TP 3 : part 1
Réponse en fréquence d'un système - Les filtres.

Il est nécessaire de lire attentivement ce document avant la séance du TP. Si vous auriez des questions notez les.

1. Généralités :

La courbe de réponse en fréquence d'un système est la représentation en fonction de la fréquence de l'amplitude et de la phase par rapport au signal d'entrée.→**Diagramme de Bode**.

1) La courbe de gain : c'est la représentation de la variation de l'amplitude en fonction de la variation de la fréquence du signal d'entrée. Le gain s'exprime en dB.

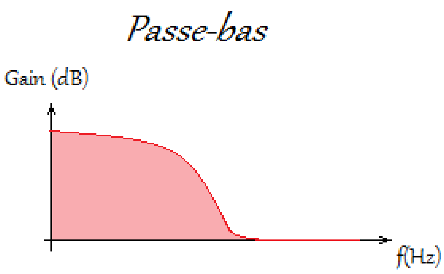
$$G_{dB} = 20\log\left(\frac{S}{E}\right).$$

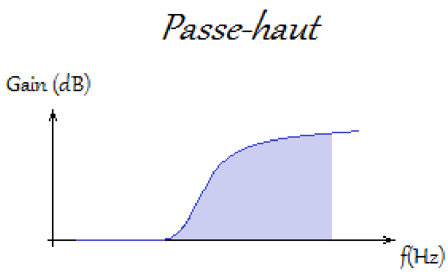
S : $l'amplitudedu\ signal\ de\ sortie.$ E : $l'amplitudedu\ signal\ d'entrée.$

2) La courbe de phase : c'est la représentation du déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée, elle s'exprime en radiant ou en degré. $(2\pi \equiv 360°)$.

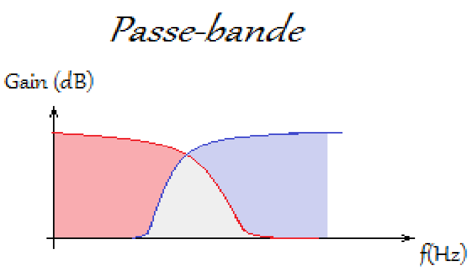
2. Type de filtre

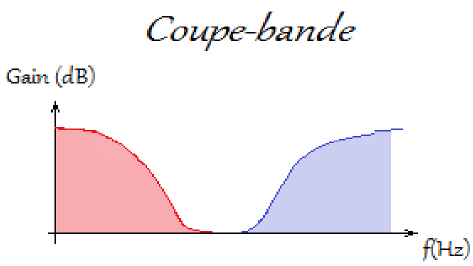
Il existe deux types de filtre : les filtres passent bas et les filtres passent haut.





Leur combinaison engendre : les filtres passent bande et les filtres coupent bande.





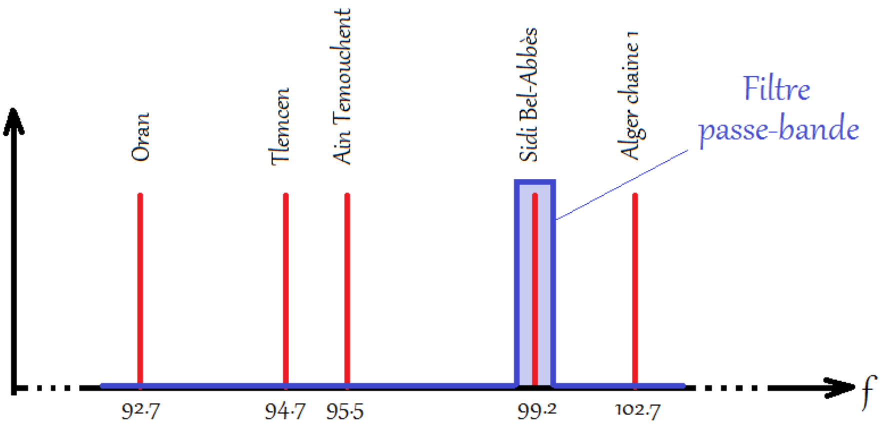
3. Intérêt de la courbe de réponse en fréquence d'un filtre

- Connaitre l'aptitude d'un système à séparer le signal désiré de signaux perturbateurs.
- La détermination de la bande passante d'un système.
- Savoir si le système est apte de reproduire les fréquences souhaitées sur une gamme de fréquences données.
- Connaitre le déphasage introduit par un dispositif en fonction de la fréquence.

