

# SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

UNIVERSITÉ DJILALI LIABÈS - SIDI BEL ABBÈS - LE 18 FÉVRIER 2023

## Rough paths et Algèbre de Hopf

Abdelkader LABAIR

Laboratoire de Mathématiques (LDM). Faculté des Sciences Exactes (FSE).

Université de Sidi Bel Abbès

**Résumé :** Les rough paths *chemins rugueux* de Terry Lyons fournissent un cadre algébrique et analytique pour les intégrales de Stieltjes dans un régime de faible régularité où l'intégrale de Riemann-Stieltjes habituelle ne converge pas. Dans une approche algébrique, on présente les notions d'algèbre et de co-algèbre pour qui pour introduire les algèbres de Hopf. Des exemples d'algèbres de Hopf sont présentés ; notamment l'algèbre de Hopf polynomiale, dont le produit n'est rien d'autre que la multiplication habituelle de polynômes et dont le coproduit peut être exprimé très simplement à l'aide d'un coefficient binomial. Le couple dual d'algèbres de Hopf tensorielles est lié d'une manière naturelle à la théorie des chemins rugueux faiblement géométriques, qui correspondent à des notions d'intégrales de Stieltjes. Dans les cas d'intégration par parties, comme l'intégration d'Itô, on examine les chemins rugueux ramifiés de Gubinelli basés sur la paire duale d'algèbres de Hopf sur les arbres et les forêts. Enfin, nous donnons quelques concepts de base de la théorie des structures de régularité de Hairer et nous les utilisons pour une approche différente des chemins rugueux ramifiés et faiblement géométriques. En premier lieu, on examine la méthode générale décrite par Hairer pour obtenir une structure de régularité pour certaines algèbres de Hopf. Nous développons ensuite une structure de régularité basée sur une itération formelle de Picard qui est plus appropriée pour traiter les équations différentielles rugueuses.

**Keywords :** Algèbre de Hopf, intégrale de Riemann-Stieltjes, rough paths, structures de régularité de Hairer.

**Mathematics Subject Classification :** 16Txx, 16T05, 16T10, 60Lxx, 60L20, 60L30.

## References

[Abe80] Eiichi Abe. *Hopf algebras*. Cambridge University Press, Cambridge, English language edition, 1980.

- [Che71] Kuo-Tsai Chen. Algebras of iterated path integrals and fundamental groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 156:359–379, 1971.
- [FH20] Peter K. Friz and Martin Hairer. *A Course on Rough Paths with an introduction to regularity structures*, volume XVI of *Universitext*. Springer, second edition, 2020.
- [GVRST22] Mazyar Ghani Varzaneh, Sebastian Riedel, Alexander Schmeding, and Nikolas Tapia. The geometry of controlled rough paths. *arXiv preprint arXiv:2203.05946*, 2022.
- [Gub10] Massimiliano Gubinelli. Ramification of rough paths. *Journal of Differential Equations*, 248(4):693–721, 2010.
- [LCL07] Terry J. Lyons, Michael J. Caruana, and Thierry Lévy. *Differential Equations Driven by Rough Paths*, volume 1908 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
- [LQ02] Terry Lyons and Zhongmin Qian. *System Control and Rough Paths*. Oxford Mathematical Monographs. Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [LV07] Terry Lyons and Nicolas Victoir. An extension theorem to rough paths. *Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Analyse Non Linéaire*, 24(5):835–847, 2007.
- [Lyo94] Terry Lyons. Differential equations driven by rough signals (I): An extension of an inequality of L. C. Young. *Mathematical Research Letters*, 1(4):451–464, 1994.
- [Lyo98] Terry J. Lyons. Differential equations driven by rough signals. *Revista Matemática Iberoamericana*, 14(2):215–310, 1998.
- [Swe69] Moss E. Sweedler. *Hopf Algebras*. Mathematics Lecture Note Series. W. A. Benjamin, New York, 1969.
- [You36] L. C. Young. An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration. *Acta Mathematica*, 67(1):251–282, 1936.