THEORIE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Cours rédigé par : Dr. TILMATINE AMAR
Faculté des sciences de l'Ingénieur, université de sidi-Bel-Abbès.

INTRODUCTION
Il existe trois régimes distincts en électromagnétisme, chacun différent de l'autre suivant la variation en fonction du temps.

a) Régime stationnaire (R.S)
Phénomènes indépendants du temps $\partial/\partial t = 0$;
Toutes les grandeurs électriques et magnétiques ($\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, q…) sont constantes.

R.S: Electrostatique (Chapitre 1) + Magnétostatique (Chapitre 2)

b) Régime quasi-stationnaire (RQS)
Phénomènes variables avec le temps $\partial/\partial t \neq 0$ (Chapitre 3);
Exemple: $q = q_0 \cos(2\pi f t)$
Si f<1 kHz ⇒ RQS
Si f> 1 kHz ⇒ Régime variable

c) Régime variable (R.V)
Phénomènes très variables avec le temps
Ne concerne que les hautes fréquences > 1 kHz.
Dans le RV le champ électromagnétique devient une onde électromagnétique qui se propage dans l'air.

SOMMAIRE :

CHAPITRE I

ELECTROSTATIQUE

Définition : L'électrostatique est l'étude des interactions électriques entre des charges constantes et immobiles. Autrement dit, pas de courant électrique.

I. STRUCTURE ATOMIQUE DE LA MATIERE

1. L'atome

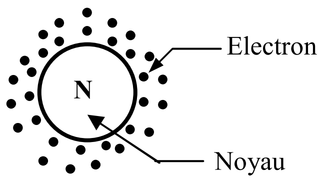


Figure 1

Le noyau comprend des :
- charges positives appelées protons
- particules neutres appelées neutrons

Les électrons sont des charges négatives qui gravitent autour du noyau.
En valeur absolue, les charges de l'électron et du proton sont égales :

$$\boxed{e = 1{,}602.10^{-19}\,C}$$

Les caractéristiques des particules sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

Particule	Masse	Charge
Electron	$m_e = 9{,}1091.10^{-31}$ kg	- e
Proton	$m_p = 1{,}6725.10^{-27}$ kg	+ e
Neutron	$m_n = 1{,}6748.10^{-27}$ kg	0

A l'état fondamental, il y a autant d'électrons que de protons : l'atome est une particule neutre**.**

L'atome est ionisé s'il cède ou acquiert un électron :
- c'est un ion positif s'il perd 1 ou plusieurs électrons.
- c'est un ion négatif s'il gagne 1 ou plusieurs électrons.

2. Nuage électronique

Le nuage électronique est formé d'électrons tournant à grande vitesse autour du noyau selon des trajectoires très complexes.
Les électrons sont répartis sur les couches selon les quantités suivantes :

K 2	N 32	
L 8	O 50	
M 18	P 72	Q 98

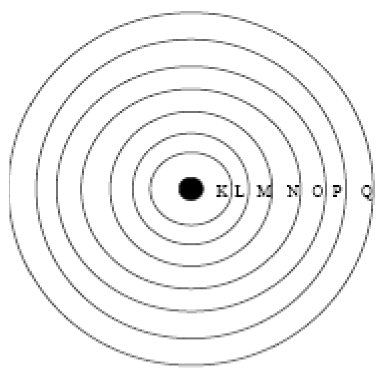


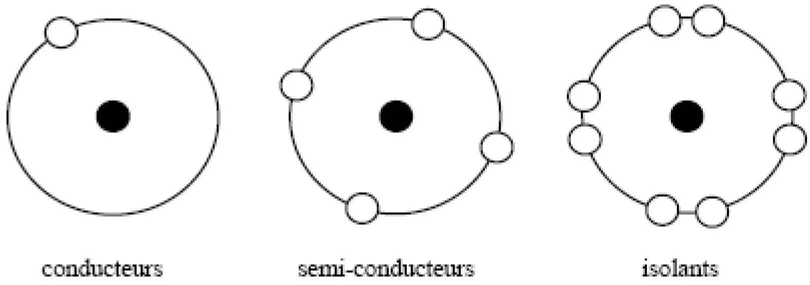
Fig. 2.2 Le nuage électronique.

3. Couches périphériques

<u>Définition :</u> C'est la couche la plus extrême d'un atome. Ses électrons sont appelés *électrons périphériques* ou *électrons de valence***.**
La *couche périphérique* d'un atome ne peut pas posséder plus de huit électrons.

<u>Important :</u> Les propriétés électriques dépendent des électrons de la couche périphérique.

Conducteurs :	*1 à 3 électrons de valence*
Semi-conducteurs :	*4 électrons de valence*
Isolants :	*5 à 8 électrons de valence*



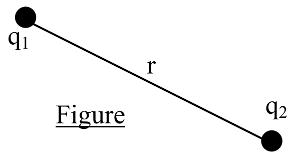
Représentation des couches périphériques.

- Les *bons conducteurs* ont leur dernière *couche incomplète*. Ils céderont facilement leurs électrons (électrons libres).
- Les *isolants* ont leur dernière *couche saturée ou presque saturée*. Ils ne céderont pas facilement leurs électrons (électrons liés).
- Les *semi-conducteurs* sont des matériaux dont la *dernière couche est formée de 4 électrons*. Le silicium et le germanium sont les semi-conducteurs les plus utilisés.

II. LOI DE COULOMB (1785)

Charles A. de Coulomb : ingénieur français (1736 – 1806).
Soient deux charges ponctuelles q_1 et q_2

Force de Coulomb : $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$



Figure

Unités : F [N] ; q_1, q_2 [C] ; r[m]
ε_0 : constante diélectrique du vide.
Vide, air… $\varepsilon_0 = 8{,}85\ 10^{-12}$ [F/m]

$$F_{12} = F_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

La charge q_1 exerce une force F_{12} sur q_2, de même que la charge q_2 exerce une force F_{21} sur q_1.

Attraction et répulsion :
Si q_1 et q_2 ont même signe $\Rightarrow$ Force de répulsion.
Si q_1 et q_2 ont des signes opposés $\Rightarrow$ Force d'attraction.