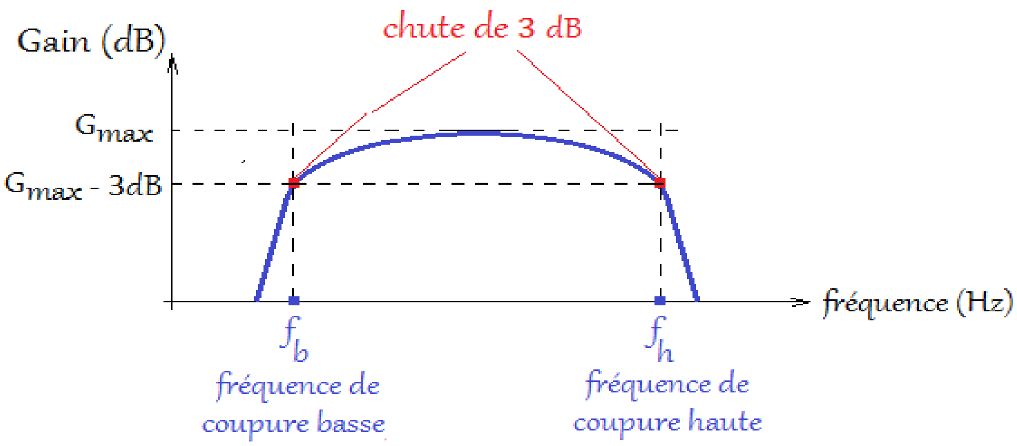
Exemple (je ne rentre pas dans les détails, l'intérêt est juste de rapproché l'idée)

Les stations radio émettent leurs ondes à des fréquences voisines. (Lorsque nous travaillons dans le domaine fréquentiel, ce n'est plus le temps qui est en abscisse, mais la fréquence, ainsi, un signal pur, aura pour représentation dans le domaine fréquentiel, une impulsion ; Pour passer de l'un à l'autre il faut effectuer une transformation de fourrier).

Par exemple : pour écouter la radio de Sidi Bel-Abbès : 99,2 FM (Fréquence Modulée), nous réglons les paramètres de filtre pour laisser passer juste la fréquence sélectionnée.



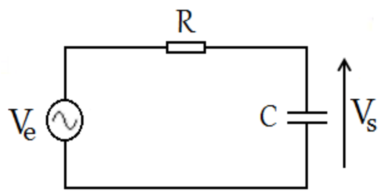
Lorsque, nous avons un filtre passe bande, nous parlons de deux fréquences (parfois nous citons aussi la fréquence centrale) :

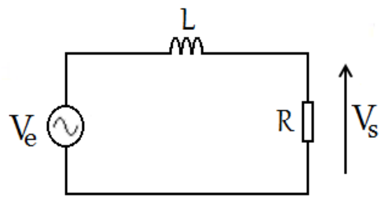


4. Filtre série RC et RL du premier ordre

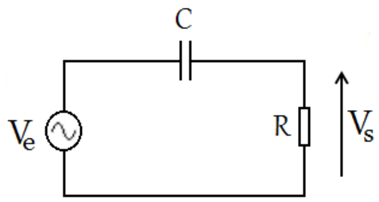
Avec des circuits RC et RL série, nous pouvons obtenir des filtres avec des caractéristiques différentes.

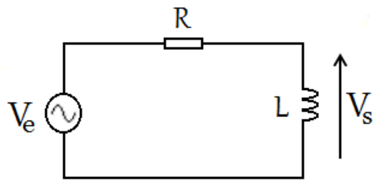
Filtre passe bas :





Filtre passe haut :





5. La transmittance

A l'aide des lois et des théorèmes étudiés précédemment, nous pouvons étudier n'importe quel circuit électronique et établir sa transmittance, qu'elle peut être écrite par exemple

$$H(j\omega) = \frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}} \quad ou \quad H(j\omega) = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_3}\right)} \quad ou \quad H(j\omega) == \frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{\left(1 + 2mj\dfrac{\omega}{\omega_2} - \dfrac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)}$$

Avec cette transmittance nous pouvons facilement tracer le diagramme de Bode, la courbe de gain et la courbe de phase.

