Université D.L de Sidi Bel-Abbès **Année : 2017/2018**
Faculté des sciences de la Technologie **2ième année ST**
Module: Probabilités et Statistiques **Par: Mr. Difi et Mr. Mahiddine**
Fiche de TD N 01 **Le: 22-10-2017**

Analyse combinatoire

Exercice 01.

1. Trouver la valeur des expressions suivantes:

$$7!,\ 4!,\ 10!,\ 5!-3!,\ (4!)!,\ \frac{120!}{115!5!},\ \frac{7!}{4!3!},\ \frac{15!}{13!},\ \frac{26!12!}{19!8!4!},\ \frac{(l+1)!}{(l-1)!},\ \frac{y!}{(y-3)!},\ \frac{(k+3)!}{k!(k+2)}.$$

2. Exprime chacun comme une seule factorielle:

$$7\times 6\times 5!,\ 27\times 26\times 25\times 7\times 6,\ 7\times 6\times 5\times 4,\ \frac{30\times 29\times 28\times 27\times 26\times 25}{4!},\ 10\times 8\times 7\times 6,$$

$(n+3)\times(n+2)\times(n+1)\times n\times(n-1)\times(n-2)\times 4\times 3!,\ 2\times 4\times\cdots\times(2n)$ *puis* $1\times 3\times\cdots\times(2n+1)$.

3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(4k-2)=\prod_{k=1}^{n}(n+k)$.

4. Développer: $\left(2x^3+\frac{2}{x^3}\right)^4,\ \left(3y^2+\frac{3}{y^2}\right)^3,\ \left(z^5+\frac{1}{5z}\right)^5.$

5. Parmi ces propositions, déterminer celle qui est juste:

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1)=(2n+1)!,\ \prod_{k=0}^{n}(2k+1)=(2n+1)!-(2n)!,\ \prod_{k=0}^{n}(2k+1)=\frac{(2n+1)!}{2^n.n!},\ \prod_{k=0}^{n}(2k+1)=\frac{(2n+1)!}{(2n)!}.$$

$$\prod_{k=p}^{n}(3k)=3(n-p)!,\ \prod_{k=p}^{n}(3k)=3^{n-p}.(n-p)!,\ \prod_{k=p}^{n}(3k)=3^{n-p+1}.(n-p+1)!.$$

$$\prod_{k=p}^{n}(3k)=3^{n-p}.\frac{n!}{p!},\ \prod_{k=p}^{n}(3k)=3^{n-p+1}.\frac{n!}{(p-1)!},\ \prod_{k=p}^{n}(3k)=3^{n-p+1}.\frac{(n+1)!}{p!}.$$

$$\prod_{k=1}^{n}(k.k!)=(n+1)!-1,\ \prod_{k=1}^{n}(k.k!)=(n+1)!-n!,\ \prod_{k=1}^{n}(k.k!)=(n+1).(n+1)!.$$

6. Montrer que $C_n^k=C_n^{n-k}$.
7. Quelle est la relation entre C_n^k et A_n^k.
8. Calculer $C_{20}^2,\ C_{20}^5,\ C_{20}^{15},\ C_{20}^{18}$. Résolver $A_x^2+25=\frac{1}{2}A_{2x}^2$.
9. Simplifiez l'expression suivante: $\left(C_n^0+3C_n^1+9C_n^2+\cdots+3^nC_n^n\right)^{1/2n}$.
10. Soit P une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=x^4+2x^3-1$. Calculer $P(x+1)$.
11. Montrer que pour $n\geq 10,\ n!\geq 9!\times 10^{n-9}$.
12. Utiliser la formule de binôme de Newton pour montrer que $1.01^{10}\simeq 1.105$. Trouver de même une valeur approchée de 0.99^8 à 10^{-3} prés.
13. À l'aide de l'identité $(x+1)^{2n}=(x+1)^n(x+1)^n$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(c_n^k)^2=C_{2n}^n$.

Exercice 02.