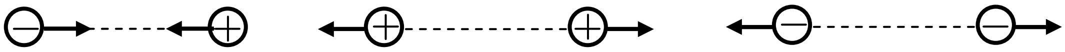
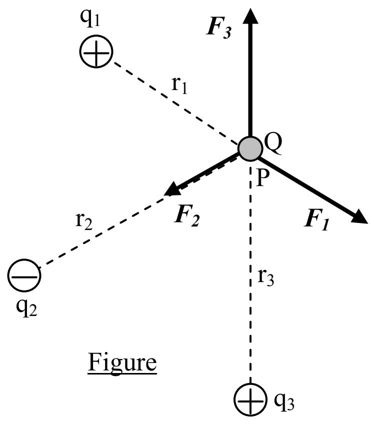


Figure : Forces entre charges électriques de signes identiques ou opposés

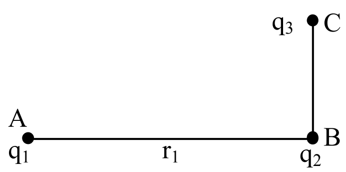
Une charge *Q* placée dans une région où se trouvent plusieurs autres charges est soumise à l'action de toutes ces charges :

F(P) = ***F₁*** + ***F₂*** + ***F₃*** + ...



Figure

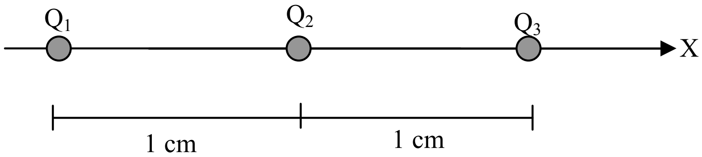
Exercice :
Etant donné la disposition des charges de la figure, trouver la force résultante appliquée sur la charge q_3.



Figure

Exercice :

Deux charges ponctuelles sont situées sur l'axe des abscisses comme suit (voir figure). On donne $Q_1 = 8.10^{-9}$ C, $Q_2 = -10^{-9}$ C. Estimer la force suivant l'axe des x appliquée sur une troisième charge $Q_3 = 2.10^{-9}$ C?



III. CHAMP ELECTRIQUE

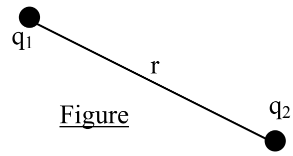
1. Définition

Le champ électrique est une grandeur physique qui exerce une force électrique sur une particule chargée.

Remarque : à première vue, il peut sembler que le champ électrique n'a qu'une signification mathématique, en l'occurrence un vecteur qui permet de calculer aisément les forces. Mais le champ électrique a deux autres caractéristiques importantes. D'une part il sert à éliminer le concept d'action a distance, c'est l'entité qui de proche en proche transmet l'interaction d'une charge a une autre. Le champ électrique a, d'autre part, véritablement une signification physique, car il possède de l'énergie et de l'impulsion.

$$F_{12}=\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}q_2=q_2 E_1$$

La grandeur $E_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ est l'expression du champ électrique crée par q_1.

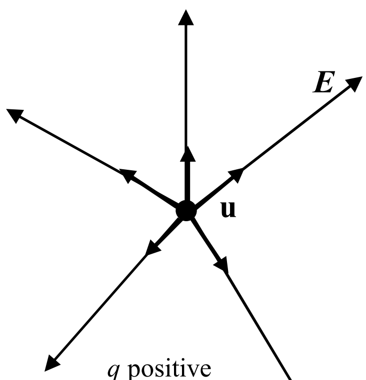


Figure

De même, sachant que : $F_{21}=\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}q_1=q_1 E_2$

La grandeur $E_2=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ est l'expression du champ électrique crée par q_2.

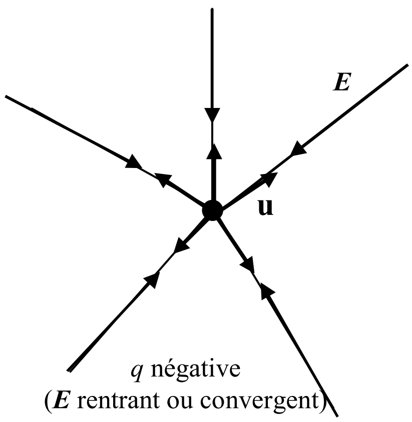
Sens du champ électrique :



q positive
(**E** sortant ou divergent)

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{u}$$

u est un vecteur unitaire radial issu de la charge



q négative
(**E** rentrant ou convergent)

Figure : Le champ électrique est un vecteur

Unité de E :

Comme par définition nous avons $E = F / q$: donc $[E] = N / C$.

En général on utilise une autre unité :

Vu que $E = -dV / dx$: Alors $[E] = V / m$.

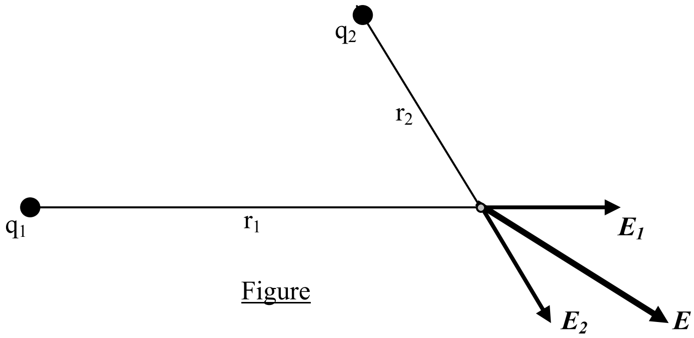
2. Champ d'un ensemble de charges

Le champ électrique produit par un ensemble de charges ponctuelles est égal à la somme vectorielle des champs produits par toutes les charges.

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^2}\boldsymbol{u_i}$$

Cas de 2 charges :

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E_1}+\boldsymbol{E_2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1}\boldsymbol{u_1}+\frac{q_2}{r_2}\boldsymbol{u_2}\right)$$



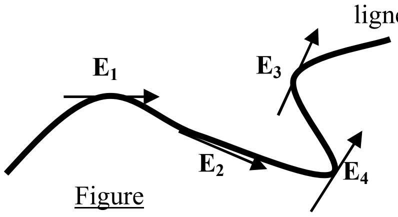
Figure

3. Lignes de champ

Définition

Une ligne de champ est une ligne qui est tangente en chacun de ses points au champ électrique en ce point.

Exemple

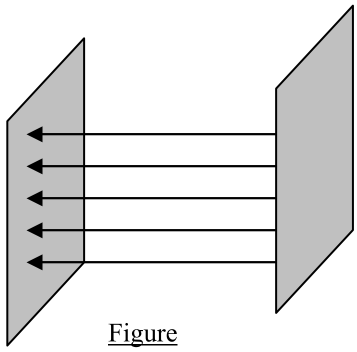


Figure

Ligne de champ uniforme :

C'est une ligne de champ où le module est partout le même en chacun de ses points et qui possède une seule direction.

Exemple: Le champ existant entre deux plans chargés est uniforme (sera démontré par la suite).