- Nous appelons un filtre du premier ordre lorsque nous avons juste des termes ω^1.
- Nous appelons un filtre du premier ordre lorsque nous avons juste des termes ω^2.

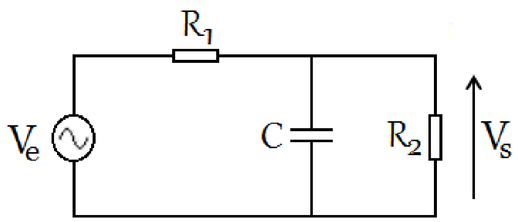
Avant de tracer le diagramme de Bode (courbes réelles), nous devrons dessiner le diagramme asymptotique dans une échelle logarithmique :

La courbe de gain asymptotique est formée de segment de droite avec une pente : 0 , $\pm 20dB/déc$, $\pm 40dB/déc$ (une décade : intervalle compris entre 10^D inclus et 10^{D+1} exclus, par exemple [1,10[ou [10,100[

La courbe de phase asymptotique est formée de segments de droites horizontale aux ordonnées :0 , $\pm 90°$, $\pm 180°$.

6. Diagramme de Bode /diagramme asymptotique :

Exemple : Considérons le circuit électronique suivant.



Pour tracer son diagramme de Bode, nous calculons sa transmittance : fonction de transfert

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$$

$$V_s = \frac{Z_s}{Z_s + Z_{R1}} V_e$$

$Z_{R1} = R1$

$Z_s: impédence\ de\ sortie\ =\ Z_c//Z_{R2} \Leftrightarrow \frac{1}{Z_s} = \frac{1}{R2} + j\omega C$

$$ou\ :\ Z_s = \frac{Z_c.Z_{R2}}{Z_c + Z_{R2}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}\ R2}{\frac{1}{j\omega C} +\ R2} = \frac{R2}{1 + j\omega C\ R2}$$

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_s}{Z_s + R1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{Z_s}R1} = \frac{1}{1 + R1\left(\frac{1}{R2} + j\omega C\right)} = \frac{1}{1 + \frac{R1}{R2} + j\omega R1C}$$

Il faut faire apparaitre le terme $1 + jX$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{R1}{R2} + j\omega R1C} = \frac{1}{\frac{R2 + R1}{R2} + j\omega R1C} . \frac{\frac{R2}{R2 + R1}}{\frac{R2}{R2 + R1}} = \frac{\frac{R2}{R2 + R1}}{1 + j\omega \frac{R1R2}{R2 + R1}C} = \frac{R'}{1 + j\omega R'C}$$

Posons $\omega_c = \frac{1}{R'C}$: $\qquad H(j\omega) = \frac{R'}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$

De cette équation nous savons déjà que c'est un filtre du premier ordre (absence de terme ω^2) et que nous avons qu'une seule fréquence de coupure (ou fréquence de cassure dans le diagramme asymptotique).

1) Diagramme Asymptotique du gain (méthode ordinaire)

$G(dB) = 20\,log|H(j\omega)|$[1]

$$G(dB) = 20\,log\left|\frac{R'}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}\right| = 20\,log\left(\frac{|R'|}{\left|1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}\right|}\right) = 20\,log\left(\frac{R'}{\left(1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$G(dB) = 20\,log\,R' - 20\,log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 20\,log\,R' - 10\,log\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right]$$

$$G(dB) = 20\,log\,R' - 10\,log\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right]$$

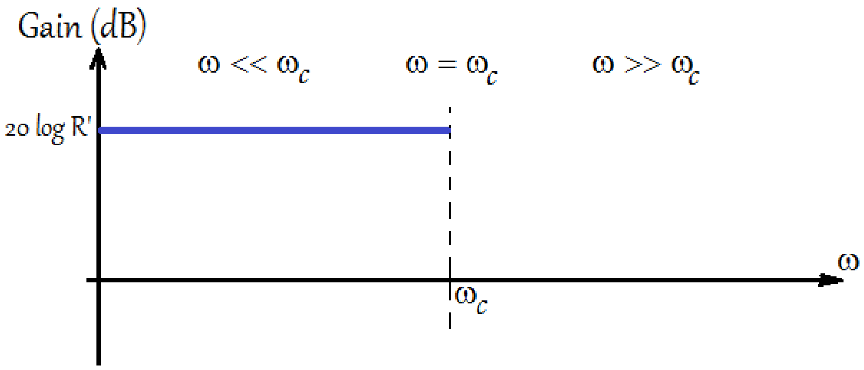
Il reste juste de tracer le diagramme asymptotique :

