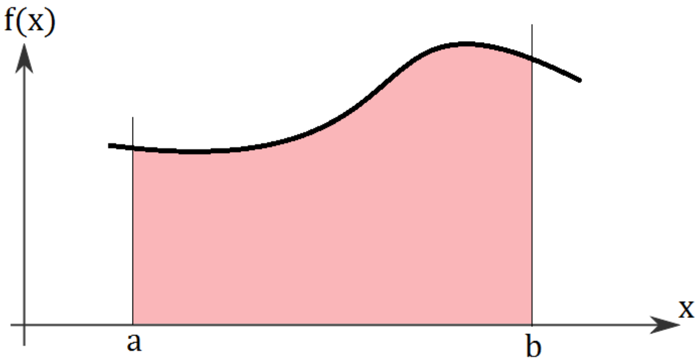
TP 5 : Les Intégrales numériques à une dimension

1. Rappels :

Calculer l'intégrale d'une fonction f(x) sur un domaine fini délimité par des bornes finies a et b

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

C'est d'estimer (ou déterminer) l'aire sous la courbe qui représente cette fonction. (Surface est délimitée par deux droites parallèles à l'axe des ordonnées, passant par les abscisses a et b).



L'idée principale est de trouver des méthodes qui permettent de calculer rapidement une valeur approchée de l'intégrale à calculer. Presque toutes les méthodes procèdent en trois phases distinctes :

1. Décomposition de l'intervalle en k sous-intervalles contigus (adjacent) de largeur h.
2. Intégration approchée I_k de la fonction sur chaque sous intervalle.
3. Sommation des résultats numériques. $I' = \sum_k I_k$

I′ : est une approximation de l'intégrale I. Cette approximation est d'autant meilleure que la largeur h des sous intervalles tend vers 0. ($\lim_{h\to 0} I' = I$).

Donc l'intégrale est calculée à partir de l'évaluation de $f(x)$ en un nombre de points $n+1$ distincts $f_k = f(x_k), k \in [0, n]$. Elle s'écrit alors :

$$I' = (b-a)\sum_{k=0}^{n} w_k f_k$$

w_k : Coefficients de poids k (lié à la méthode).

2. La primitive

Pour connaitre la primitive des différentes fonctions sur Matlab, utiliser ***Syms*** pour créer les variables symboliques.

Exemple 1 :

Nous voulons connaitre la primitive des fonctions suivantes :

$f_1(x) = x^2$; $f_2(x) = sin(x)$; $f_3(x) = e^x.\cos(x)$; $f_4(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

```
>> syms x
>> f1=x^2;
>> int(f1)
 ans =

  x^3/3
```

```
>> int(sin(x))

ans =

-cos(x)
```

```
>> int(exp(x)*cos(x))

ans =

(exp(x)*(cos(x) + sin(x)))/2
```

```
>> int(1/(1+x^2))

ans =

atan(x)
```

```
>> int(x^2) % vous pouvez déclarer la fonction
ans =       %ou l'utiliser directement

x^3/3
```

Exemple 2 :

Si $f\ (x, y)$ est une fonction à deux dimension sa primitive est donné soit par rapport à x ou à y

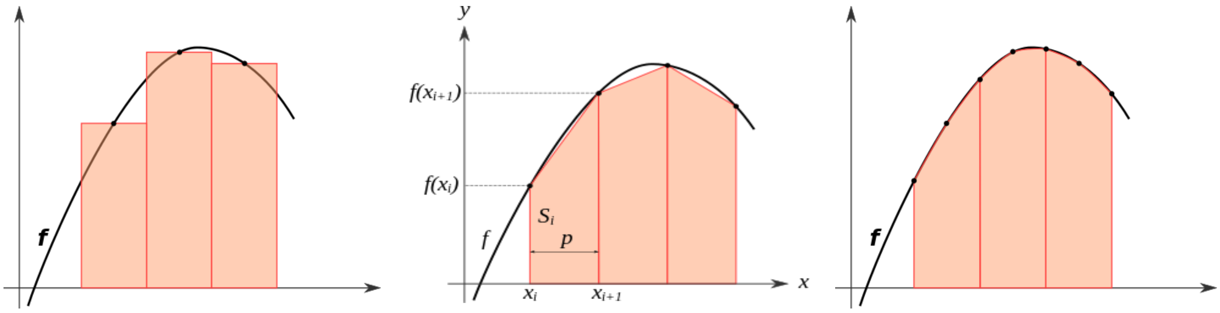
$f_5(x, y) = x^2 + y^3$; $f_6 = y^2\sin(x)$

```
>> syms x y  % x y en variable symbolique
>> int(x^2+y^3,x) % Intégrer par rapport à x
ans =

x^3/3 + x*y^3

>> int(x^2+y^3,y) % Intégrer par rapport à y
ans =

x^2*y + y^4/4
```

```
>> int(y^2*sin(x),x)

ans =

-y^2*cos(x)

>> int(y^2*sin(x),y)

ans =

(y^3*sin(x))/3
```