Figure

Déplacement électrique

$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$

Exercice :

Quatre charges sont arrangées sur les coins d'un carré comme montré dans les figures ci-dessous. Dans quel case(s) le champ électrique est-il égal à zéro au centre du rectangle ? Supposez que toutes les charges ont la même valeur et la seule différence est le signe.

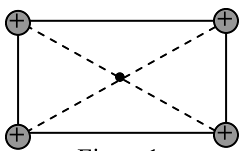


Figure1

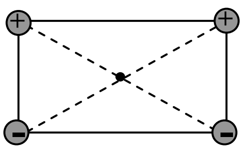


Figure 2

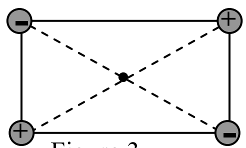


Figure 3

IV. REPARTITION DES CHARGES

1. Ligne chargée

$dq=\rho dl \Rightarrow q=\int \rho dl$

avec ρ densité de charge linéique (C/m)

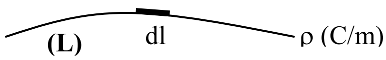


Figure 17

2. Surface chargée

$dq=\rho_s ds \Rightarrow q=\int_S \rho_s ds$

avec ρ_s densité de charge surfacique (C/m^2)

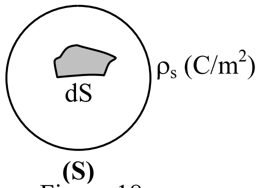


Figure 18

3. Volume chargé

$dq=\rho_v dv \Rightarrow q=\int_V \rho_v dv$

avec ρ_v densité de charge volumique (C/m^3)

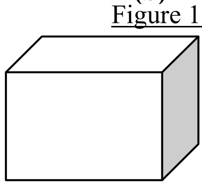


Figure 19

Exercice :

Calculer le champ et le potentiel électriques produits par un filament rectiligne, infiniment long, portant une charge ρ par unité de longueur.

Exercice :

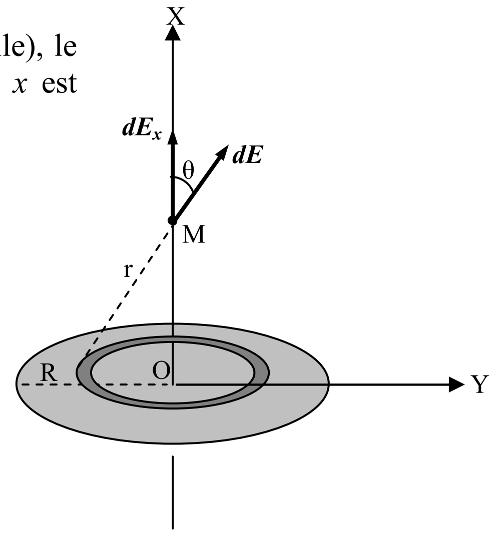
Soit un disque de rayon *R* chargé uniformément en surface avec une densité surfacique $\sigma > 0$.

1) Calculer le champ électrique *E(M)* en un point quelconque M sur l'axe du disque.
2) On fait tendre *R* vers l'infini. En déduire l'expression du champ *E(M)*.

Solution :

1) On choisit comme élément de surface *dS* une couronne circulaire comprise entre les cercles de rayons *y* et *y+dy*. L'élément de surface *dS* porte une charge $dq = \sigma\, dS$

Par raison de symétrie (il s'agit d'une surface équipotentielle), le champ crée par cette couronne en un point M d'abscisse *x* est porté par Ox et a pour expression :



Figure

$$dE_x = dE\cos\theta$$

$$dE_x = \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta = k\frac{\sigma dS}{r^2}\cos\theta$$

avec

$dS = 2\,\pi\, y.\, dy$

$\cos\theta = x / r$

et

$r^2 = x^2 + y^2$

D'où

$$dE_x = k\frac{\sigma 2\pi y dy.x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\frac{y dy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

Le champ total est donc également porté par *Ox*, et vaut ;

$$E = \int dE_x = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{y dy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[-\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}\right]_0^R$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{x}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}}\right]$$

2) Si on fait tendre R vers l'infini, on déduit :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Autre solution :

Le disque porte une charge totale

$q = \rho_s S = \rho_s \pi R^2$

La couronne comprise entre les cercles de rayons *r* et *r+dr* porte une charge *dq* :

$dq = \rho_s\, ds = \rho_s\, 2\pi r dr$

et crée au point M un potentiel *dV* :

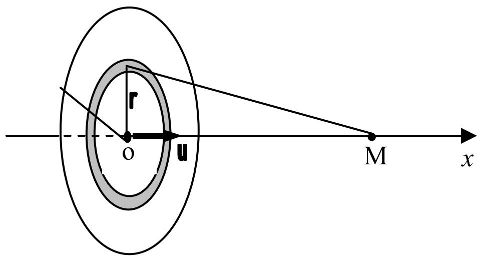


Figure 16

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_s\, 2\pi r dr}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

Soit donc :

$$V(x)=\int_0^R \frac{\pi\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2rdr}{\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{\rho_s}{4\varepsilon_0}\int_0^R \frac{d\left(r^2+x^2\right)}{\sqrt{r^2+x^2}}=\int_0^R d\left(\sqrt{r^2+x^2}\right)$$

D'où

$$V(x)=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{r^2+x^2}\right]_0^R = V(x)=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2}\pm x\right)$$

Au centre du disque ($x=o$):

$$V(o)=\frac{\rho_s R}{2\varepsilon_0}$$

Ensuite, on calcule le champ

$$E=-\frac{dV}{dx}=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\frac{d\left[\left(R^2+x^2\right)^{1/2}\pm x\right]}{dx}$$

d'où $E=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\mp 1\right)$

Pour $x\rangle 0$, $E=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$

Pour $x\rangle 0$, $E=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left(-1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$

Exercice :

Calculer le champ crée par un anneau mince chargé uniformément, sur un point se trouvant sur l'axe.

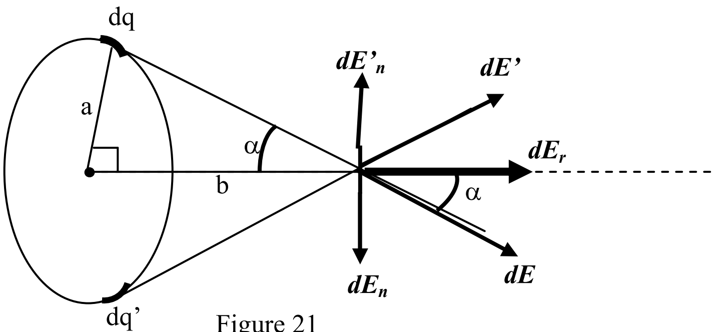


Figure 21

L'élément différentiel est dans ce cas un petit arc d'angle dθ, de longueur a dθ.
Sa charge vaut alors $dq=\lambda a d\theta$.

