

PROBABILITES

Rappels Mathématiques

Faculté de Médecine
Université Djillali Liabès
1^{ère} année CD

14 Septembre 2016

Plan de cours

1 Rappels Mathématiques

Rappels sur les ensembles 1

Notations:

- \emptyset est l'ensemble vide.
- Ω est l'ensemble universel (fondamental).
- $A \subset \Omega$: l'ensemble A est un sous-ensemble de Ω .
- $p \in A \subset \Omega$ si p est un élément A .
- la négation de $x \in A$ est $x \notin A$.

Rappels sur les ensembles 2

Soient A et B deux ensembles quelconques.

- B est partie de A , ou sous-ensemble de A , et l'on note

$$B \subset A \text{ ou } A \supset B, \text{ si: } x \in B \implies x \in A.$$

- $A \cap B$: intersection $\Leftrightarrow A$ **et** B

$$\diamond A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \text{ et } B \text{ sont } \mathbf{disjoints}$$

- $A \cup B$: réunion $\Leftrightarrow A$ **ou** B

- $C_{\Omega}A$ ou \bar{A} : complémentaire ou négation \Leftrightarrow **non** A

$$\diamond A \cup \bar{A} = \Omega \text{ et } A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

Rappels sur les ensembles 3

- $A - B$: **Différence**: $\Leftrightarrow \{x : x \in A \text{ et } x \notin B\} = C_A B$
(complémentaire de B relatif à A).
- $A \times B$: **produit** \Leftrightarrow est l'ensemble de tous les couples ordonnés (a, b) , avec $a \in A$ et $b \in B$.
 - ◇ Exemple: $A = \{a, b, c\}$; $B = \{1, 2\}$,
 - ◇ $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$.

Exercice

- 1 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
- 2 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ensembles fini, infinie dénombrable, infinie non dénombrable

- Ensemble **fini** (nombre fini d'éléments)
- Ensemble **infini dénombrable** (les éléments peuvent être numérotés ; exemple: \mathbb{N})
- Ensemble **infini non dénombrable** (les éléments ne peuvent pas être numérotés ; exemple: \mathbb{R})

Ensembles fini, infinie dénombrable, infinie non dénombrable

- ✓ On pose: $|\Omega| = \text{Card}(\Omega) = n$ **nombre d'éléments de Ω .**
- ✓ En pratique, les ensemble infinis non dénombrables sont:
 - les intervalles de \mathbb{R} : $\{x \in [a, b]\}$
 - les intervalles de \mathbb{R}^2 : $\{(x, y) : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$.

Ensembles fini, infinie dénombrable, infinie non dénombrable: Exemple

- $A = \{a, b, c\}$ est un ensemble fini;
- $I = \{x \in [0, 1]\}$ est ensemble infini non dénombrable;
- $A = \{n : n \text{ est un entier pair} \}$ est un ensemble infini dénombrable.

Famille des parties

Soit un ensemble A quelconque.

- On appelle famille des parties de A l'ensemble des sous-ensembles de A .
 - ◇ Exemple: $A = \{1, 2\} \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.
- Une partition de A est une subdivision de A en sous-ensembles disjoints dont la réunion forme A .
 - ◇ Exemple: $\{\{1\}, \{2\}\}$ est une partition de A .

Notation

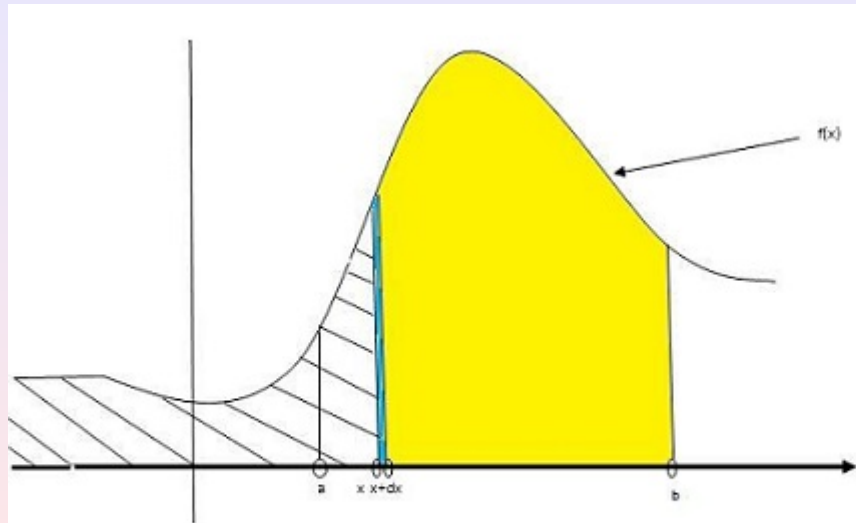
Soit une famille d'ensemble $\{A_i\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ qui peut être finie ou non. On note:

- $\bigcup_i A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$
- $\bigcap_i A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$

Définition, Propriétés

- Soit f une fonction réelle.
 - ◇ L'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ est notée $\int_a^b f(x)dx =$ surface (l'aire) en jaune.
 - ◇ $\int_a^b f(x)dx =$ surface en bleue
 - ◇ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in [a, b].$
 - ◇ $\int_a^b k(f(x))dx = k \int_a^b f(x)dx.$

Définition, Propriétés



Fonction primitive, Propriétés

- $\int_{-\infty}^x f(t)dt = \mathbf{primitive}$ de $f(x)$ = surface hachurée
 - ◊ varie lorsqu'on fait varier x de $-\infty$ à $+\infty$.
- Si $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$, alors $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$. Donc F se déduit de f par intégration, et f se déduit de F par dérivation.
- $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.