3. Calcul de l'intégrale

Pour calculer l'intégrale sur Matlab, plusieurs fonctions sont disponibles :



Intégration numérique par : [Image : source wikipédia]

1. la méthode des trapèzes 2. La méthode des rectangles 3. La méthode Simpson

- « **Trapz** » : utilise l'approche de la méthode des trapèzes qui consiste à découper l'aire totale à calculer en de petites surfaces ayant la forme de trapèzes.

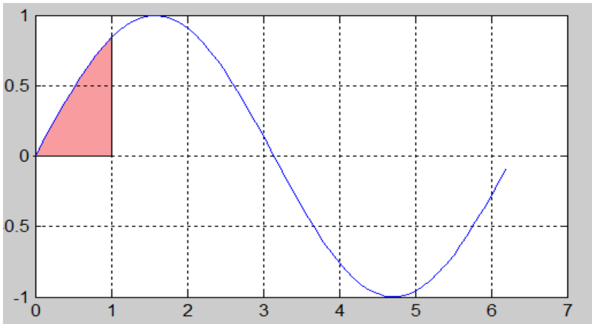
Pour la fonction **trapz** la fonction à intégrer passe en argument sous forme de vecteur.

$$Z = trapz(X, Y)$$

Exemple 4 :

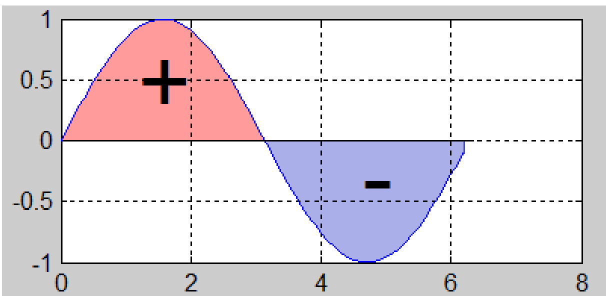
Nous voulons calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \sin(x)\, dx$ avec la méthode de trapèze.

```
>> x=0:0.1:1;
>> y=sin(x);
>> trapz(x,y)

ans =

    0.459314548857976
```



L'intégrale de la fonction sinus sur une période $x = [0,2\pi]$ vaut 0, si nous utilisons la méthode de trapèze le résultat est :

```
>> x=0:0.1:2*pi;
>> y=sin(x);
>> trapz(x,y)

ans =

    0.003455020910590
```



Changer la valeur du pas, essayer pour un pas 0.01 et 0.001 que remarquez-vous ?

- « **Quad** » : calcule numériquement l'intégrale d'une fonction par quadrature adaptative de simpson.

$$Q = Quad\ (Fun, a, b)$$

- « **Quad8** » : basé sur la loi de Newton-cote et basée aussi sur le concept de la quadrature. V4.2 (Elle n'existe plus dans les nouvelles versions).
- « **Quadl** » une forme de quadrature adaptative de Lobatto (version 6.5).
- « **Quadgk** »utilise une quadrature adaptative de Gauss-Kronrod.

Remarque : si vous voulez travailler juste dans la fenêtre Command Window vous pouvez utiliser cette écriture (ça ne marche pas avec les anciennes versions installés à la salle de TP):

```
>> myfun=@(x)  sin(x.^2)+1./(x+1);
>> myfun(0)
ans =
     1

>> quad('sin(x.^2)+1./(x+1)',0,2)
ans =
    1.9034
```

Pour les fonctions quad, la fonction passe en argument sous forme de fonction, pour cela, le calcul de l'intégrale d'une fonction et précédé par la création d'un M-File qui contient cette fonction. Une fonction est peut être appelé à tout moment dans un programme principale.

