# CHAPITRE II

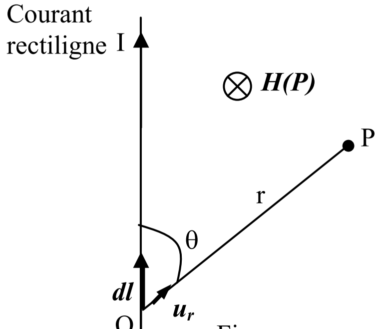
# MAGNETOSTATIQUE

- Une charge électrique immobile crée un champ électrique seulement;
- Une charge en mouvement (un courant) crée un champ électrique et un champ magnétique.

Définition : la magnétostatique est l'étude des phénomènes magnétiques statiques, générés par des courants constants uniquement (courant continu).

## I. LOI D'AMPERE

Le physicien danois Hans C. Oersted (1777 – 1851), en remarquant la déviation d'une boussole placée prés d'un conducteur traversé par un courant, fut le premier à observer le magnétisme crée par un courant électrique.



Figure

Conducteur rectiligne

$$\boxed{\boldsymbol{H}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I\,\boldsymbol{dl}\wedge\boldsymbol{u_r}}{4\pi r^2}\ ;}$$

***H*** : champ magnétique

r = OP ; $\boldsymbol{u_r}$: vecteur unitaire de r

$$\boxed{\boldsymbol{B}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_0 I\ \boldsymbol{dl}\wedge\boldsymbol{u_r}}{4\pi\ r^2}}$$

***B*** : Induction magnétique

Remarque : La loi d'Ampère est valable si l'on suppose que le conducteur est infiniment long, donc les bornes de l'intégrale sont de -∞ à +∞.

Conducteur fermé :

$$\boxed{\boldsymbol{B}=\oint\frac{\mu_0 I\ \boldsymbol{dl}\wedge\boldsymbol{u_r}}{4\pi\ r^2}}$$

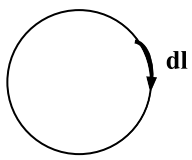


Figure : Courant circulaire

Avec

$\mu_0$ perméabilité magnétique (vide, air…) : $\mu_0 = 4\,\pi.10^{-7}\quad H/m$

$B = \mu_0 H$

Unités

$[B] = Tesla\quad T$ ; $[H] = \dfrac{A}{m}$

Cas d'un courant volumique :

**J** densité de courant (A/m$^2$) ;

$J = I / S$,

soit $I = J\,S$,

ou bien plus généralement :

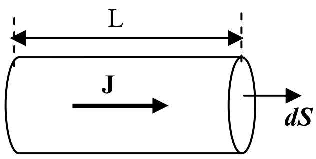


Figure : Conducteur volumique

$I=\int \mathbf{J.dS} \Rightarrow \mathbf{Idl}=\int \mathbf{J.dSdl}=JSdl=JdV$

Le champ magnétique d'un courant cylindrique (volumique) est donné par :

$$\boxed{\mathbf{H}=\int \frac{\mathbf{J}\wedge\mathbf{u_r}}{4\pi r^2}dv}$$

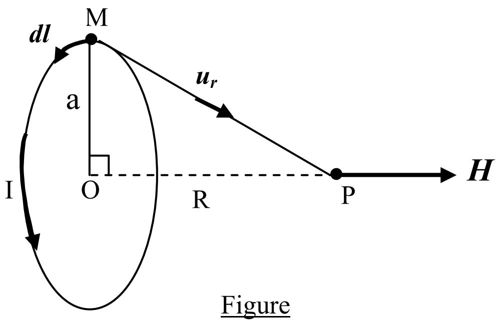
soit donc : $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}=\mu_0\int \frac{\mathbf{J}\wedge\mathbf{u_r}}{4\pi r^2}dv$

**EXERCICE** *(Champ magnétique crée par un courant rectiligne)*
Calculer le champ magnétique $\boldsymbol{H}$ produit par un courant rectiligne infiniment long.
**EXERCICE** (Champ magnétique crée par une spire)
Soit une spire circulaire de rayon « *a* » traversée par un courant I.
Déterminer le champ magnétique $\boldsymbol{H}$ dans un point P situé sur l'axe de la spire.