L'élément dq produit un champ $dE=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\lambda a d\theta}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+b^2\right)}$

A chaque charge *dq* lui correspond une charge *dq'* qui produit un champ *dE'*. Les composantes verticales de *dE* et *dE'* qui sont égales et opposées, s'annulent.
Le champ résultant produit par le cercle est donné par : $dE_r = dE\cos\alpha$

Soit, donc : $E=\int dE=\int\frac{\lambda a d\theta}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+b^2\right)}\cos\alpha$

$$\cos\alpha=\frac{b}{r}=\frac{b}{\left(a^2+b^2\right)^{1/2}}$$

$$E=\int\frac{\lambda ab d\theta}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}=\frac{\lambda ab}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{\lambda ab}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}2\pi a$$

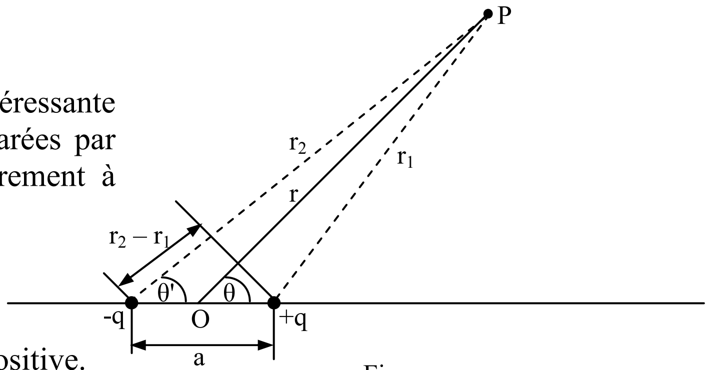
Comme $Q=\lambda 2\pi a$ représente la charge totale de l'anneau :

$$E=\frac{Qb}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}$$

V. DIPOLE ELECTRIQUE

Le dipôle électrique est une disposition très intéressante constituée de deux charges égales et opposées séparées par une très petite distance, qu'on retrouve particulièrement à l'échelle atomique.

Le moment électrique dipolaire est donné par :
p** = q **a,
où ***a*** est dirigé de la charge négative vers la charge positive.



Figure

Le potentiel crée par le dipôle au point P est :

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1}-\frac{q}{r_2}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\left(r_2-r_1\right)}{r_1\,r_2}$$

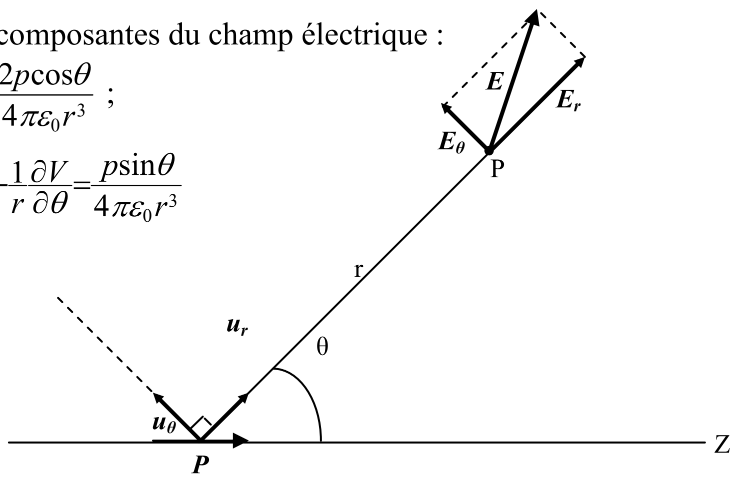
On peut écrire d'après la figure : $r_2 - r_1 = a\cos\theta'$

Si la distance a est très petite par rapport à r, on peut poser:
$r_2 - r_1 = a\cos\theta$ et $r_1\, r_2 = r^2$

Ce qui donne : $V=\dfrac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

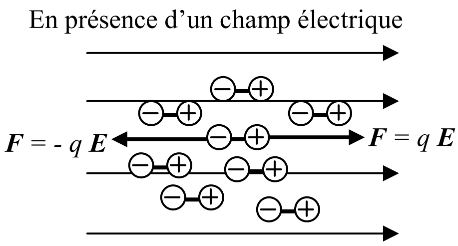
Le calcul en coordonnées polaires donne deux composantes du champ électrique :

- Une composante radiale E_r : $E_r=-\dfrac{\partial V}{\partial r}=\dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$;
- Une composante transversale E_θ : $E_\theta=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\theta}=\dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

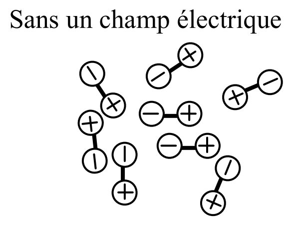


Figure

Un dipôle placé dans un champ électrique est soumis à un couple qui tend à l'aligner suivant la ligne de ce champ.



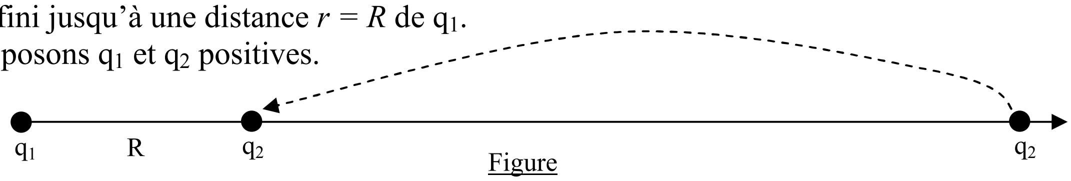
Figure



Figure

VI. POTENTIEL ELECTRIQUE

On considère une charge q_1 placée à l'origine d'un repère. On apporte une autre charge q_2 de l'infini jusqu'à une distance $r = R$ de q_1.
Supposons q_1 et q_2 positives.



Figure

Le travail fourni W pour vaincre la force de répulsion de q_1 est

$$W=-\int_{\infty}^{R}\mathbf{F}d\mathbf{r}=-\int_{\infty}^{R}Fdr=-\int_{\infty}^{R}q_2E_1\,dr$$

avec $E_1=\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$W=-\int_{\infty}^{R}\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0r^2}dr=-\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{R}\frac{dr}{r^2}=-\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_{\infty}^{R}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0R}$$

Suivant le principe de conservation de l'énergie, le travail fourni W est emmagasiné par la charge q_0 sous forme d'énergie potentielle E_p,
Soit $W = E_p$.

