Notion de Variable aléatoire

Lois d'une variable aléatoire

Benchikh Tawfik

Faculté de Médecine, UDL, SBA

$1^{\text{ère}}$ année CD

16 Octobre 2016

Plan de cours

Variable aléatoire: Introduction

- Une variable aléatoire désigne la grandeur mesurée lors d'une expérience aléatoire. Exemples :
  - Âge (en années)
  - Tension artérielle systolique (en mmHg)
  - Stades de gravités d'une maladie (0-1-2-3-4)
  - Sexe (Homme/Femme)
  - Couleur des yeux (marron, noir, vert, bleu, ...)
  - Cancer (Presence/Absence)
  - Nombre de malades

  $\rightarrow$ Mesures qui varient d'un individu à l'autre.
- Résultats possibles de l'expérience $\Rightarrow$ valeurs possibles de la variable aléatoire

Type de Variable aléatoire

- Types de variables aléatoires
  - Si résultats numériques (variable quantitative)
    - V.a. continue : les valeurs couvrent $\mathbb{R}$ ou un intervalle
    - V.a. discrète : les valeurs sont discrète (discontinues) ($\mathbb{N}$)
  - Sinon (variable qualitative)
    - V.a. ordinale : les valeurs sont ordonnées
    - V.a. nominale ou catégorielle : valeurs sans ordre

Variable aléatoire: Exemple de codage 1

- Si Pile, A gagne 10 DA
- Si Face, A perd 10 DA

- $\Omega = \{Pile\,, Face\}$, $\mathbf{Pr}(Pile) = \mathbf{Pr}(Face) = 0.5$
- G: gain de A:
  - $G = +1$, si Pile;
  - $G = -1$, si Face
- $\mathbf{Pr}(G = +1) = \mathbf{Pr}(\text{"}Pile\text{"}) = 0.5$ et
  $\mathbf{Pr}(G = -1) = \mathbf{Pr}(\text{"}Face\text{"}) = 0.5$
- Distribution de G: $\{(+1, 0.5), (-1, 0.5)\}$

G: variable aléatoire qui suit une certain loi de probabilité

Variable aléatoire: remarque

- Au sens strict, une **variable aléatoire** produit toujours un **résultat numérique**
- Une v.a. est un codage des résultats d'expérience conduisant à des nombres
  - Si les résultats sont déjà numériques, le **codage** peut être l'identité
- On va reprendre ce qui a été vu (événements et probabilités) pour l'adapter aux v.a.

Variable aléatoire discrète: Définition

- Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un ensemble (on dit un espace) muni de l'ensemble d'événements de l'ensemble fondamental Ω).
- Soit E un ensemble quelconque finie ou dénombrable.
- $\mathbf{Pr}$ une probabilité sur Ω.
- **Définition**:

On appelle variable aléatoire discrète (ou v.a.d.) toute application X de Ω dans E une partie **finie ou dénombrable** de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} X:\Omega &\rightarrow E \subset \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega)\,. \end{aligned}$$

tel que: $\forall x \in E$, $X^{-1}(x) \in \mathcal{A}$, autrement dit $X^{-1}(x)$ est un évènement.

- Pour: $x \in E$, on notera $(X = x)$ ou $\{X = x\}$ l'évènement $X^{-1}(x)$.

Variable aléatoire: Exemple 2

- Si Ω est l'ensemble des élèves d'une classe, on peut à chaque élève ω associer le nombre $X(\omega)$ de ses frères et soeurs. X est alors une fonction à valeur dans un ensemble fini: c'est une variable aléatoire discrète.
- Somme des résultats de deux dés :

$$\begin{array}{rcc} X : \Omega & \longrightarrow & E \\ (m,n) & \mapsto & m+n\,. \end{array}$$

Et on a par exemple $\{X=3\} = X^{-1}(3) = \{(1,2),(2,1)\}$.

Variable aléatoire: Exemple

- Jeu de dé : $\Omega = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$
- V.a. : $X(f_1) = 10$; $X(f_2) = 20$, $\ldots$, $X(f_6) = 60$
- $[20 \leq X \leq 35] = \{f_2, f_3\}$
- $[X < 35] = \{f_1, f_2, f_3\}$
- $[X = 40] = \{f_4\}$
- $[X = 35] = \emptyset$

Système complet induit par une v.a.d.

- Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète (fini) sur Ω à valeurs dans E.
- Étant donnée que X est une variable aléatoire discrète finie, alors $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
- Alors:

Théorème

La famille des parties $(\{X = x_i\}, i \in \{i = 1, \ldots, n\})$ forme un système complet d'événements.

Loi d'une variable aléatoire discrète

- Soit $(\Omega, \mathbf{Pr})$ donné et $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire.
- On pose $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ et $E = \{x_1, x_2, x \dots, x_k\}$.
- Définissons:

$$p_i = \mathbf{Pr}(X = x_i) = \mathbf{Pr}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\})$$

- On remarque que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Pr}(X = x_i) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Pr}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\}) \\
&= \mathbf{Pr}(\cup_{i=1}^{n} \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\}) \\
&= \mathbf{Pr}(\Omega) = 1 ,
\end{aligned}$$

(puisque ce sont des ensemble disjoints).

- Donc $(p_1, p_2, \dots p_k)$ définit une probabilité sur E.

Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition

On appelle loi de la variable aléatoire discrète X la donnée des probabilité $\mathbf{Pr}(X = x_i)$ (la probabilité $\mathbf{Pr}_X$ sur E telle que: $p_i = \mathbf{Pr}(X = x_i)$).

- Cette définition s'étend bien sûr au cas d'une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble infini dénombrable.
- Dans la suite, on se limite au cas des variables aléatoires discrète à valeurs dans un ensemble fini. Les notions et propriétés étudiées s'étendent bien sûr au cas des variables aléatoires discrètes à valeurs dans un ensemble dénombrable infini.

Loi de variable aléatoire discrète: Exemple 1

- On lance deux pièces de monnaie. L'ensemble fondamental comprend 4 événements élémentaires notés PP; PF; FP; FF, de probabilité chacun $1/4$.
- On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de piles obtenus.
- X prend les valeurs 0, 1, 2.
- $\mathbf{Pr}(X = 0) = 1/4$, $\mathbf{Pr}(X = 1) = 1/4$ et $\mathbf{Pr}(X = 2) = 1/4$.
- On représente souvent la loi de probabilité à l'aide d'un tableau:

X	0	1	2
$\mathbf{Pr}(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Loi d'une variable aléatoire discrète: Exemple

- Lancer successif de 2 dés.
- Soit X la variable "somme".
- Sa loi sera une probabilité sur l'ensemble $\{2, 3, \ldots, 12\}$.
  Par exemple:
  $\mathbf{Pr}_X(\{3\}) = \mathbf{Pr}(X^{-1}(\{3\})) = \mathbf{Pr}(\{(1,2),(2,1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{Pr}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Caractéristiques de position: Moyenne ou Espérance

- **Moyenne** au niveau de la population
- Notation $\mathbb{E}(X) = \mu_X = \mu$
- Calcul : somme de toutes les valeurs pondérées par leur probabilité
  - ◇ Variable discrète X
    - ⋆ soit X une $v.a.$ prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et $\sum p_i = 1, i = 1, \ldots, n$:

$$\boxed{\mu = \mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$$

Espérance mathématique : propriétés

Soient des v.a. X et Y et des constantes a, c

- $\mathbb{E}(c) = c$
- $\mathbb{E}(X + c) = \mathbb{E}(X) + c$
- Si $c = -\mathbb{E}(X) \Rightarrow \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0$
  Une v.a. d'espérance nulle est dite **centrée**
- $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

Caractéristiques de position: Exemple

- Exemple 1 : $\mu = (p \times 1) + (q \times 0) = p$
- Exemple 2 : $\mu = 1/6 + 2/6 + 3/6 + 4/6 + 5/6 + 6/6 = 3,5$

Caractéristiques de dispersion: Variance, Écart-type

- **Variance** = mesure de la variabilité autour de l'espérance
- Notation $var(X) = \sigma_X^2 = \sigma^2$
- Définition: $var(x) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$
- Calcul
  - Cas d'une variable discrète X

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i [x_i - \mu]^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (\mathbb{E}(X))^2$$