**Solution :**
On obtient :

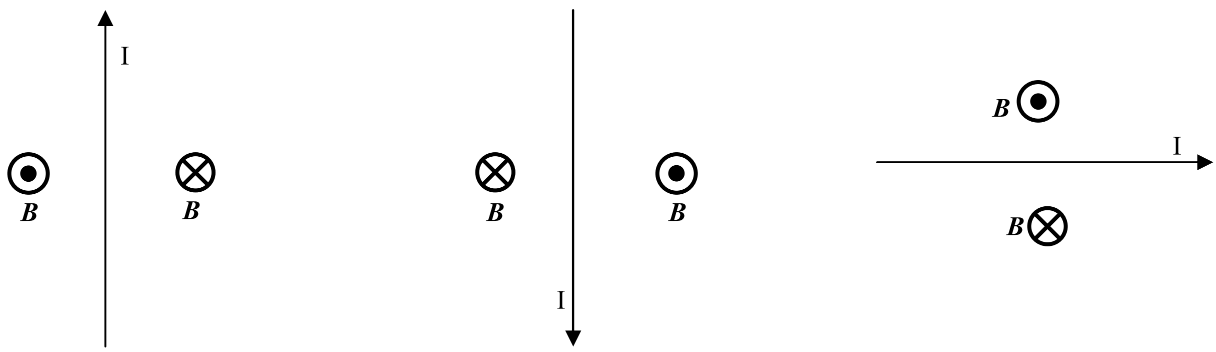
$$\boldsymbol{H}=\frac{Ia^2}{2\left(a^2+R^2\right)^{3/2}}\boldsymbol{u}$$

$$H_{\max}(R=0)=\frac{I}{2a}$$

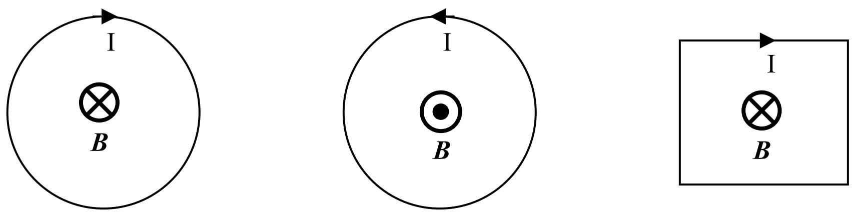


Figure

**II. DIRECTION DU CHAMP MAGNETIQUE (Règle de la main droite)**
**a) Fil rectiligne :** (Règle de la main droite)

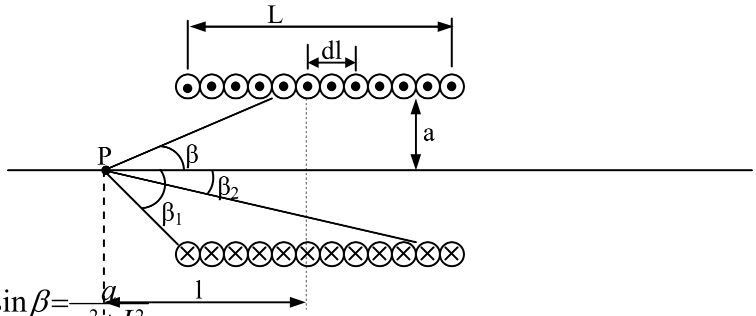



**b) Spire :** (Règle du tournevis)




**EXERCICE**
Un solénoïde est un courant formé de plusieurs spires circulaires coaxiales, de même rayon traversé par un même courant.
**Solution :**
Le champ sur l'axe du solénoïde peur être calculé en additionnant le champ crée par chaque spire.
A la figure ci-dessous est représentée une coupe longitudinale dans le solénoïde.
Si N est le nombre total des spires, le nombre des spires d'une partie *dl* est égal à $\frac{N}{L}dl$ .
Rappelons que le champ produit au point P par une spire est :

$$B=\frac{\mu_0 I a^2}{2\left(a^2+L^2\right)^{3/2}}$$



Figure

$\frac{N}{L}dl$ Spires produisent l'induction

$$dB=\left[\frac{\mu_0 I a^2}{2\left(a^2+L^2\right)^{3/2}}\right]\frac{N}{L}dl=\frac{\mu_0 IN}{2L}\frac{a^2 dl}{\left(a^2+L^2\right)^{3/2}}$$