On pose donc : $E_p=\dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0R}=q_1V_2$

avec $V_2=\dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0R}$ potentiel crée par q_2

On peut également écrire : $E_p=q_2V_1$

avec $V_1=\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0R}$ potentiel crée par q_1

$V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0R}$ est donc l'expression du potentiel crée par une charge q

et $E_p=qV$ est l'énergie potentielle d'une charge q soumise à un potentiel V.

Unité

soit en J/C car par définition $V=E_p/q$

ou bien en Volt, qui est l'unité la plus utilisée.

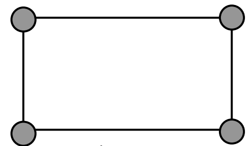
Le potentiel crée par plusieurs charges en un point P peut être déterminé à partir de l'expression suivante :

$$V=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0r_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0r_2}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0r_3}+...=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$$

Conclusion : Une charge ponctuelle produit :

- Un champ (vectoriel) $\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\boldsymbol{u}$.
- Un potentiel (scalaire) $V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0r}$.

Exercice :
Les charges Q_1 = +4 µC, Q_2 = -4 µC, Q_3 = +5 µC, et Q_4 = -7 µC sont placées sur un rectangle de longueur 5cm et de largeur 3cm, comme représenté à la figure. Calculer l'énergie potentielle de cette configuration de charges.



Figure

Exercice :

Trois charges ponctuelles sont apportés de l'infini aux positions suivantes sur l'axe des abscisses: $Q_1 = 5{,}2.10^{-6}$ C à x = -1 m, $Q_2 = 2{,}6.10^{-6}$ C à x = 0 m, et $Q_3 = 5{,}2.10^{-6}$ C à x = 1 m. Quelle est l'énergie potentielle de cette configuration de charges?

Exercice :

Deux charges $Q_1 = 1$ C et $Q_2 = -1$ C sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral, de 4 cm de côté.

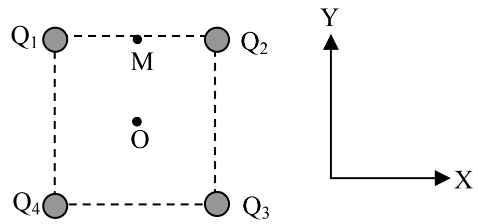
1. Calculer le potentiel au point P.
2. Quelle est la direction du champ électrique au point P?

Exercice :

Aux sommets d'un carré ABCD de coté 2m sont placées les charges suivantes :

$Q_1= 2.10^{-8}$ C ; $Q_2= -8.10^{-8}$ C ; $Q_3= 2.10^{-8}$ C ; $Q_4= 4.10^{-8}$ C ;

1. Calculer le champ et le potentiel électriques au centre O du carré.
2. Calculer le potentiel au point M milieu de AB.



Figure

VII. RELATION ENTRE *E* et *V*

Pour placer une charge q en un point où règne un potentiel V, il faut fournir un travail W :

$$W=-\int \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr}$$

Ce travail est emmagasiné par la charge q sous forme d'énergie potentielle E_p :

$$E_p=qV$$

$$W = E_p \Rightarrow dW=dE_p \Rightarrow -\boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr}=q\,dV \Rightarrow -q\boldsymbol{E}.\boldsymbol{dr}=qdV \Rightarrow dV=-\boldsymbol{E}.\boldsymbol{dr} \quad (1)$$

D'autre part, on peut poser que :

$$dV=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{u}_x+\frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{u}_y+\frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{u}_z\right)(dx\mathbf{u}_x+dy\mathbf{u}_y+dz\mathbf{u}_z)=\mathbf{grad}V.d\mathbf{r} \quad (2)$$

D'après les équations 1 et 2, on obtient:

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}V$$

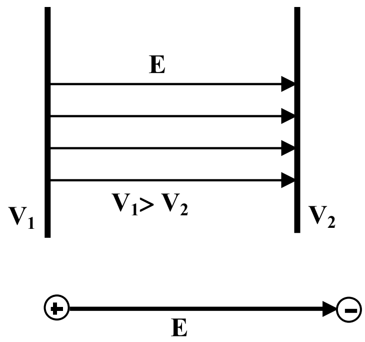
Conclusions:

1) $\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}V=-\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{u}_x-\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{u}_y-\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{u}_z$

Le champ électrostatique a le sens des potentiels décroissants.

Suivant l'axe des *x*, nous avons : $\boldsymbol{E}=-\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{u}_x$.

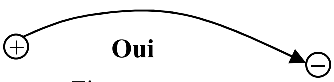
Le champ électrique est toujours dirigé du potentiel le plus élevé au potentiel le plus bas.



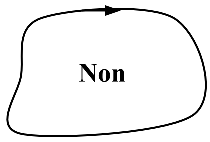
Figure

2) $\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=\mathrm{rot}(-\mathrm{grad}V)=0$

D'après cette relation mathématique, on déduit que le champ électrostatique est non rotationnel. C'est-à-dire que la ligne de champ électrique ne se referme jamais sur elle même. Les lignes de champ électrique ne se referment que sur des charges électriques.



Figure



Figure

3) $\oint \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dl}=0$

En effet, nous avons : $rot\boldsymbol{E}=0 \Rightarrow \int rot\boldsymbol{E}.\boldsymbol{dS}=0 \Rightarrow \oint \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dl}=0$

Le long d'un contour fermé quelconque, dans le quel on définit deux points A et B :

$$\oint \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dl}=\int_A^B \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dl}+\int_B^A \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dl}=(V_A-V_B)+(V_B-V_A)=0$$

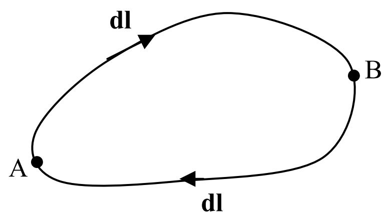


Figure 34

VIII. SURFACE EQUIPOTENTIELLE

Définition :

C'est une surface où le potentiel est constant et partout le même.

Exemple: charge ponctuelle q

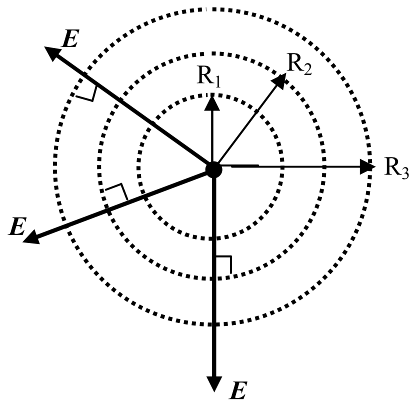
$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Le potentiel est constant si on pose r = R = constante ;

Chaque sphère de rayon R constant (R_1, R_2, R_3) représente donc une surface équipotentielle.

