Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès. — Semestre-4
Faculté des Sciences de l'Ingénieur. — Chapitres N° 3 et N° 4
2ème Année L.M.D-Sciences & Techniques. — Fiche De T.D.° 3

Calcul Des Résidus. Développement De Laurent. Applications Aux Intégrales.

Exercice 1

1. Montrer que si f est une fonction paire, alors $\mathscr{R}es(f,-a)=-\mathscr{R}es(f,a)$.
   Si f est une fonction paire, que vaut alors $\mathscr{R}es(f,0)$?
2. Montrer que si f est une fonction impaire, alors $\mathscr{R}es(f,-a)=\mathscr{R}es(f,a)$.
3. Montrer que si $f(\overline{z})=\overline{f(z)}$, alors $\mathscr{R}es(f,\overline{a})=\overline{\mathscr{R}es(f,a)}$.

Exercice 2

Calculer les résidus suivants :

$$\mathscr{R}es\left(\frac{1}{z^4-1},1\right),\quad \mathscr{R}es\left(\frac{1}{z^4-1},0\right),\quad \mathscr{R}es\left(\frac{1}{z^2(z+1)^3},0\right),\quad \mathscr{R}es\left(\frac{1}{z^2(z+1)^3},-1\right),$$

$$\mathscr{R}es\left(\frac{\operatorname{tg} z-z}{(1-\cos z)^2},0\right),\quad \mathscr{R}es\left(\frac{z^3}{\sin(1/z^2)},0\right),\quad \mathscr{R}es\left(\frac{\sin^3 z\sin(1/z)}{\cos^7 z},0\right),\quad \mathscr{R}es\left(\frac{z^5}{z^4-\sin^4 z},\infty\right).$$

Exercice 3

Donner le développement en série de Laurent de : $f(z)=\dfrac{5z+7}{(3z+1)(2z-5)}$, dans chacun des ensembles ;

$\mathscr{A}=\{z\in\mathbb{C},\ /\ 1/3<|z|<5/2\}$, $\mathscr{B}=\{z\in\mathbb{C},\ /\ |z|<1/3\}$, $\mathscr{C}=\{z\in\mathbb{C},\ /\ |z|>5/2\}$.

Exercice 4

Déterminer le développement en série de Laurent des fonctions suivantes au voisinage des singularités indiquées. Donner le résidu en chaque singularité.

$$f(z)=\frac{e^z}{(z+1)^2},\ z_0=-1.\qquad g(z)=\frac{\cos z}{z^2},\ z_0=0.\qquad h(z)=\frac{z}{(z+1)(z+3)},\ z_0=-3.$$

$$k(z)=\frac{z+2}{(z+1)^3(z-1)},\ z_0=1.\qquad \ell(z)=(z+2)^2\sin\frac{1}{z+1},\ z_0=-1.$$

Exercice 5

Utiliser le théorème des résidus pour calculer les intégrales suivantes :

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+5x+7},\qquad B=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^4+1)^2},\qquad C=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)}.$$

$$D=\int_0^{\infty}\frac{\cos 5x\ dx}{x^2+1},\qquad E=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\pi x\ dx}{x^2+2x+5},\qquad F=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1)\cos 2x\ dx}{x^2-4x+5}.$$

$$G=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta},\qquad H=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{9+7\cos\theta},\qquad I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta\ d\theta}{3+\cos\theta+2\sin\theta}.$$

$$J=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}},\qquad K=\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}\ dx}{(x+2)(x+4)},\qquad L=\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x^2+4)}.$$

$$M=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{Log} x\ dx}{(x+1)^2},\qquad N=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{Log} x\ dx}{x^2+2x+2},\qquad P=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{Log} x\ dx}{(x^2+1)^2}.$$

Mr Amroun