D'après la figure, on peut écrire : $\frac{a}{L}=tg\beta$ et $\sin\beta=\frac{a}{a^2+L^2}$

soit, $L=\frac{a}{tg\beta}\Rightarrow dl=-\frac{a}{\sin^2\beta}d\beta$

en substituant ces équations dans l'expression de $dB$, on obtient :

$$dB=\frac{\mu_0 IN}{2L}\left(-\sin\beta\, d\beta\right)$$

$$B=\frac{\mu_0 IN}{2L}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\left(-\sin\beta\, d\beta\right)=\frac{\mu_0 IN}{2L}\left(\cos\beta_2-\cos\beta_1\right)$$

Si le solénoïde est très long, nous avons en un point du centre $\beta_1\approx\pi$ et, soit :

$$B=\frac{\mu_0 IN}{L}$$

Pour un point situé à l'extérieur, sur l'une des extrémités, $\beta\approx\pi/2$ et $\beta_2\approx 0$ ou $\beta_1\approx\pi$ et $\beta_2\approx\pi/2$,

soit : $B=\frac{\mu_0 IN}{2L}$

soit la moitié de la valeur au centre.

*Remarque : le solénoïde est utilisé pour produire un champ magnétique passablement homogène dans une région limitée de son centre.*

## III. POTENTIEL MAGNETIQUE

Comme q est un scalaire, qui produit un potentiel électrique scalaire V ;
Par analogie avec l'électrostatique :
L'élément ***Idl*** est un vecteur, produit un potentiel magnétique vectoriel **A**.

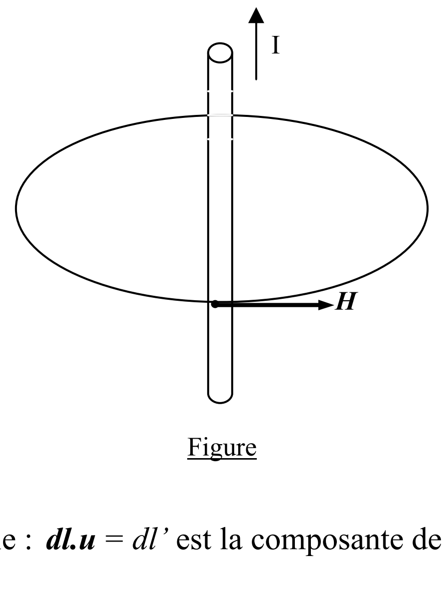
$\boldsymbol{B}=rot\boldsymbol{A}$

$$\boxed{\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{J}}{r}dV}$$

qui représente l'expression du potentiel $\boldsymbol{A}$.

## IV. THEOREME D'AMPERE

### 1. Théorème d'Ampère :



Figure

$\oint\boldsymbol{H.dl}=?$

$$\boldsymbol{H}=\frac{I}{2\pi r}\boldsymbol{u}$$

$$\oint\boldsymbol{H.dl}=\oint\frac{I}{2\pi r}\boldsymbol{u.dl}$$

Rappel :

$$\boldsymbol{A.u_x}=\left(A_x\boldsymbol{u_x}+A_y\boldsymbol{u_y}+A_z\boldsymbol{u_z}\right)\boldsymbol{u_x}=A_x$$

soit donc, la composante de $\boldsymbol{A}$ suivant l'axe des x. Par analogie : $\boldsymbol{dl.u}=dl'$ est la composante de $\boldsymbol{dl}$ suivant $\boldsymbol{u}$.
Comme par ailleurs, $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{u_r}$, soit $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{r}$, donc aussi $dl'\perp r$ ;
$dl'$ représente donc un arc de cercle de rayon r $\Rightarrow$ $dl'=r\,d\theta$

Par conséquent :

$$\oint \boldsymbol{H.dl} = \oint H dl = \frac{I}{2\pi}\oint \frac{r\,d\theta}{r} = \frac{I}{2\pi}\oint d\theta = \frac{I}{2\pi}\theta\Big)_0^{2\pi} = I$$

Donc $\oint \boldsymbol{H.dl} = I$

qui représente le théorème d'Ampère.