Règle de base : le champ électrique est toujours perpendiculaire à la surface équipotentielle.

Sens de parcours de la boucle = sens de **dl**



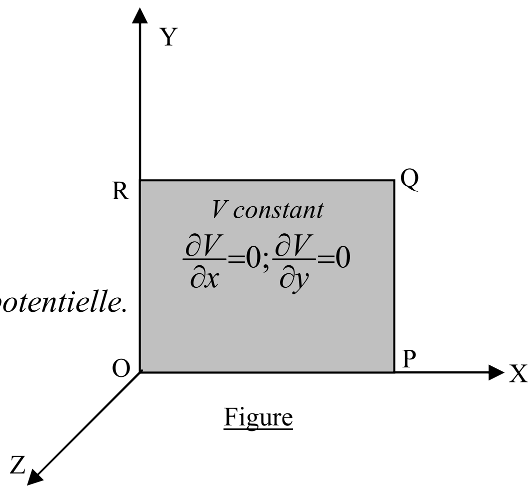
Figure

Exercice :

Montrer que le champ électrique est perpendiculaire à la surface équipotentielle.

Solution :

Soit OPQR un plan uniformément chargé, c'est donc une surface équipotentielle située dans le plan XOY



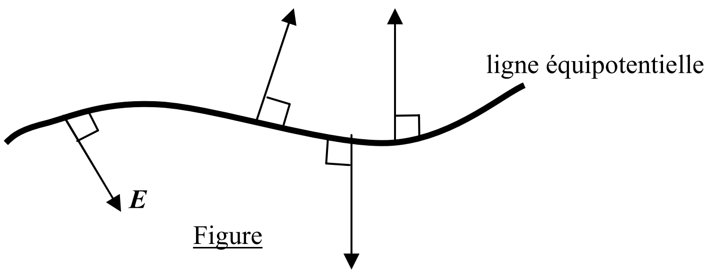
Figure

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}V=-\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{u_x}-\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{u_y}-\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{u_z}$$

Comme $\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}=0$ donc $\boldsymbol{E}=-\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{u_z}$

Le champ électrostatique est perpendiculaire à la surface équipotentielle.

Ligne équipotentielle :



Figure

IX. THEOREME DE GAUSS

1. Flux électrique

Flux électrique : $\Phi_e=\int \boldsymbol{E}.\boldsymbol{ds}$

Flux magnétique : $\Phi_m=\int \boldsymbol{B}.\boldsymbol{ds}$

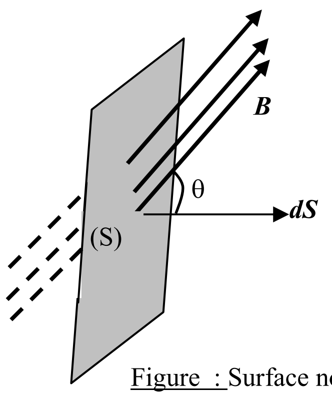


Figure : Surface non fermée

Surface non fermée

$$\int \boldsymbol{E}.\boldsymbol{ds}=\int E ds\cos\theta$$

Surface fermée

Surface globale = surface S_1 (base s + surface S_2 (base inférieure) + surface latérale S_3.

$$\Phi_e=\int_{S_1}\boldsymbol{E}.\boldsymbol{dS_1}+\int_{S_2}\boldsymbol{E}.\boldsymbol{dS_2}+\int_{S_3}\boldsymbol{E}.\boldsymbol{dS_3}$$

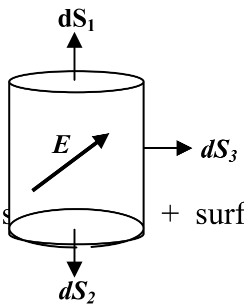


Figure : Surface fermée

Remarques:

- Les vecteurs ***dS*** relatifs à la surface fermée sont perpendiculaires à la surface considérée et sortants.
- Quand le flux est positif, il est « sortant ». Quand il est négatif, le flux est « entrant ».
- La notion de « flux » ne signifie pas vraiment qu'il y a un mouvement de quelque chose à travers la surface.

2. Théorème de Gauss

$$\Phi_e=\oint \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dS}=\oint \mathrm{EdS}\cos\theta=\oint\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dS\cos\theta=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{dS\cos\theta}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\Omega$$

$d\Omega$: Angle solide sous lequel on voit dS à partir de q (cône).

Pour une surface fermée $\oint d\Omega=4\pi$

On obtient alors

$$\Phi_e=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

Donc $\oint \boldsymbol{E}.\boldsymbol{ds}=\frac{q}{\varepsilon}$

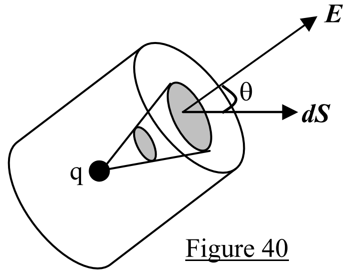


Figure 40

Théorème de Gauss:

Le flux électrique à travers une surface fermée quelconque est égal au rapport q/ε_0, où q représente la somme des charges se trouvant à l'intérieur de cette surface.

Autre démonstration (plus simple) :

On considère comme surface fermée une sphère de rayon r.

les vecteurs ***E*** et ***dS*** sont tous les deux radiaux

Donc : $\varphi=\oint \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dS}=\oint EdS=\oint\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dS$

comme r est constant sur toute la surface de la sphère :

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint dS=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}4\pi r^2=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

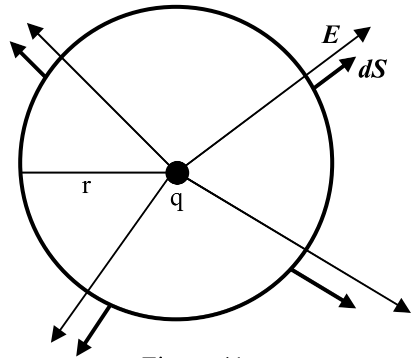


Figure 41

Cas général :

Les charges se trouvant à l'extérieur de la surface fermée ne sont pas considérées dans le théorème de Gauss.

$$\varphi=\oint \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dS}=\frac{q_1}{\varepsilon_0}+\frac{q_2}{\varepsilon_0}+...+\frac{q_n}{\varepsilon_0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

