Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès.
Faculté des Sciences de l'Ingénieur.
2$^{\text{ème}}$ Année L.M.D. Sciences & Techniques.

EXAMEN — CORRIGÉ

Semestre 4 : Fonctions Complexes à Une Variable Complexe.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$, $\qquad 2i\sin z + \mathrm{e}^{-iz} = 1+2i.$

$2i\sin z + \mathrm{e}^{-iz} = 1+2i \Longleftrightarrow 2i\dfrac{\mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-iz}}{2i} + \mathrm{e}^{-iz} = 1+2i \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{iz} = 1+2i$, d'où on a $iz = \mathrm{Log}(1+2i) \Longleftrightarrow z = -i\,\mathrm{Log}(1+2i) = -i\left(\mathrm{Log}\,|1+2i| + i\,\mathrm{Arg}(1+2i)\right)$,

$$\begin{cases} \mathrm{Log}\,|1+2i| = \mathrm{Log}\sqrt{5} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,5. \\ \mathrm{Arg}(1+2i) = \mathrm{Arctg}\,2 + 2k\pi, \ \ k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Finalement,

$$z = \mathrm{Arctg}\,2 + 2k\pi - \frac{i}{2}\,\mathrm{Log}\,5, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Exercice 2

Calculer les nombres suivants ; (chaque nombre sera donné sous la forme $\alpha + i\beta$ où α et β sont des réels).

1. $\mathbb{A} = i\,\mathrm{e}^{-i}$ $\qquad$ 2. $\mathbb{B} = \cos(3+5i)$.

1. $\mathbb{A} = i\,\mathrm{e}^{-i} = i(\cos(-1) + i\sin(-1)) = i(\cos 1 - i\sin 1) = \sin 1 + i\cos 1.$

2. $\mathbb{B} = \cos(3+5i) = \cos 3\cos(5i) - \sin 3\sin(5i) = \cos 3\,\mathrm{ch}\,5 - i\sin 3\,\mathrm{sh}\,5.$

Exercice 3

Donner le développement en série de Laurent de : $f(z) = \dfrac{2}{z(z-2)}$, dans l'ensemble

$$\mathscr{A} = \left\{ z\in\mathbb{C}, \ \Big/ \ 2 < |z| \right\}.$$

$\mathscr{M}^{\mathrm{r}}$ Amroun

$1^{\text{ère}}$ Méthode :

Décomposons f en éléments simples,

$$f(z)=\frac{2}{z(z-2)}=\frac{a}{z}+\frac{b}{z-2}=\frac{(a+b)z-2a}{z(z-2)}\cdot$$

On trouve $a=-1$ et $b=1$, donc

$$f(z)=\frac{2}{z(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z}\cdot$$

Pour $|z|>2$, on a $\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{z\left(1-\dfrac{2}{z}\right)}=\dfrac{1}{z}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}\cdot$

Finalement, $\forall z\in\mathscr{A}$;

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}-\frac{1}{z}=\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}\cdots\right)-\frac{1}{z}\\ &=\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}+\frac{8}{z^4}+\cdots+\frac{2^n}{z^{n+1}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}\cdot\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{z^{n+2}}\cdot \end{aligned}$$

$2^{\text{ème}}$ Méthode :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2}{z(z-2)}=\frac{2}{z}\left(\frac{1}{z-2}\right)\\ &= \frac{2}{z}\cdot\frac{1}{z\left(1-\dfrac{2}{z}\right)}=\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{z^{n+2}},\quad \forall z\in\mathscr{A}. \end{aligned}$$

Exercice 4

Calculer les résidus suivants, tout en précisant **la nature de la singularité** ;

$$\mathscr{R}es\left(\frac{6-5z+z^2}{z(z-3)^2},\,z_0=3\right);\qquad \mathscr{R}es\left(z^4\,\mathrm{e}^{1/z}-\frac{\mathrm{e}^z}{z^4},\,z_0=0\right).$$

Soit $f(z)=\dfrac{6-5z+z^2}{z(z-3)^2}=\dfrac{(z-3)(z-2)}{z(z-3)^2}=\dfrac{z-2}{z(z-3)}$,
on voit que 3 est un pôle simple, et on a,

$$\mathscr{R}es\Big(f(z),\ z_0=3\Big)=\mathscr{R}es\left(\frac{z-2}{z(z-3)},\,z_0=3\right)=\lim_{z\longrightarrow 3}(z-3)\frac{z-2}{z(z-3)}=\lim_{z\longrightarrow 3}\frac{z-2}{z}=\frac{1}{3}\cdot$$

ℳ r Amroun

Soit

$$\begin{aligned}
g(z) &= z^4\,\mathrm{e}^{1/z} - \frac{\mathrm{e}^z}{z^4} = z^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} - \frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \\
&= z^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!} - \frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \\
&= z^4\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2 2!}+\frac{1}{z^3 3!}+\frac{1}{z^4 4!}+\frac{1}{z^5 5!}+\cdots\right) - \frac{1}{z^4}\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right) \\
&= \cdots + \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{6!}-\frac{1}{2!}\right) + \frac{1}{z}\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{3!}\right) + z\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}\right) + z^2\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{6!}\right) + \cdots \\
&= \cdots - \frac{359}{720}\frac{1}{z^2} - \frac{19}{120}\frac{1}{z} + \frac{19}{120}z + \frac{359}{720}z^2 + \cdots
\end{aligned}$$

On voit que 0 est une singularité essentielle, c'est à dire d'ordre infini, et que le résidu de g en 0 étant le cœfficient de $\frac{1}{z}$, on a alors : $\mathscr{R}es\Big(g(z),\ z_0=0\Big) = -\frac{19}{120}$.