Remarque importante : I est un courant circulant à l'intérieur du contour fermé.

### 2. Forme différentielle :

$\oint \boldsymbol{H.dl} = I$ est la forme intégrale du théorème d'Ampère.

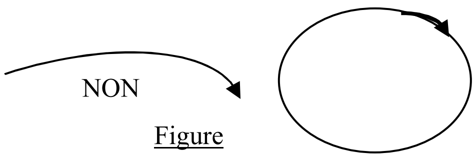
Comme $\oint \boldsymbol{H.dl} = \int_S rot\boldsymbol{H.dS}$

et que $I = \int_S \boldsymbol{J.dS}$ ,

On peut écrire : $\int_S rotH.dS = \int_S \boldsymbol{J.dS}$

Soit donc : $\boxed{rot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}}$ qui représente la forme différentielle du théorème d'Ampère.

Conclusion : *$rot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ implique que le champ magnétique est rotationnel, c'est à dire que les lignes de champ sont fermées, contrairement aux lignes de champ électrique.*

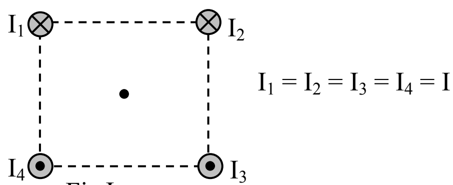



Figure

Remarque :
- Les lignes de champ magnétique sont des courbes fermées car contrairement au champ électrique qui a pour source des charges électriques (part de la charge positive et arrive à la charge négative), il n'y a pas de *charges magnétiques.*

**EXERCICE**

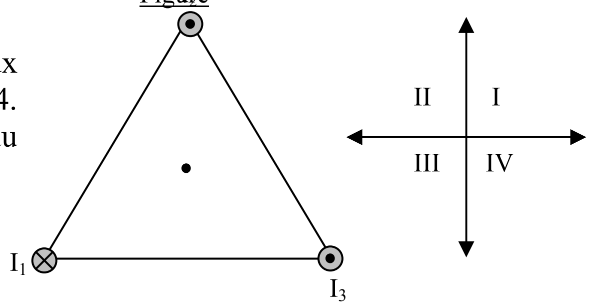
On considère quatre conducteurs traversés chacun par un même courant I (figure). Quelle est la direction du champ magnétique au point P, centre du carré de coté *d*.




Figure

**EXERCICE**

Trois fils conducteurs portant un même courant, sont situés aux coins d'un triangle équilatéral, comme montré à la figure 14. Dans quel cadran trigonométrique se trouve la direction du champ magnétique résultant au centre de la triangle?




Figure

**EXERCICE**

Déterminer le champ magnétique ***H*** à l'intérieur et à l'extérieur d'un conducteur cylindrique plein traversé par un courant *I*, de densité uniforme *J*.

**EXERCICE**

Utiliser le théorème d'Ampère pour calculer le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde comprenant $n_0$ spires par unité de longueur et parcouru par un courant $I_0$.

**Solution :**

Pratiquement une bobine formée d'un fil conducteur enroulé suivant une hélice de petit pas est un solénoïde. Par conséquent, à l'intérieur loin des extrémités de la bobine, les lignes d'induction sont sensiblement parallèles à l'axe (le champ crée par chaque spire étant perpendiculaire à son plan) ; le champ est donc uniforme.