- Pour $\omega \ll \omega_c$ alors $\dfrac{\omega}{\omega_c} \ll 1$

(Sinon vous pouvez remplacer $\omega = 1$ et $\omega_c = 1000$ vous aurez $\frac{\omega}{\omega_c} \searrow 0$ *donc* $\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \searrow\searrow 0$
Ce rapport est très négligeable devant 1)

$G(dB) = 20\,log\,R' - 10\,log[1] = 20\,log\,R' \quad / \quad log\,1 = 0.$

Droite horizontale avec un gain constant de $20\,log\,R'$



[1] *Rappel* : $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$; $\quad log\left(\frac{a}{b}\right) = log(a) - log(b) \quad ; \quad log(a \times b) = log(a) + log(b)$

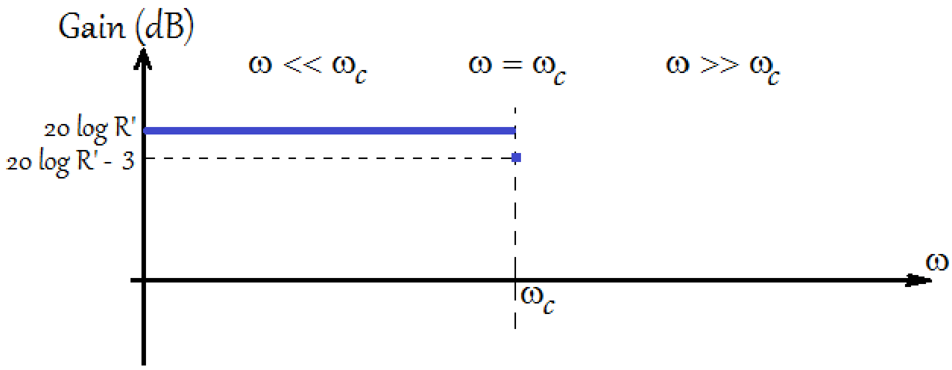
$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} = (a^2 + b)^{\frac{1}{2}} \;;\quad log(a)^n = n\,log(a)$

- Pour $\omega = \omega_c$:

$$G(dB) = 20\,log\,R' - 10\,log\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right] = 20\,log\,R' - 10\,log(1+1)$$

$$G(dB) = 20\,log\,R' - log(1+1) = 20\,log\,R' - 10\,log(2) = 20\,log\,R' - 10 \times 0.3$$
$$G(dB) = 20\,log\,R' - 3$$

Le gain diminue de 3dB, (ou dire : une chute de gain de 3dB)



- Pour $\omega \gg \omega_c$ alors $\frac{\omega}{\omega_c} \gg 1$ le 1 devient négligeable.

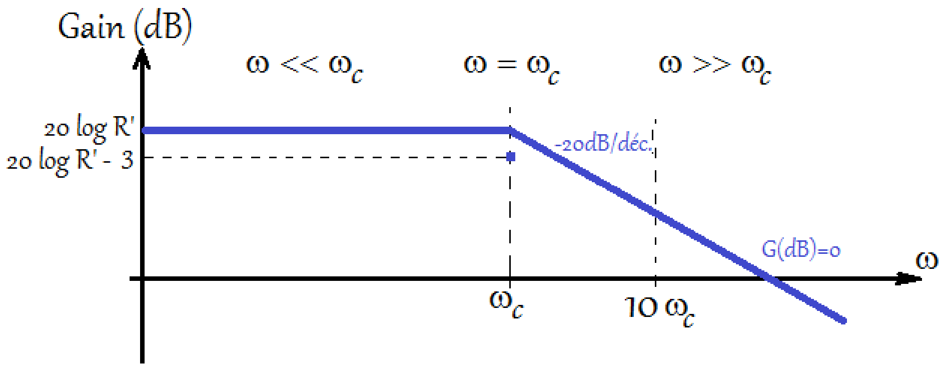
$$G(dB) = 20\,log\,R' - 10\,log\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right] = 20\,log\,R' - 10\,log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2$$