Exercice 5

1. Montrer que la fonction suivante est harmonique dans $\mathbb{R}^2$.

$$A(x,y) = 3\operatorname{sh} x \cos y - 2x + 7, \qquad x \text{ et } y \text{ sont deux réels.}$$

2. Déterminer le conjugué harmonique de A, on le note B.
3. En déduire que la fonction $f(z) = A^2(x,y) - B^2(x,y) + 2iA(x,y)B(x,y)$, est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

1. Montrons que A est harmonique dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} A'_x(x,y) = 3\operatorname{ch} x\cos y - 2, \\[2ex] A''_{x^2}(x,y) = 3\operatorname{sh} x\cos y. \end{cases} \qquad \begin{cases} A'_y(x,y) = -3\operatorname{sh} x\sin y, \\[2ex] A''_{y^2}(x,y) = -3\operatorname{sh} x\cos y. \end{cases}$$

On a donc, $\Delta A(x,y) = A''_{x^2}(x,y) + A''_{y^2}(x,y) = 3\operatorname{sh} x\cos y - 3\operatorname{sh} x\cos y = 0$.

2. B conjugué harmonique de A, donc le couple (A,B) vérifie les deux conditions de Cauchy-Riemann, c'est à dire ;

$$\begin{cases} A'_x(x,y) = B'_y(x,y), \quad (1). \\[2ex] A'_y(x,y) = -B'_x(x,y) \quad (2). \end{cases}$$

De l'équation (1) on tire : $B'_y(x,y) = 3\operatorname{ch} x\cos y - 2$, d'où

$B(x,y) = \displaystyle\int (3\operatorname{ch} x\cos y - 2)dy = 3\operatorname{ch} x\int \cos y\ dy - 2\int\ dy = 3\operatorname{ch} x\sin y - 2y + \varphi(x)$.

φ est une fonction ne dépendant que de la variable x. Replaçons $B(x, y)$ dans l'équation (2), on a :
$-3\,\mathrm{sh}\,x \sin y = -(3\,\mathrm{sh}\,x \sin y) - \varphi'(x) \Longrightarrow \varphi'(x) = 0 \Longrightarrow \varphi(x) = c$, où c est une constante réelle. Finalement,

$$B(x, y) = 3\,\mathrm{ch}\,x \sin y - 2y + c.$$

3. $z = x+iy$ où x et y sont des réels. Montrons que $f(z) = A^2(x, y)-B^2(x, y)+2iA(x, y)B(x, y)$, est holomorphe dans $\mathbb{C}$, c'est à dire dérivable.
On a $f(z) = (A(x, y) + iB(x, y))^2$, or la fonction $A(x, y) + iB(x, y)$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$, car (A, B) est un couple de fonctions harmoniques conjuguées. Il en est de même du carré de cette fonction.

Exercice 6

Utiliser le théorème des résidus pour calculer l'intégrale suivante :

$$\mathscr{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{3ix}\,dx}{x - i}.$$

En déduire la valeur de l'intégrale,

$$\mathscr{K} = \int_0^{\infty} \frac{\cos(3x) + x\sin(3x)}{x^2 + 1}\,dx.$$

• Soit $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{3iz}}{z - i} = \dfrac{P(z)}{Q(z)} \cdot \mathrm{e}^{3iz}$; où $P(z) = 1$ et $Q(z) = z - i$.
On a, $d^oP - d^oQ = 1 - 0 = 1 \geqslant 1$, l'inégalité est vérifiée.
f a pour seul pôle le nombre i , et il n'est pas réel ; sa partie imaginaire étant strictement positive, on a donc ;

$$\mathscr{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{3ix}\,dx}{x - i} = 2\pi i \mathscr{R}es\Big(f(z),\ i\Big).$$

i est un pôle simple, alors $\mathscr{R}es\Big(f(z),\ i\Big) = \lim\limits_{z \longrightarrow i} (z - i)\dfrac{\mathrm{e}^{3iz}}{z - i} = \lim\limits_{z \longrightarrow i} (\mathrm{e}^{3iz}) = \mathrm{e}^{-3}$.
Finalement,

$$\mathscr{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{3ix}\,dx}{x - i} = 2\pi i\,\mathrm{e}^{-3}.$$

• On a $\dfrac{\mathrm{e}^{3ix}}{x - i} = \dfrac{\Big(\cos(3x) + i\sin(3x)\Big)(x + i)}{(x - i)(x + i)} = \dfrac{x\cos(3x) - \sin(3x)}{x^2 + 1} + i\dfrac{\cos(3x) + x\sin(3x)}{x^2 + 1}$.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(3x) - \sin(3x)}{x^2 + 1}\,dx = 0$, (évident, car c'est l'intégrale d'une fonction impaire).

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x) + x\sin(3x)}{x^2 + 1}\,dx = 2\int_0^{\infty} \frac{\cos(3x) + x\sin(3x)}{x^2 + 1}\,dx = 2\pi\,\mathrm{e}^{-3}$, d'où ;

$$\mathscr{K} = \int_0^{\infty} \frac{\cos(3x) + x\sin(3x)}{x^2 + 1}\,dx = \pi\,\mathrm{e}^{-3}.$$