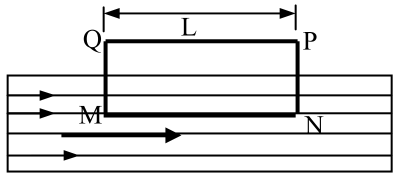
Choisissons un contour fermé MNPQ pour pouvoir appliquer le théorème d'Ampère.
L'application du théorème d'Ampère sur ce contour donne :

$\oint H.dl = \sum I$

$\oint H.dl = H.MN + H.NP + H.PQ + H.QM = H.MN = HL$

$\boldsymbol{H} \, . \, \boldsymbol{QM} = 0$ et $\boldsymbol{H} \, . \, \boldsymbol{PN} = 0$ car $\boldsymbol{H} \perp \boldsymbol{QM}$ et $\boldsymbol{H} \perp \boldsymbol{PN}$

$\boldsymbol{H} \, . \, \boldsymbol{QP} = 0$ car à l'extérieur $H \approx 0$.




Figure

D'autre part, $\sum I = n_0 L I_0$

$n_0$ : nombre de spires / mètre.

d'où $H = n_0 I_0$

$B = \mu_0 n_0 I_0$ est l'induction à l'intérieur du solénoïde.

**EXERCICE**

On considère une bobine torique de n spires traversée par un courant statique I. Déterminer le sens, la direction et la valeur du champ magnétique crée à l'intérieur de la bobine.

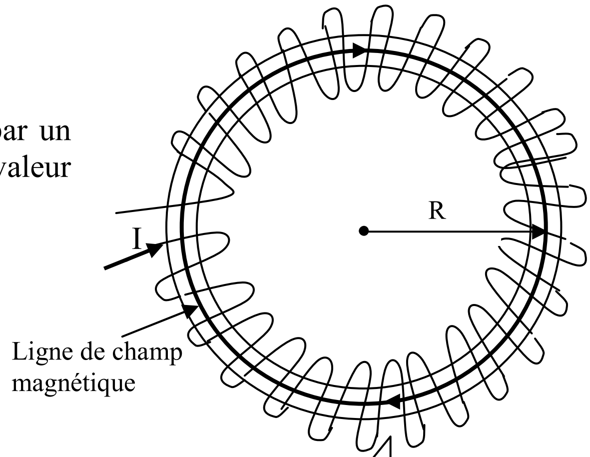
**Solution :**

Le champ étant perpendiculaire aux spires, c'est donc un cercle passant par le centre de chaque spire, dont le centre coïncide avec celui de la bobine.

$\oint H dl = nI \Rightarrow$

$H \oint dl = H \, 2\pi r = HL = nI$ avec $L = 2\pi r$

d'où $H = \dfrac{nI}{L}$




Figure

## IV. FLUX MAGNETIQUE

$\Phi_m = \int \boldsymbol{B.dS}$ ;

Unité $[\Phi_m] = Weber \; Wb$ ;

a) Surface non fermée

*Flux:* représente la quantité de lignes de champ passant à travers la surface.

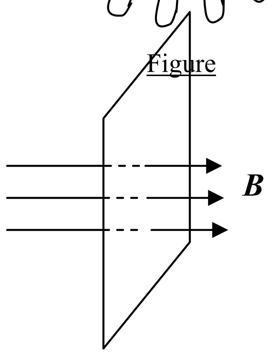



Figure : Surface non fermée

b) Surface fermée

$\oint \boldsymbol{B.dS} = \int div\mathbf{B} \, dV = \int div(rot\mathbf{A}) dV = 0$ ; car $\boldsymbol{B} = rot\boldsymbol{A}$

$$\boxed{\oint \boldsymbol{B.dS} = 0}$$

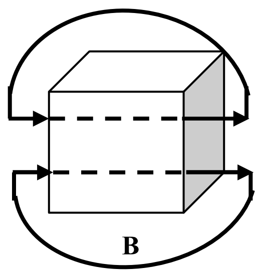



Figure : Surface fermée

**Forme différentielle :**

$\oint \boldsymbol{B}.\boldsymbol{dS}=0$ est la forme intégrale de cette loi.

$\oint \boldsymbol{B}.\boldsymbol{dS}=\int div\boldsymbol{B}\, dv=0 \Rightarrow div\boldsymbol{B}=0$

$\boxed{div\,\boldsymbol{B}=0}$ est la forme différentielle.