1. De combien de façons différentes 11 persons peuvent-ils faire la file au poste?

2. Combien de façons peut-on arranger les lettres SDHMIAED?
3. Á partir d'une section de 120 étudiants, on veut former un groupe de 20 étudiants. Combien de groupes peut-on former?
4. Le numéro de série d'un certain type de téléviseur est un nombre former de 6 chiffres suivi de 3 lettres de l'alphabet. Exemple: $532577CQA$. Avec les chiffres 5, 5, 2, 2, 8 et les lettres C, C, K, combien de numéros de série différents peut-on former?
5. Les numéros de série d'un certain produit sont formés d'une séquence de 8 chiffres suivie d'une séquence de 5 lettres. Calculez le nombre de numéros de série différents qu'on peut former avec les chiffres 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4 et les lettres A, A, A, B, B.
6. Combien y a-t-il de nombres à 7 chiffres satisfaisant les deux conditions suivantes:
   - Les 7 chiffres sont tous plus grand ou égal à 1.
   - La somme des 7 chiffres est 16.

Exercice 03. On considère l'ensemble E des entiers de 20 à 40. On choisit l'un de ces nombres au hasard. Soient A, B et C les événements suivantes:
A:"le nombre est multiple de 3", B: "le nombre est multiple de 2" et C: "le nombre est multiple de 6".
Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$, $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$, $p(A \cap C)$ et $p(A \cup C)$.

Exercice 04. On lance 4 fois de suite une pièce équilibrée.
1) Dresser la liste des issues équiprobables.
2) Quel est l'événement le plus probable : A ou B ? A: "2 piles et 2 faces", B: "3 piles et 1 face ou 3 faces et 1 pile".

Exercice 05. On considère Ω l'ensemble des familles ayant 3 enfants et on désigne par E_1 , E_2 , E_3 , E_4 les événements suivants :
$E_1 = \{la\ famille\ a\ au\ plus\ deux\ filles\}$; $E_2 = \{la\ famille\ n'a\ pas\ de\ fille\}$;
$E_3 = \{la\ famille\ a\ une\ fille\}$; $E_4 = \{la\ famille\ a\ deux\ filles\}$.
Montrer que E_2 , E_3 , E_4 forment une partition de E_1.

Exercice 06. Lorsque le joueur A joue aux échecs contre le joueur B, il gagne 5 fois plus souvent que ce dernier. Quelle est la probabilité que le joueur A gagne une partie ?

Exercice 07. Un atelier comprend 15 ouvriers de même spécialité, 8 femmes et 7 hommes. On veut former une équipe de 5 ouvriers.
a). Combien d'équipes différentes peut-on former ? b). Combien d'équipes comportant 3 hommes peut-on former ?

Exercice 08. On lance une pièce de monnaie 20 fois de suite. Quelle probabilité a-ton d'obtenir: a.) 8 fois face, b.) 9 fois face, c.) 10 fois face, d.) plus de 7 fois et moins de 13 fois face, e.) moins de 4 fois face.

Exercice 09. On choisit deux boules au hasard dans une urne contenant 8 blanches, 4 noires et 2 oranges. Supposons que l'on reçoive 2 euros pour chaque boule noire tirée et que l'on perde 1 euro pour chaque boule blanche tirée. Désignons les gains nets par X. Quelles sont les valeurs possibles pour X et les probabilités associées à ces valeurs ?

Exercice 10. On lance quatre fois une pièce juste et on note X la variable aléatoire nombre de séquences pile-face obtenues. Par exemple, si on obtient successivement: pile, pile, face, pile, X prend la valeur 1; si on obtient successivement: face, pile, pile, pile, X prend la valeur 0; si on obtient successivement: pile, face, pile, face, X prend la valeur 2. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 11 On lance un dé juste, au plus cinq fois, en s'arrêtant (éventuellement) dès qu'on a obtenu un 6. Et on note Y la variable aléatoire nombre de lancers effectués. Déterminer la loi de probabilité de Y.

....

Bon courage