Université D.L de Sidi Bel-Abbès **Année : 2017/2018**
Faculté des sciences de la Technologie **2ième année ST**
Module: Probabilités et Statistiques **Par: Mr. Difi et Mr. Mahiddine**
Fiche de TD N 02 **Le: 12-11-2017**

Lois des variables aléatoires: discretes et continues

Exercice 01. Soient A et B deux évènements tels que $P(A) = 1/5$ et $P(A \cup B) = 1/2$
1. Calculer P(B) dans les deux cas: A et B soient incompatibles, A et B soient indépendants.
3. Calculer P(B) en supposant que l'évènement A ne peut être réalisé que si l'évènement B est réalisé.

Exercice 02. p est une probabilité sur l'univers Ω. A et B sont deux évènements tels que:
$p(A) = 1/3, \quad p(A \cup B) = 4/9, \quad p(A \cap \overline{B}) = 1/6$. Calculer: $p(A \cap B), \quad p(B), \quad p(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Exercice 03. Une enquête effectuée auprès de 1500 personnes adultes (habitants d'une ville) portant sur les jeux d'argent indique que : 1182 jouent au loto (A), 310 vont au jeu télévisé (B) et 190 jouent autant au loto qu'au jeu télévisé.
a. Si une personne adulte (de la ville) est choisie au hasard, quelle est la probabilité qu'elle joue au loto ou au jeu télévisé?
b. Quelle est la probabilité qu'elle joue uniquement au jeu télévisé?

Exercice 04. On suppose que 3 entreprises X, Y et Z fabriquent trois types de microprocesseurs utilisés dans les ordinateurs se partagent le marché à raison de 25% pour X, 35% pour Y, 40% pour Z. Les pourcentages de commandes non conformes sont : 5% pour les microprocesseurs de X, 4% pour ceux de Y et 2% pour ceux de Z. Dans un lot constitué de microprocesseurs dans les proportions indiquées pour X, Y et Z, on prélève un microprocesseur.
a. Quelle est la probabilité qu'il soit non conforme?
b. Sachant que le microprocesseur présente un défaut de fabrication, quelle est la probabilité qu'il soit du type X?

Exercice 05. On tire aléatoirement un nombre entre -2 et 7. On considère donc une loi uniforme sur $[-2; 7]$
1) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre inférieur à π?
2) Calculer la moyenne et la variance de cette loi uniforme.

Exercice 06. Dans une ville, la consommation journalière d'eau (en millions de litres) est une variable aléatoire dont la densité de probabilité est donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} 1/4xe^{-x/2}, & \text{si x>0} \\ 0, & \text{si x<0} \end{cases}$$

journée, la ville ne puisse répondre à la demande?
c) Quelle devrait être la capacité journalière de la ville pour que la probabilité de répondre à la demande soit de 95%?

Exercice 07. Soit sur l'écran circulaire d'un radar, de rayon r, l'image ponctuelle M de l'objet, qui occupe une position aléatoire dans le cadre de l'écran, aucune des régions de ce dernier n'étant préférentielle (l'image de l'objet se projette sur l'écran au hasard). On envisage l'événement A qui consiste en ce que la distance ρ du point M au centre de l'écran soit inférieure à $\frac{r}{2}$: $A = \{\rho < \frac{r}{2}\}$. Trouver la probabilité de cet événement.

Exercice 08. Un message transmis par une voie de communication compte n signes (symboles). Pendant la transmission chaque signe est perturbé indépendamment des autres avec une probabilité p. Pour rendre la transmission plus sûre le message est répété k fois. Trouver la probabilité pour qu'au moins un des messages transmis ne soit perturbé en aucun de ses signes.

Exercice 09. Soit X une v.a. prenant chacune des valeurs $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ avec la même probabilité $\dfrac{1}{6}$. Soient $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.
– Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ puis $E(Z)$, $V(Z)$. Donner la loi de probabilité de Y puis de Z.

Exercice 10. Les appels arrivent à un centre d'urgence comme un processus de Poisson avec une intensité de 4 appels par heure.

- a). Calculez la probabilité qu'il y aurait au moins 3 appels durant les 30 prochainnes minutes.
- b). Calculez l'espérence et l'écart-type du temps entre le septième et le dixième appel.
- c). Sachant qu'il y'a eu exactement 15 appels entre $13h$ et $16h$, quelle est la probabilité qu'exactement 6 de ces 15 appels aient eu lieu entre $13h$ et $14h$?
- d).Vingt pour cent des appels conçernent des incendies. Autrement dit, chaque fois que des appels surviennent, on a une chance sur cinq que ce soit un appel pour un incendie, indépendament de la nature des appels antérieurs: calculez la probabilité qu'il y aurait exactement 3 appels pour incendie durant les prochaines 10 heures.

Exercice 11. Soient deux réels $a > 0$ *et* $\alpha > 0$. Soit f la fonction définie sur R^+ par : pour tout $x \in R^+$,

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & si\ 0 \leq x < \frac{a}{2}; \\ \alpha(a - x), & si\ \frac{a}{2} \leq x < a; \\ 0, & si\ x \geq a. \end{cases}$$

1. Calculer la constante α pour que f soit une densité de probabilité. On choisit dorénavavnt cette valeur pour α.
2. Soient X une variable aléatoire de densité f et un réel $b \in]0,\ \frac{a}{2}[$; calculer : $P(X > \frac{a}{2})$ *et* $P(\frac{a}{2} - b < X < \frac{a}{2} + b)$.

Exercice 12. Soit x une variable aléatoire (v.a) de densité f_X avec

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x \ si \ x \in [-1,\, 0]; \\ \alpha \ si \ x \in [0,\, 2]; \\ 0, \ sinon. \end{cases}$$

- a). Déterminer α. Puis représenter la densité de X.
- b). Calculer et représenter la fonction de répartition de X.
- c). Calculer $P(X > \frac{1}{2})$ puis $E(X)$.
- d). Calculer la fonction de répartition F_Y de la v.a $Y = X^2$, en déduire sa densité f_Y. Représenter f_Y et F_Y.
- e). Calculer $E(Y)$ d'une part à l'aide de f_Y d'autre part à l'aide de f_X.

Exercice 13. On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité P de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$: la probabilité qui le compose ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est:

$$P(x \in [0; t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50/ d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $P([0; 200[) = 0,5$.

1. Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.
2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.
3. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx$. Montrer que $\displaystyle\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$. En déduire d_m; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

Exercice 14. La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda éléctronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où X est un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout $t \geq 0$, $P(X \leq t) = \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\int_0^t e^{-\lambda x} dx$.

La fonction R définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Démontrer que pour tout $t \geq 0$ on a $R(t) = e^{-\lambda t}$.
2. Dans cette question, on prend $\lambda = 0,00026$:

Exercice 15. Soit X une variable aléatoire normale de moyenne 4 et de variance 25.

- a) Calculer les probabilités: $P(X > 2)$, $P(1 < X < 3)$, $P(|X| \geq 4)$.
- b) Déterminer les constantes α et β telles que: $P(X > \alpha) = 0.05$, $P(|X| \geq \beta) = 0.99$.

. . . .

Bon courage