## V. FORCE MAGNETIQUE

### 1. Force de Lorentz :

Une charge électrique animée d'une vitesse $\boldsymbol{v}$ et placée dans un champ électrique et magnétique, subit la force suivante :

$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B})$ ;

$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F_e}+\boldsymbol{F_m}$

avec :

$\boldsymbol{F_e}=q\boldsymbol{E}$ est la Force électrique;

Si $q=0 \Rightarrow F_e=0$

*La force électrique s'annule si la charge est nulle.*

$\boldsymbol{F_m}=q(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B})$ est la Force magnétique.

La force magnétique s'annule si la charge est nulle ou immobile.

*L'induction magnétique n'exerce de force que sur une particule chargée en mouvement (ou un courant).*

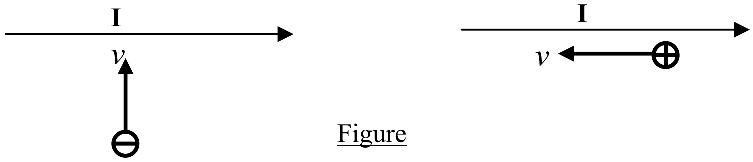
Conclusion:

*La force magnétique n'agit que sur une charge en mouvement, ou un conducteur traversé par un courant.*

**EXERCICE**

Un fil conducteur est traversé par un courant (figure 5). Quelle est la direction de la force appliquée sur :

- un électron se déplaçant vers le fil ;
- un proton se déplaçant parallèlement au fil (fig. a). Supposez que l'électron et le proton se déplacent dans le plan du papier.




Figure

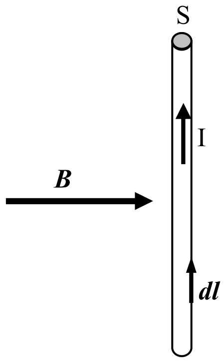
### 2. Force de Laplace :

Considérons un conducteur cylindrique traversé par un courant I.

Soient :

n' : nombre de particules chargées traversant le conducteur;

e : charge élémentaire d'une particule.




Figure

La charge traversant le conducteur vaut alors :

$q=n'e$

En posant $n=\frac{n'}{V}$

$n$ : nombre de particules/unité de volume ;

$V$ : volume du conducteur.

On obtient :

$$I=\frac{dq}{dt}=\frac{d}{dt}(n'e)=\frac{d}{dt}(neV)=ne\frac{dV}{dt}=neS\frac{dl}{dt}=neSv$$ ;

avec

$v$ : vitesse de déplacement des particules.

Par conséquent :

$$J=\frac{I}{S}=\frac{neSv}{S}=nev \Rightarrow J=nev$$

Cette égalité est également valable en notation vectorielle :

$$\boxed{\boldsymbol{J}=ne\boldsymbol{v}}$$

D'un autre côté, en reportant dans la loi de Lorentz la charge par unité de volume $q=ne$, on obtient :

$$\boldsymbol{F_m}=q(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B})=ne\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}=\boldsymbol{J}\wedge\boldsymbol{B}$$

<u>Pour un volume élémentaire</u> $dV$ :

$$d\boldsymbol{F_m}=(\boldsymbol{J}\wedge\boldsymbol{B})dV$$

<u>pour tout le volume V :</u>

$$\boldsymbol{F_m}=\int(\boldsymbol{J}\wedge\boldsymbol{B})dV=\int(\boldsymbol{J}dV\wedge\boldsymbol{B})$$

Comme $\boldsymbol{J}dV=I\boldsymbol{dl}$, on aboutit à l'expression de la *Force de Laplace*: $\boxed{\boldsymbol{F_m}=\int I\boldsymbol{dl}\wedge\boldsymbol{B}}$

<u>Remarque</u> :