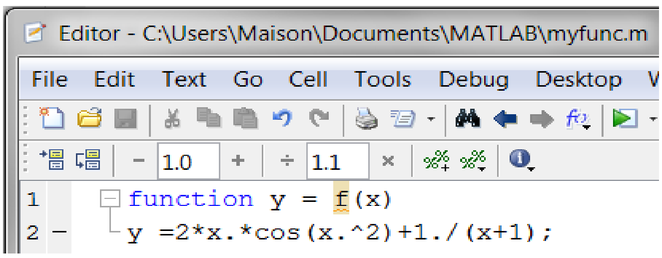
4. Création du fichier .m d'une fonction

Exemple : Soit la fonction :

$$f = 2x\ \cos(x^2) + \frac{1}{1+x}$$

a) Ouvrir un éditeur de texte : $File\ \rightarrow\ New\ \rightarrow\ \mathrm{M-file}$
b) Donnez le nom $myfun$ à cette fonction et saisissez son expression.

Remarque : il faut mettre un point devant les opérateurs : (.*) ; (. /) ; (.^) .



c) Nommé le fichier $myfunc.m$
d) Sauvegardez le fichier dans votre répertoire de travail.
e) Si le chemin du répertoire ne se fait pas automatiquement ajouter le chemin du répertoire où se trouve votre fichier $myfunc.m$
  - Avec la version 4.2. : $\gg$ $path\ (path,'c:\backslash Users\backslash \ldots\ldots')$
  - Avec la version 6.5. : $File\ \rightarrow\ Set\ Path\ \rightarrow\ Add\ Folder\ \rightarrow\ Save\ \rightarrow\ Close.$

5. Evaluation de la fonction

Sur *command window* appelé la fonction **myfunc** pour Calculer $y\ (x\ =\ 0), y(2)\ et\ y(-1)$:

```
>> myfunc(0)
ans =
     1

>> myfunc(2)
ans =
   -2.2812

>> myfunc(-1)
ans =
   Inf
```

Avec en argument un vecteur, la fonction retourne un vecteur :

```
>> myfunc([0 2 -1])
ans =
    1.0000   -2.2812       Inf
```

```
>> x=0:3;
>> myfunc(x)
ans =
    1.0000    1.5806   -2.2812   -5.2168
```

Avec en argument une matrice, la fonction retourne une matrice :

```
>> myfunc([1 2 3 ; 4 5 6])
ans =
    1.5806   -2.2812   -5.2168
   -7.4613   10.0787   -1.3927
```

6. Calcul de l'intégrale

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

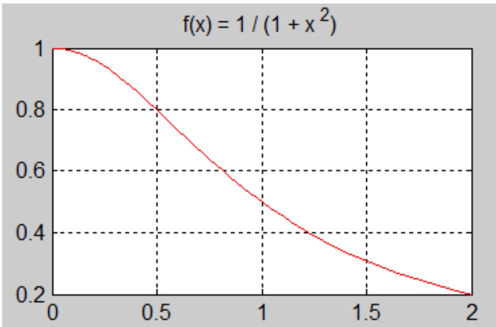
Pour calculer l'intégrale, il faut commencer par créer le fichier « func.m »

```
function y = func(x)
y = 1./(1+x^2);
```

Corrigez l'erreur présente dans l'écriture de la fonction

Pour tracer la fonction

```
>> fplot('myfunc',[0 2],'r')
>> title('f(x) = 1 / (1 + x ^2)')
>> grid on
```



Pour calculer l'intégrale il suffit maintenant d'écrire une des instructions :

```
>> % [0 2] les bornes de l'intégrale
```

```
>> quad ('myfunc',0,2)
ans =
    1.1071
```

```
>> quadl ('myfunc',0,2)
ans =
    1.1071
```

Pour modifier le format de l'affichage :

```
>> format long
>> quad ('myfunc',0,2)
ans =
   1.107148634219109

>> format long e
>> quad ('myfunc',0,2)
ans =
    1.107148634219109e+000
```