$$\frac{\omega}{\omega_c} \nearrow\nearrow \Rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \nearrow\nearrow\nearrow \equiv \infty \quad \Rightarrow log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \equiv log(\infty) = \infty \quad donc - 10 \times \infty = -\infty$$

$$G(dB) = 20\,log\,R' - \infty = -\infty$$

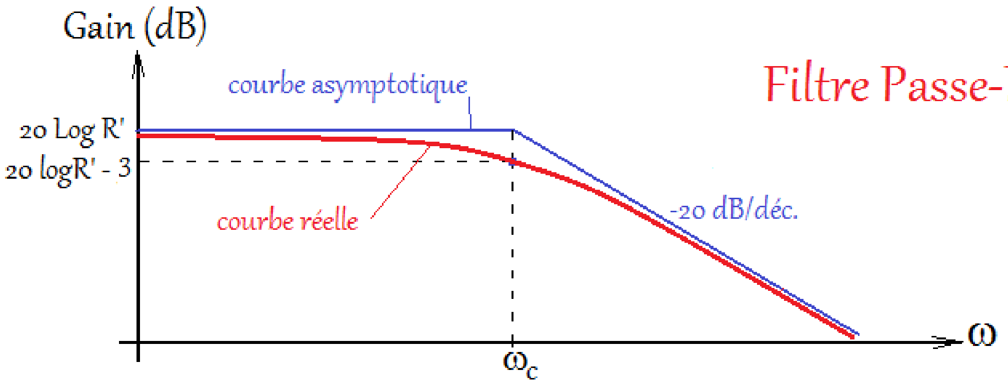
Calcul de la pente sur une décade :
$\omega = \omega_c$: $G(dB) = 20\,log\,R'$
$\omega = 10\,\omega_c$: $G(dB) = 20\,log\,R' - 20\,log(10) = 20\,log\,R' - 20dB$

Donc nous avons une droite tend vers -∞ avec une pente -20dB/déc.



2) Diagramme de Bode (courbe réelle) :

Une fois que vous avez tracé le diagramme asymptotique, vous pouvez tracer la courbe réelle directement car elle est très proche de la courbe asymptotique et elle ne s'écarte qu'au voisinage des cassures (fréquence de coupure)



3) Diagramme Asymptotique du gain (méthode rapide)

Nous pouvons connaitre le tracer du diagramme de Bode juste en analysant la transmittance et le tracer de la courbe aux basses fréquences.

Sachant qu'aux fréquences basses les termes $1 + jX$ (ou $1 + jX - X^2$) disparaissent en se réduisant à 1, et il ne reste donc qu'un terme constant ou un terme en ω et plus rarement un terme ω^2.

Prenons notre exemple, La transmittance du circuit :

$$H(j\omega) = \frac{R'}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

Aux basses fréquences $1 + j\frac{\omega}{\omega_c} \to 1 \quad \longmapsto \quad H(j\omega) = R'$

$$G(dB) = 20\,log\,R'\ \textit{Droite horizontale avec un gain constant vaut :}\ 20\,log\,R'$$

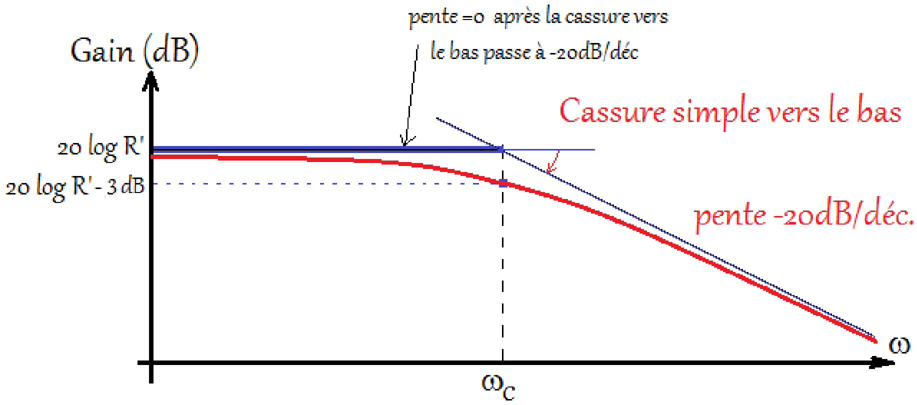
Notons que :

