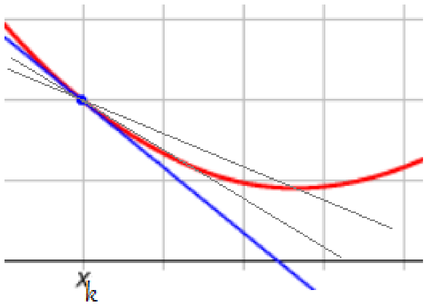
TP 6 : Les dérivées numériques.

1. Rappels :

En Analyse, le nombre dérivé en un point réel x d'une fonction f à variable et valeurs réelles est le coefficient directeur de la tangente au graphe de f au point $(x, f(x))$ qui revient à dire que graphiquement, la dérivée d'une fonction peut être définie comme la pente de celle-ci à un point donnée x_k.

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$



2. La dérivée numérique avec Matlab

Pour calculer la dérivée d'une fonction f, utiliser $diff\ (f)$ (Vous pouvez utiliser l'aide en écrivant >> $help\ diff$ dans Command Windows).

Pour connaitre les dérivées de certaines fonctions :

```
>> syms x
>> diff(x^2)
ans =
2*x

>> diff(exp(2*x^2))
ans =
4*x*exp(2*x^2)

>> diff(1./(x+1))
ans =
 -1/(x + 1)^2
```

Pour calculer la dérivée numérique d'une fonction $f(x)$

$$f' = df/dx \xrightarrow{Matlab} diff(f)./diff(x)$$

Le vecteur df a un élément de moins que le vecteur x, ce que n'apprécie pas la manipulation des fonctions de Matlab ou les vecteurs devront avoir la même taille. Donc pour utiliser la fonction Plot. Il faut ignorer soit le premier ou le dernier élément du vecteur x.

$$\frac{df}{dx_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \, ou \, \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

Exemple : $f = cos(x)$

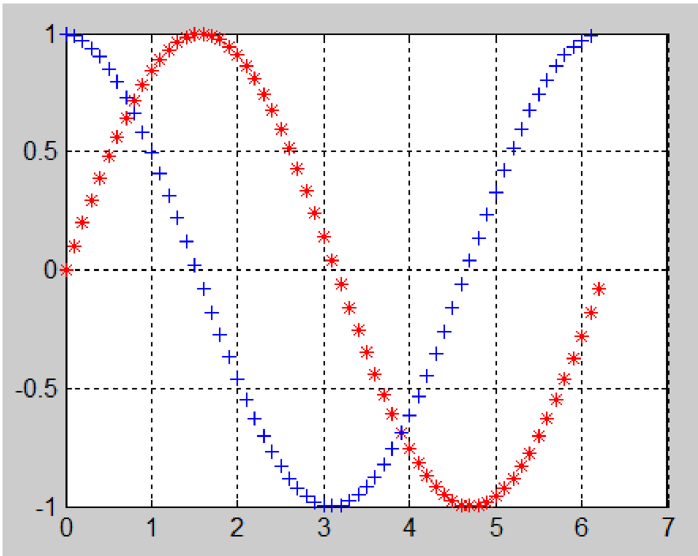
```
>> x=0:0.1:2*pi;
>> f=sin(x);
>> df=diff(y)./diff(x);
>> size(f)

ans =
     1    63

>> size(df)

ans =
     1    62

>> xd=x(0:length(x)-1);
>> plot(x,y,'r*',xd,df,'b+')
>> grid on
>>
```



Si $f(x)$ est dérivable sur un intervalle I, et si x_m est un point intérieur à I où la dérivée de f s'annule en changeant de signe, alors $f(x)$ atteint un extremum local en x_m.

Autrement dit la dérivée s'annule autant de fois que la fonction admet des minima et/ou des maxima. Pour connaitre les indices des points qui passent par 0.

$(f'(a) = 0$: (الذروة العظمى و الصغرة تنعدم عندهم مشتقة الدالة))

Nous faisons le produit de la fonction d'un point et son prédécesseur :

$$prod = f'(x_i) * f'(x_{i+1})$$

- *Si la fonction est négative pour les deux points, leur produit est positif.*
- *Si la fonction est positive pour les deux points, leur produit est positif.*
- *Si la fonction est négative pour un des deux points, leur produit est négatif.*

Seulement pour ce dernier cas, la fonction f(x) passe par un zéros, donc il nous faut juste chercher la valeur de x en utilisant la commande **find**

Exemple : considérons la fonction suivante

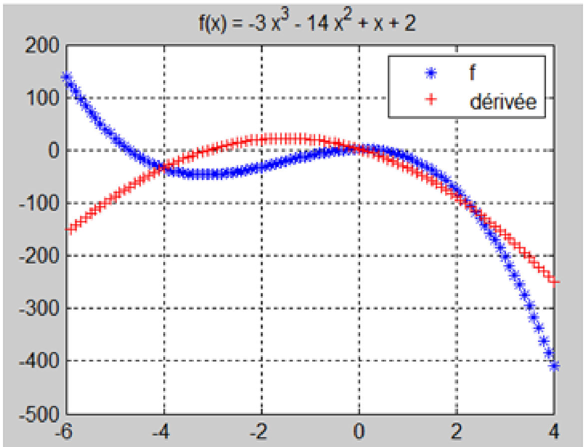
$$f(x) = -3\,x^3 - 14\,x^2 + x + 2$$

1) Représenter cette fonction entre -6 et 4.

```
>> x=-6:0.1:4;
>> f=-3*x.^3-14*x.^2+x+2;
>> figure(1)
>> plot(x,f,'*')
>> grid on
>> title(' f(x) = -3 x^3 - 14 x^2 + x + 2 ')
>> hold % Pour maintenir le graphe sur la figure (1)
```

2) Calculer sa dérivée par rapport à x et représenter la sur la même figure.

```
>> df=diff(f)./diff(x);
>> xd=x(2:length(x));
>> plot(xd,df,'r+')
>> legende('f','dérivée');
```



3) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la fonction f(x) admet des extremums (maxima et des minima) locaux.

```
>> prod=derf(1:length(derf)-1).*derf(2:length(derf));
>> local=xd(find(prod<0))
local =
   -3.1000        0
```

Exercice 1

1) Écrire le programme dans un fichier **deriv.m** et la fonction dans un fichier **fun.m**.
2) Considérons la fonction suivante

$$f(x) = sin(x) + \frac{cos(2x)}{3}$$

3) Réutiliser le même programme en modifiant juste la fonction f.

Solution :

La fonction

```
function f=der(x)
%f=-3*x.^3-14*x.^2+x+2;
f=sin(x)+cos(2.*x)./3;
```

Programme principal

```
clear all; close all; clc;
%la fonction
x=-6:0.1:4;
f=fun(x);
% la dérivée par rapport à x
df=diff(f)./diff(x);
xd=x(2:length(x));

% les x des minimas et les maximas
prod=df(1:length(df)-1).*df(2:length(df));
local = xd(find(prod<0))

figure('Name','La fonction et sa dérivée')
plot(x,f,'*',xd,df,'r+')
grid on
legend('f','dérivée');
```