2007)، **"بحوث العمليات"**، اليازوري للنشر والتوزيع، الأردن.

14- مراد عوض، (2010)، **"الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية بحوث العمليات"**، الطبعة الأولى، دار البداية للنشر والتوزيع.

15- منعم زمزير الموسوي، (2010)، **"بحوث العمليات-مدخل علمي لاتخاذ القرارات-"،** الطبعة الأولى، دار وائل للنشر، عمان، الأردن.

16- موفق محمود الكبيسي، (1999)، **"بحوث العمليات تطبيقات وخوارزميات"**، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.

17- نعيم نصير، (2005)، **"الأساليب الكمية وبحوث العمليات في الإدارة"**، عالم الكتب الحديث للنشر والتوزيع، الأردن.