- Pour chaque fréquence de coupure le gain diminue de 3 dB.
- Les termes du premier ordre donnent une cassure simple.
- Les termes du second ordre donnent une cassure double.
- Les termes : 1+… du numérateur donnent une cassure vers le haut.
- Les termes : 1+… du dénominateur donnent une cassure vers le bas.
- Une cassure simple vers le haut fait passer la pente à + 20 dB/déc.
- Une cassure simple vers le bas fait passer la pente à – 20 dB/déc.
- Une cassure double vers le haut fait passer la pente à + 40 dB/déc.
- Une cassure double vers le bas fait passer la pente à – 40 dB/déc.

$$H(j\omega) = \frac{R'}{\boxed{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}}$$

Il faut trouver les termes 1+jX

- ω : Terme 1er ordre → cassure simple.
- Dénominateur → vers le bas.
- A ω_c chute du gain de 3 dB.



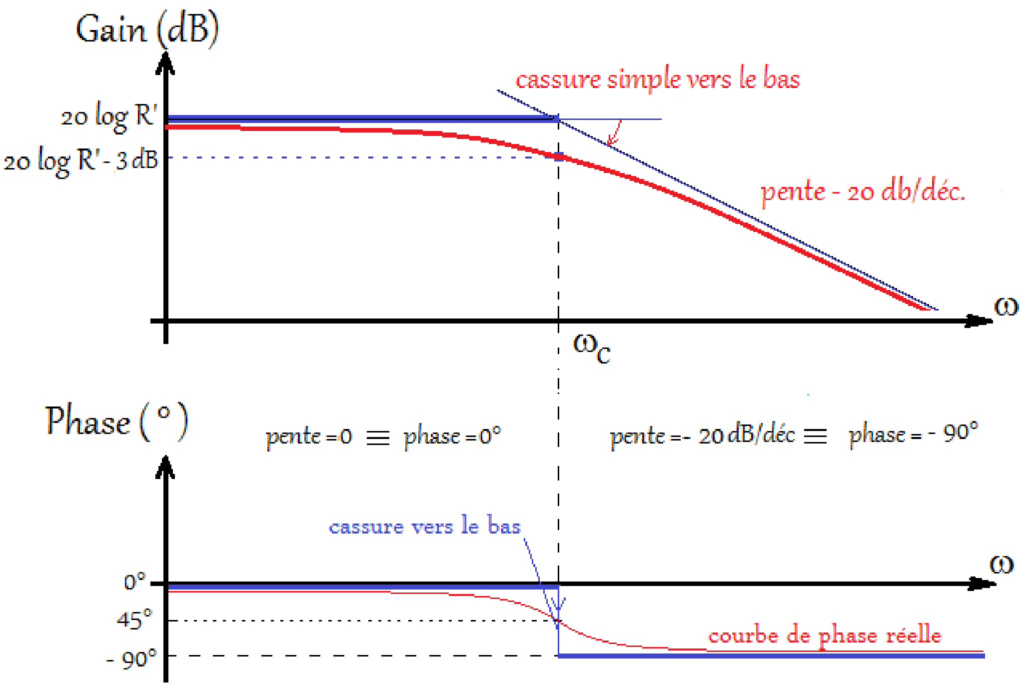
4) Courbe de phase

Vous pouvez de la même façon le faire via un calcul ou directement sans calcul, en sachant que :

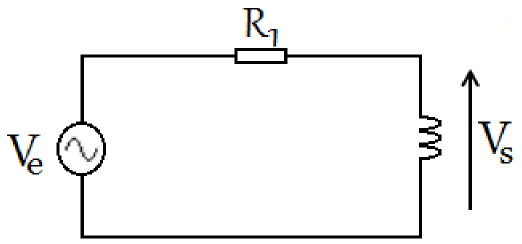
Une pente nulle est équivalente à une phase nulle.