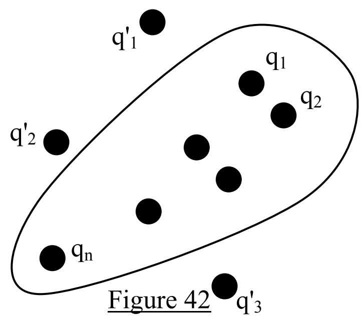


Figure 42

Forme différentielle :

$\Phi_e=\oint \boldsymbol{E}.\boldsymbol{ds}=\int_V div\boldsymbol{E}\, dv$;

si la charge est uniformément répartie dans un volume V on pose :

$q=\int_V \rho_v\, dv$

où ρ_v densité de charge volumique

D'où $\int_V div\boldsymbol{E}\, dv=\frac{q}{\varepsilon_0}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_v\, dv$

Soit donc, $div\boldsymbol{E}=\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$

Exercice : *Champ d'une charge ponctuelle*
On choisit comme surface fermée une sphère de rayon r. La surface de Gauss doit respecter la symétrie du problème, le champ en tout point de la surface doit être constant.

Exercice :
On considère une sphère de rayon R possédant une charge superficielle q de densité ρ_s. Déterminer le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

Exercice :
Déterminer le champ électrique produit par un filament rectiligne possédant une charge uniforme de densité ρ, en utilisant le théorème de Gauss.

3. Equations de Laplace et de Poisson

$$div\mathbf{E}=div(-gradV)=\Delta.(-\Delta V)=-\Delta^2 V=\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$$

Soit $\Delta^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$ (Relation de Poisson)

Si $\rho_v=0$: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$ (Equation de Laplace)

Exercice :
Utiliser l'équation de Laplace pour déterminer la distribution du potentiel et le champ électrostatique dans la région située entre deux plans parallèles portés aux potentiels V_1 et V_2 ($V_1>V_2$).

Exercice :
Résoudre l'exercice précédent, en considérant qu'il existe une charge volumique de densité ρ_v entre les deux plans.

X. CAPACITE- CONDENSATEUR

1. Conducteur unique

$C = q\ /V$

C : capacité du conducteur ; q: charge du conducteur ; V: potentiel du conducteur

Unité : [C] = C / V ;

En général on utilise comme unité le Farad et ses sous multiples

[C]=Farad F

Exemple: Sphère chargée (que ce soit en volume ou en surface)

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\Rightarrow C=4\pi\varepsilon_0 R$$

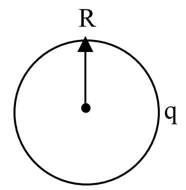


Figure 47

2. Deux conducteurs (condensateur) :

Si V_1 et V_2 sont les potentiels de ces conducteurs, la capacité du système est définie par : $C=\frac{Q}{V_1-V_2}$.

Tout système constitué de deux conducteurs quelconques séparés par un isolant est un condensateur.
La capacité du condensateur est $C = q / U$.
où $U = V_1 – V_2$ représente la d.d.p entre les deux conducteurs.
V_1, V_2 potentiels des deux conducteurs.
Les condensateurs les plus connus sont :

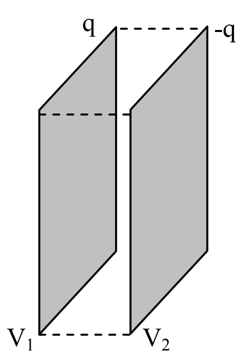


Figure : Condensateur plan

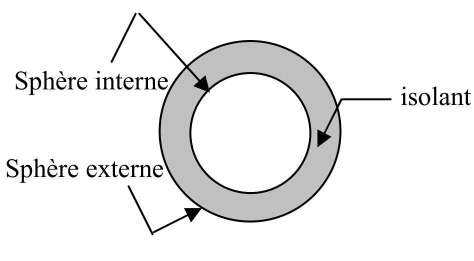


Figure : Condensateur sphérique

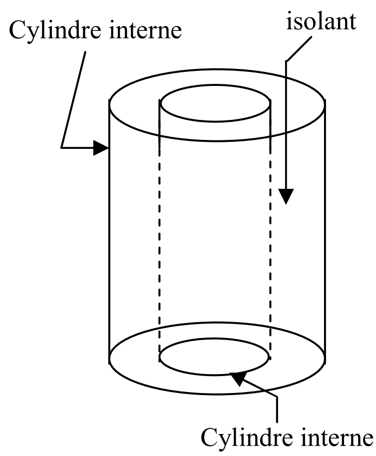


Figure : Condensateur cylindrique

Remarques :

- Les deux armatures portent des charges Q égales mais opposées. Q est la charge du condensateur.
- La capacité est indépendante de la tension et de la charge : elle constitue seulement le facteur de proportionnalité (constant) entre les deux. Elle dépend des paramètres géométriques du condensateur.

Exercice : Déterminer la capacité d'un condensateur plan.

Exercice : Calculer la capacité d'un condensateur sphérique de charge Q, constitué de deux armatures sphériques concentriques de rayons R_1 et R_2.

XI. ENERGIE ELECTROSTATIQUE

Soient

q, *V*: charge et potentiel du condensateur à un instant t.

Pour amener une charge supplémentaire *dq* au condensateur, on doit fournir un travail *dW*, afin de vaincre la répulsion des charges existantes.

Rappel $W = -\int \boldsymbol{F.dr} = q\,V$

Si nous apportons une charge supplémentaire *dq*, le travail effectué est :

$dW = V\,dq$

$$dW = -\boldsymbol{F.dr} = V\,dq \Rightarrow W = \int_0^{q_m} V\,dq = \int_0^{q_m} \frac{q}{C}dq = \frac{1}{C}\left(\frac{q^2}{2}\right)_0^{q_m} = \frac{q_m^2}{2C}$$

avec q_m: charge maximale

soit en général :

$$W = \frac{q^2}{2C},$$

ou bien comme $V = q/C$:

$$W = \frac{1}{2}qV.$$

Remarques :

- $W = \frac{1}{2}qV$ est l'énergie emmagasinée par un système (condensateur, ensemble de charges…) suite à un travail fourni.
- $W = qV$ est l'énergie potentielle que possède une charge q dans un potentiel V.

Comme $E = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}$ et $q = \rho_s S$, il vient :

$$W = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(\rho_s S)^2}{\varepsilon_0 \frac{S}{d}} = \frac{1}{2}\frac{\rho_s^2}{\varepsilon_0} S d = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\right)^2 V = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 V$$

avec V volume du condensateur.

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 V$$

Conclusion: le champ électrique emmagasine de l'énergie électrique de densité $w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$.

