

Exercice N°1 (4 points)

$\vec{a} = i + 2j - k$ ,  $\vec{b} = 0i - j + k$ ,  $\vec{c} = 2i + j + k$   
 1. Calcul du produit Vectoriel:  $\vec{e} = \vec{b} \wedge \vec{c}$

$$\vec{e} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{e} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \quad (1)$$

2. Calcul du produit scalaire  $\vec{a} \cdot \vec{e}$

$$m = \vec{a} \cdot \vec{e} = (i + 2j - k) \cdot (-2i + 2j + 2k)$$

$$m = -2 + 4 - 2 = 0 \quad (1)$$

Calcul de la valeur de l'angle  $\theta$

$$m = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{e}\| \cdot \cos\theta$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{e}\| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$$

$$\cos\theta = \frac{m}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{e}\|} = \frac{0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{12}}$$

$$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Exercice N°2 (8 points)

$\vec{x}(t) = (2t^2 - t)i$ ,  $\vec{y}(t) = (3t^2 + 2t)j$ ,  $\vec{z}(t) = (-\frac{5}{2}t^2 + 4t)k$

1° a. Les composantes du vecteur vitesse  $\vec{v}_M(t)$

$$\vec{v}_x = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^2 - t)i = (4t - 1)i \quad (0,5)$$

$$\vec{v}_y = \frac{d\vec{y}}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 + 2t)j = (6t + 2)j \quad (0,5)$$

$$\vec{v}_z = \frac{d\vec{z}}{dt} = \frac{d}{dt}(-\frac{5}{2}t^2 + 4t)k = (-5t + 4)k \quad (0,5)$$

1° b. Calcul du module de la vitesse à  $t=1s$

$$\|\vec{v}_M(t)\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (0,5) \quad (1,5)$$

$$\|\vec{v}_M(1)\| = \sqrt{(4-1)^2 + (6+2)^2 + (-5+4)^2} \quad (0,5)$$

$$\|\vec{v}_M(1)\| = \sqrt{3^2 + 8^2 + (-1)^2} = \sqrt{74} \text{ m/s} \quad (0,5)$$

2° a. Les composantes du vecteur accélération  $\vec{a}_M(t)$

$$\vec{a}_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(4t - 1)i = 4i \quad (0,5)$$

$$\vec{a}_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(6t + 2)j = 6j \quad (0,5)$$

$$\vec{a}_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d}{dt}(-5t + 4)k = -5k \quad (0,5)$$

2° b. Calcul du module de l'accélération à  $t=1s$

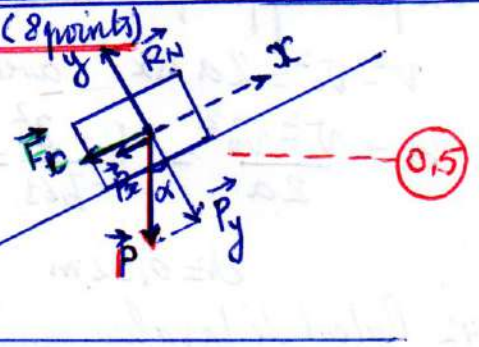
$$a_M(t) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (0,5)$$

$$a_M(1) = \sqrt{4^2 + 6^2 + (-5)^2} = \sqrt{77} \text{ m/s}^2 \quad \checkmark \quad (0,5)$$

$\|\vec{a}_M(t)\|$  est constante et ne dépend pas du temps  $t$

Exercice N°3 (8 points)

1° Représentation des Forces



2° Principe Fondamental de la Dynamique

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \quad (0,5)$$

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}_c = m\vec{a} \quad (1) \quad (0,5)$$

avec  $\vec{P} = P_x + P_y$

$$P_x + P_y + \vec{R}_N + \vec{F}_c = m\vec{a} \quad (1) \quad (0,5)$$

Projection de l'équation (1) sur les axes

$$\bullet \text{Ox: } -P_x - F_c = ma \quad (2) \quad (0,5)$$

$$\bullet \text{Oy: } -P_y + R_N = 0 \quad (3) \quad (0,5)$$

a) Calcul du module de la réaction normale  $R_N$  de l'équation (3)  $\Rightarrow R_N = P_y = mg \cos\alpha$  (0,5)

$$R_N = 5 \times 10 \times \cos 30^\circ = 43,5 \text{ N} \quad (0,5)$$

b. Calcul du module des forces de frottement  $F_c$

$$F_c = \mu_c R_N = \mu_c \cdot mg \cdot \cos\alpha \quad (0,5)$$

$$F_c = 0,3 \times 43,5 = 13,05 \text{ N} \quad (0,5)$$

c. Calcul de la valeur de l'accélération car de l'équation (2) on tire l'expression de  $a$

$$a = -g \sin\alpha - \mu_c g \cos\alpha \quad (0,5)$$

$$a = -g (\sin\alpha + \mu_c \cos\alpha)$$

$$a = -10 (\sin 30 + 0,3 \cos 30)$$

$$a = -7,61 \text{ m/s}^2 \quad (0,5)$$

3° Calcul de la distance d avant que la boîte ne s'arrête.

du fait que c'est un Mouvement Rectiligne varié car il possède une accélération constante  $a = -7,61 \text{ m/s}^2$  on peut appliquer la relation:

$$v^2 - v_0^2 = 2a \Delta x \quad \text{avec } \Delta x = d \quad (0,5)$$

$$d = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - 2^2}{-7,61} = \frac{-4}{-7,61} = 0,52 \text{ m}$$

$$d = 0,52 \text{ m} \quad (0,5)$$

4° Calcul de la valeur minimale de coefficient de frottement statique  $\mu_s$

- Le mouvement de la boîte si il y a se fera suivant l'axe Ox  $\Rightarrow$
- La boîte sera en équilibre.

L'équation ② <sup>s'écrira</sup>  $\Rightarrow -P_x + F_s = 0$   
 $+ mg \sin \alpha = F_s \quad (0,5)$

L'équation ③  $\Rightarrow -P_y + R_N = 0$   
 $R_N = P_y = mg \cos \alpha \quad (0,5)$

$$\mu_s = \frac{F_r}{R_N} = \frac{mg \sin \alpha}{mg \cos \alpha} = \tan \alpha \quad (0,5)$$

$$\mu_s = \tan 30^\circ = 0,577$$