Si I = 0 $\Rightarrow$ $F_m=0$

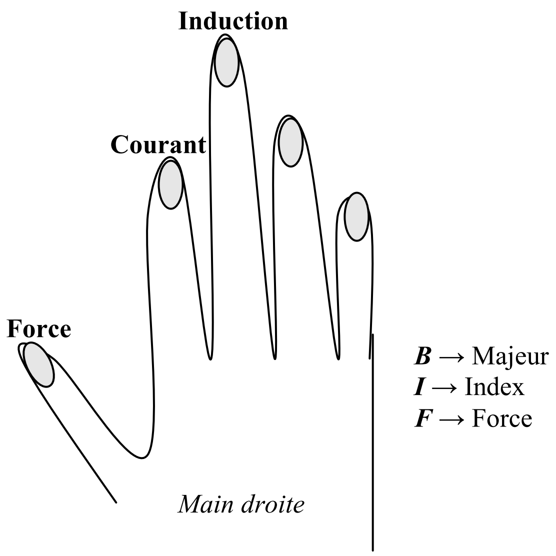
*La force magnétique n'agit donc que sur un conducteur traversé par un courant.*

**EXERCICE**

Soient deux (2) conducteurs rectilignes identiques, parallèles et traversés par les courants $I_1$ et $I_2$ ($I_1$ = 10 A ; $I_2$ = 5 A)..

Calculer la force magnétique $\boldsymbol{F_1}$ exercée sur le conducteur 1 et $\boldsymbol{F_2}$ exercée sur le conducteur 2.

<u>Remarque :</u> Le sens de la force est déterminé grâce à la règle de la main droite :

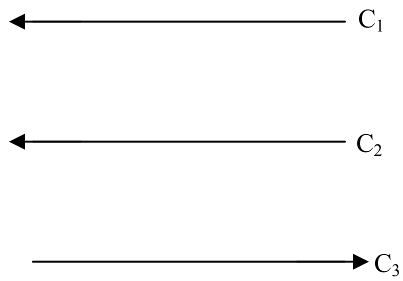



<u>Figure</u>

**EXERCICE**

Si chacun des trois fils de la figure 8 porte le même courant, quelle est la direction de la force appliquée sur chacun des 3 conducteurs par les deux autres (sans calculs).

<u>Conducteur $C_1$</u> :




<u>Figure</u>

**EXERCICE**

Une spire carrée de côté *a* parcourue par un courant *I* est placée dans une induction magnétique B perpendiculaire (Figure 14). La spire peut tourner autour d'un axe Δ.

1) Calculer et représenter les forces agissant sur les côtés MN, PQ, MQ et NP de la spire.
2) En déduire le couple magnétique agissant sur la spire.

## VII. ENERGIE MAGNETIQUE $W_m$

On considère l'exemple d'une bobine torique comprenant n spires.
Déterminer l'énergie emmagasinée quand le courant dans la bobine croit de 0 à I.
Considérons un circuit formé par une inductance.

A l'instant *t* nous avons : $U=L\frac{dI}{dt}$

En multipliant les deux membres par i dt de façon à faire apparaître les énergies mises en jeu pendant dt :

$Uidt=Lidi=d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$

Le terme *U i dt* représente l'énergie fournie par le générateur, le terme $dW=d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$ correspond à l'énergie fournie pour établir le courant i, énergie emmagasinée dans l'inductance.

Démonstration :

Par analogie avec l'électrostatique où la densité de l'énergie électrostatique $w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$, démontrer que la densité de l'énergie magnétique est $w_m=\frac{1}{2}\mu_0H^2$.

Considérons pour cela un tube élémentaire d'induction

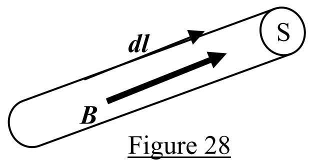


Figure 28

Posons
$dV = S\,dl$
L'énergie magnétique localisée dans l'élément de volume *dV* est :

$dW=\frac{1}{2}\pi_0H^2dV=\frac{1}{2}\pi_0H^2Sdl$

En tenant compte que le flux d'induction est constant dans le tube : $\Phi=\int \boldsymbol{B.dS}=B.S$

et du théorème d'Ampère : $\oint \boldsymbol{H.dl}=I$,

on obtient :

$W=\frac{1}{2\pi_0}B^2Sdl=\frac{1}{2\pi_0}BS\int Bdl=\frac{1}{2}BS\int Hdl=\frac{1}{2}\Phi I$

Comme
$\Phi = L\,I$
$W=\frac{1}{2}\Phi I=\frac{1}{2}LI^2$

Conclusion : le champ magnétique emmagasine bien une énergie de densité $w_m = ½\,\mu_0 H^2$.