Autre démonstration :

Considérons une sphère de rayon R qu'on se propose de charger. A un instant donné, supposons que la charge de la sphère est *q*. Le fait de charger la sphère exige un travail *dW*, car pour apporter une charge supplémentaire *dq* il faut vaincre la répulsion de la charge q.

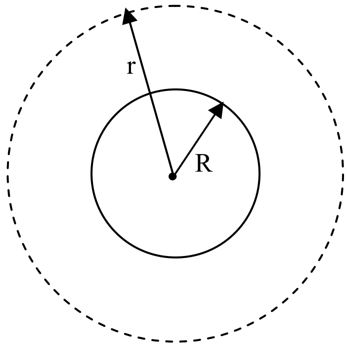
$dW = V\,dq$;

Comme V = q / C,

$dW = \frac{q}{C} dq$.

Le travail fourni pour porter la charge de la sphère de 0 à q_m est :

$$W = \frac{1}{C}\int_0^{q_m} q\,dq = \frac{q_m^2}{2C}$$



Figure

étant donné que $C = 4\,\pi\,\varepsilon_0\,R$, on obtient :

$$W = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\right) (1)$$

Calculons l'intégrale suivante : $\int_R^{\infty} E^2 dV$

Le volume d'une sphère de rayon r est : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Par conséquent : $dV = 4\,\pi\,r^2\,dr$

$$\int_R^{\infty} E^2 dV = \int_R^{\infty}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)\left(4\pi r^2\,dr\right) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0^2}\int_R^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0^2 R}$$

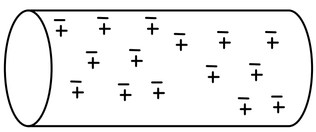
en substituant ce résultat dans l'équation (1), on obtient :

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_R^{\infty} E^2 dV .$$

XII. INTERACTION ENTRE LE CHAMP ELECTRIQUE ET LA MATIERE

1. Conducteur :

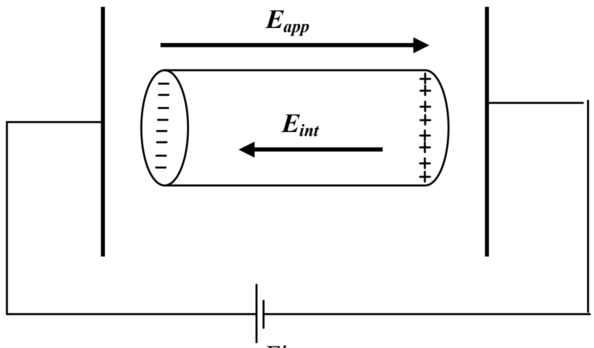
Considérons un conducteur cylindrique placé entre deux plaques métalliques soumises à une tension U. le conducteur est en équilibre électrostatique, c'est-à-dire qu'il ne touche pas les deux électrodes. Autrement, les charges seront mises en mouvement et naîtra un courant. Le conducteur n'est plus en équilibre électrostatique.



pas de champ appliqué

$E_{\text{int}} = 0$

Figure



Figure

$$E_r = E_{app} - E_{\text{int}} = 0$$

E_{app} : champ appliqué externe;
E_{int} : champ interne crée par la nouvelle répartition de charges ;
E_r : champ résultant

Dans un conducteur les électrons sont libres de mouvement. Dés qu'on applique un champ électrique, les électrons se déplacent sous l'action de ce champ, il en résulte une nouvelle distribution de charges qui donne naissance à un champ interne qui annule le champ appliqué.

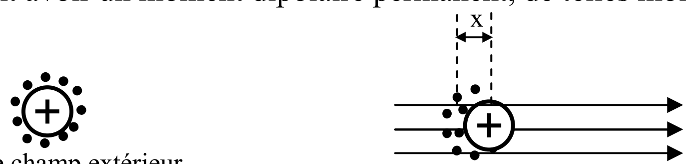
Conclusion : le champ électrique dans un conducteur en équilibre est nul.

2. Isolant (diélectrique) :

Polarisation électrique :

Dans un atome, les centres de gravité du noyau et des électrons coïncident, par conséquent le moment dipolaire moyen de l'atome est nul (Figure). Par contre après l'application d'un champ électrique externe, le centre de gravité des électrons est déplacé d'une certaine distance *x* par rapport au noyau : l'atome est alors polarisé et devient un dipôle électrique de moment ***p*** (Figure 61). Dans chaque atome est crée un champ E_p de sens opposé au champ appliqué.

Les molécules peuvent avoir un moment dipolaire permanent, de telles molécules sont dites *polaires*.



Pas de champ extérieur

Présence d'un champ extérieur

Figure

Les électrons dans l'isolant sont liés aux atomes. Quand on applique un champ électrique, les électrons ne se libèrent pas mais sont légèrement déplacés par rapport au centre de gravité de l'atome, c'est la polarisation.

E_p est appelé champ de polarisation (E_p <<)

$E_r = E_{app} - \sum E_p$ diminue légèrement mais ne s'annule pas.

Conclusion

Le champ électrique passe à travers un isolant et s'annule dans le conducteur.

Dans le vide $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Dans un diélectrique matériel : $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_r \varepsilon_0 r^2}$

La polarisation fait diminuer E dans le diélectrique matériel car $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \rangle \varepsilon_0$

$\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ > 1 : permittivité relative ; ε permittivité du verre.

FORMULAIRE D'ELECTROSTATIQUE

- Charges :

  Ponctuelles : Q [C] ; linéiques : λ [C/m]
  Surfaciques : σ [C/m^2] ; volumiques : ρ [C/m^3]

- Champs : ***D*** Déplacement ou Induction électrique [C/m^2]
  E Champ électrique [V/m].
  $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$

- Loi de Coulomb :
  $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$;

  Charge ponctuelle : $\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{u}$ et $V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

- Lois de base :

  $div\boldsymbol{D}=\rho$ ou $\oint\boldsymbol{E}.\boldsymbol{dS}=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

  $rot\boldsymbol{E}=0$ ou $\oint\boldsymbol{E}.\boldsymbol{dl}=0$

- Potentiel :
  $V=-\int\boldsymbol{E}.\boldsymbol{dl}$; $dV=-\boldsymbol{E}.\boldsymbol{dl}$; $\boldsymbol{E}=-gradV=-\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{u_x}-\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{u_y}-\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{u_z}$
- Tension :
  $U_{AB}=V_A-V_B=\int_A^B\boldsymbol{E}.\boldsymbol{dl}$
- Travail :
  $W_{BA}=qU_{AB}$
- Capacité :
  $C=\frac{q}{U}$
- Densité d'énergie électrique : $w=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$.