Pour améliorer la précision avec une tolérance de calcul de 1e-10 (la tolérance par défaut est 1e-3)

```
>> quad ('myfunc',0,2,1e-10)
ans =
     1.107148717792550e+000
```

Pour retourner à l'affichage du format court `>> format short`

Exercice 1

Soit la fonction suivante $y = 2x\,\sin(x^2)$

1) Calculer manuellement la valeur de l'intégrale (par partie). Pour s'assurer de votre résultat, utiliser

```
>> syms x
>> int(x.^2*sin(x))
```

2) Ecrivez le programme dans un fichier intnum.m et la fonction dans un autre fichier fun1.m

   2.1) En utilisant les trois fonctions trapz, quad et (quad8 ou quadl) déterminez l'aire délimitée par cette courbe et les abscisses x. ($x = -2$ et $x = 3$).

$$Aire1 = trapz(x, y)$$
$$Aire2 = quad(\text{'}yourfunc\text{'}, -2{,}3)$$
$$Aire3 = quadl(\text{'}yourfunc\text{'}, -2{,}3)$$

   2.2) Tracer cette courbe appartenant à l'intervalle délimité par
   2.3) Comparer les résultats des trois méthodes de calcul.

3) En modifiant juste l'équation de la fonction, calculer l'intégrale suivant

$$f_1(x) = \int_{-2}^{3} \sin(2x) + \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

4) Calculer l'intégrale suivant en modifiant les bornes et la fonction f(x)

$$f_2(x) = \int_{0}^{1} \frac{4}{1+x^2}\,dx$$

Exercice 1 Soit la fonction $g = 2|x|$.

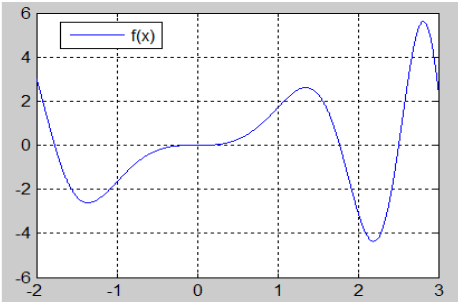
Calculer l'intégrale de cette fonction dans les intervalles suivants : $[0\ 1]$; $[-1\ 1]$; $[-0.5\ 0.5]$

Solution exercice 1

```
clear all; close all; clc;
%les bornes de l'intégrale de la fonction
xmin=0;
xmax=1;
x=xmin:0.001:xmax;
%la fonction
f=fun1(x);
% l'intégrale de la fonction par rapport à x
Aire1= trapz(x,f)
Aire2= quad ('fun1',0,1)
Aire3= quadl('fun1',0,1)
% la courbe
figure('Name','L''intégrale d''une fonction')
plot(x,f)
grid on;
legend('f(x)');
```

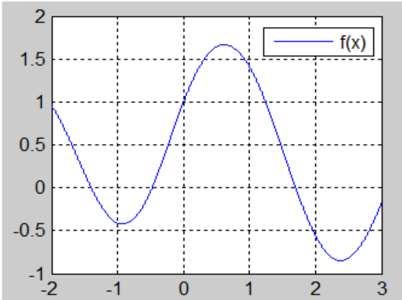
```
function y=f(x)
y=2*x.*sin(x.^2);
```

```
Aire1 =
    2.574849739743166e-001

Aire2 =

    2.574865324118816e-001

Aire3 =

    2.574866410207519e-001

>>
```




```
function y=f(x)
%y=2*x.*sin(x.^2);
y=sin(2*x)+ 1./(1+x.^2);
```

```
Aire1 =
    1.549287787071025e+000

Aire2 =
    1.549287538741138e+000

Aire3 =
    1.549287537783918e+000

>>
```



Pour cette fonction modifier xmin et xmax dans le programme principal

```
function y=f(x)
%y=2*x.*sin(x.^2);
%y=sin(2*x)+ 1./(1+x.^2);
y=4./(1+x.^2);
```

```
Aire1 =
    3.141592486923127e+000

Aire2 =
    3.141592682924567e+000

Aire3 =
    3.141592707032192e+000
```