Une pente de ± 20 dB/déc. Est équivalente d'une rotation de phase de ± 90°.

Une pente de ± 40 dB/déc. Est équivalente d'une rotation de phase de ± 180°.



Exemple 2 Considérons le circuit électronique suivant :



1 la transmittance (Fonction de transfert)

$$V_s = \frac{Z_L}{Z_L+Z_R}V_e = \frac{j\omega L}{j\omega L+R}V_e$$: Il faut apparaitre le terme 1+jX

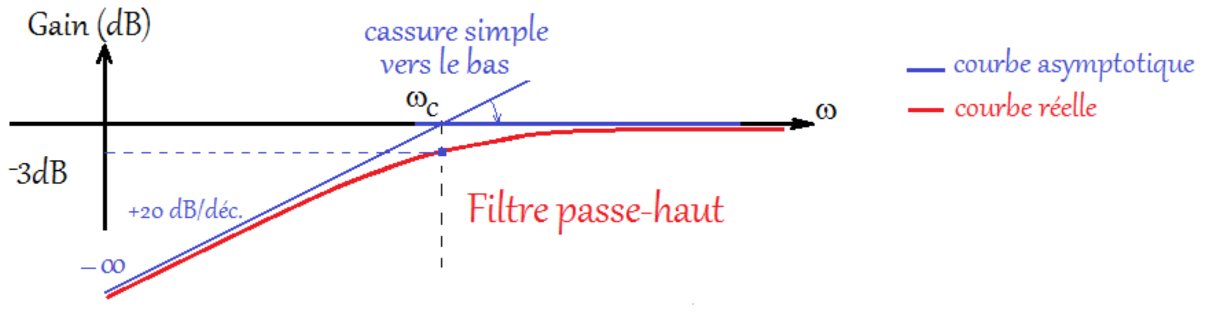
$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{j\omega\frac{L}{R}}{j\omega\frac{L}{R}+1} = \frac{j\omega\frac{L}{R}}{1+j\omega\frac{L}{R}} \xrightarrow{\omega_c=\frac{R}{L}} H(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

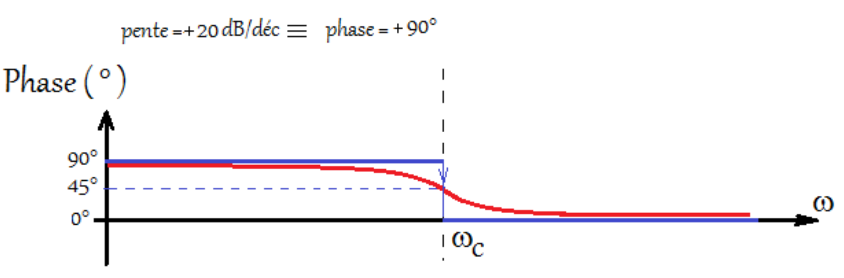
De la transmittance, nous concluons que c'est un filtre d'ordre 1 et que nous avons une seule fréquence de coupure et à cette fréquence nous avons une cassure simple vers le bas.

Aux basses fréquences $\omega \ll \omega_c$ le terme $1+j\frac{\omega}{\omega_c} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad H(j\omega) = j\frac{\omega}{\omega_c}$

$$G(dB) = 20\,log\left|j\frac{\omega}{\omega_c}\right| = 20\,log\frac{\omega}{\omega_c} = -\infty$$

Une droite arrive de -∞ vers la fréquence de cassure avec une pente +20dB/déc.





Exemple 3 considérons un système dont sa transmittance est

$$H(j\omega) = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_3}\right)} \quad avec \quad \omega_3 > \omega_2 > \omega_1$$

Aux basses fréquences $\omega \ll \omega_c$

Chacun des trois termes $\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right), \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)$ et $\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right) \longrightarrow 1$

$$\Rightarrow \quad H(j\omega) = j\frac{\omega}{\omega_1}$$

$$G(dB) = \ 20\,log\left|j\frac{\omega}{\omega_c}\right| = 20\,log\frac{\omega}{\omega_c} = -\infty$$

Diagramme de Bode