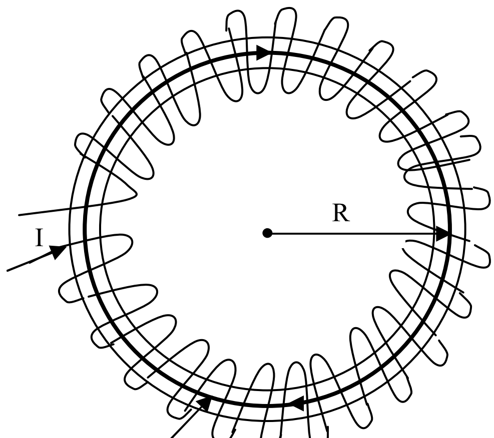
**Autre démonstration :**

Soit U la tension appliquée,
Le travail fourni

$W=-\int UIdt$ ;

Or $U=-n\frac{d\varphi}{dt}$

$U=-n\frac{d\varphi}{dt}=-nS\frac{dB}{dt}-\overbrace{\cancel{nB\frac{ds}{dt}}}^{=0}$



Figure

Soit $W=-\int -n\frac{d\varphi}{dt}Idt=n\int Id\varphi$

$W=\int_0^B nISdB=nIS\int_0^H \mu_0\, dH=nIS\mu_0\int_0^H dH$

Comme $H=\frac{nI}{L}\Rightarrow I=\frac{LH}{n}$ (Exercice P6).

d'où $W=nS\mu_0\int_0^H \frac{LH}{n}dH=S\mu_0 L\int_0^H HdH=\frac{1}{2}\mu_0 H^2 SL$

avec $V=SL$ volume de la bobine où règne H, on obtient :

$W_m=\frac{1}{2}\mu_0 H^2 V$ [J],

est l'énergie totale emmagasinée dans le champ magnétique **H**.

$w_m=\frac{1}{2}\mu_0 H^2$ [J/m$^3$]

est la densité d'énergie magnétique.

## VIII. RESUME DES LOIS DU REGIME STATIONNAIRE

**1.** Théorème de Gauss

$\oint \boldsymbol{E.dS}=\frac{q}{\varepsilon_0}$ ; $div\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

**2.** $\oint \boldsymbol{E.dl}=0$ ; $rot\mathbf{E}=0$

**3.** Théorème d'Ampère

$\oint \boldsymbol{H.dl}=I$ ; $rot\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$

**4.** Théorème du Flux Magnétique

$\oint \boldsymbol{B.dS}=0$ ; $div\boldsymbol{B}=0$

## *ANALOGIE ENTRE L'ELECTROSTATIQUE ET LA MAGNETOSTATIQUE*

| ELECTROSTATIQUE | MAGNETOSTATIQUE |
|---|---|
| Loi de Coulomb (champ électrique) | Loi de Biot & Savart (champ magnétique) |
| $q\rightarrow \boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\boldsymbol{u}$ | $\boldsymbol{Idl}\rightarrow \boldsymbol{H}=\oint\frac{I\,\boldsymbol{dl}\wedge\boldsymbol{u_r}}{4\pi r^2}$ |
| Déplacement électrique | Induction magnétique |
| $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ | $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ |
| Potentiel électrique | Potentiel magnétique |
| $V=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}$ | $\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{J}}{r}dv$ |
| $\boldsymbol{E}=-gradV$ | $\boldsymbol{B}=rot\boldsymbol{A}$ |
| $\oint \boldsymbol{E.dl}=0$ | $\oint \boldsymbol{H.dl}=I$ |
| $rot\boldsymbol{E}=0$ | $rot\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$ |
| $\oint \boldsymbol{E.dS}=\frac{q}{\varepsilon}$ | $\oint \boldsymbol{B.dS}=0$ |
| $div\boldsymbol{E}=\frac{\rho_v}{\varepsilon}$ | $div\boldsymbol{B}=0$ |
| $w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$ | $w_m=\frac{1}{2}\mu H^2$ |
| $E=0$ dans un conducteur | $H\neq 0$ dans le conducteur |