- σ^2 = Variance , $\sigma =$ Écart-type

Variance : propriétés

- $Var(X) \geq 0$ (somme de carrés)
  - Variance nulle pour une constante
  - Variance faible pour une variable peu dispersée
- Si X possède une unité
  - $\mathbb{E}(X)$ et σ ont la même unité
  - $Var(X)$ a cette unité au carré
- Si c est une constante
  - $Var(c) = 0$
  - $Var(X + c) = Var(X)$
  - $Var(cX) = c^2 Var(X)$
- $Var(X + Y) =?$

Caractéristiques de dispersion: Exemple

- Exemple 1 : $\sigma^2 = p \times (1-p)^2 + q \times (0-p)^2 = p \times q$
- Exemple 2 :
  $\sigma^2 = 1/6[(1-3,5)^2 + (2-3,5)^2 + ... + (6-3,5)^2] = 2.9$.

Fonction de répartition: Définition

- Soit X une v.a. discrète sur Ω tele que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.
- On cherche une fonction définissant la probabilité de tout intervalle $[a; b]$
- Soit l'événement $[X \leq x]$ où x est un nombre, i.e., ensemble des résultats d'expérience dont le codage est inférieur ou égal à x.
- $\mathbf{Pr}([X \leq x])$ dépend de la valeur x
- $F_X(x) = F(x) = \mathbf{Pr}([X \leq x]) =$ **fonction de répartition de X**.

Fonction de répartition: Définition

- **Définition:**

C'est la fonction $F : x \in E \subset \mathbb{R} \to [0, 1]$, définie par:

$$F(x) = \mathbf{Pr}(X \leq x) .$$

Fonction de répartition: propriétés

1. F est une fonction en escalier croissante;
2. $0 \leq F(x) \leq 1$;
3. Si $x < x_1$, alors $F(x) = 0$;
4. Si $x_j \leq x < x_{j+1}$, alors $F(x) = \sum_{i=1}^{j} p_i$;
5. Si $x \geq x_n$, alors $F(x) = 1$;
6. Cas infini dénombrable: $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
7. F est discontinue (continue à droite en tout x_i) réel.
8. En chaque point x de discontinuité, la hauteur du saut
9. $a < b \Rightarrow \mathbf{Pr}([X \leq b]) = \mathbf{Pr}([X \leq a]) + \mathbf{Pr}([a < X \leq b])$
   car $[X \leq a]$ et $[a < X \leq b]$ = événements exclusifs

Fonction de répartition: remarque

- F permet de calculer la probabilité pour que X soit compris entre deux valeurs a et b:

  $$\mathbf{Pr}(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)\,,$$

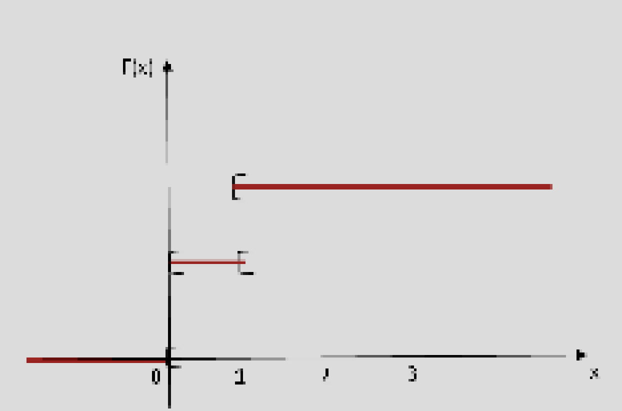
  (penser à la fonction des fréquences cumulées)

- Connaissant la fonction de répartition F d'une variable aléatoire discrète X on peut retrouver la distribution de probabilité de X:

  $$\mathbf{Pr}(X = x_j) = p_j = \sum_{i=1}^{j} p_i - \sum_{i=1}^{j-1} p_i = F(x_j) - F(x_{j-1})\,, j \geq 2\,.$$

Fonction de répartition: exemple d'une v.a. discrète

- Jet d'une pièce : $\Omega = \{P, F\}$; $\mathbf{Pr}(P) = \mathbf{Pr}(F) = \frac{1}{2}$
- V.a. $X : X(F) = 0$; $X(P) = 1$
- Fonction de répartition



Introduction:

- Une variable aléatoire continue prend ses valeurs sur un ensemble infini non dénombrable de points, elle décrit par exemple
  - la durée de vie d'une batterie de voiture,
  - l'heure d'arrivée des voitures à un péage donné d'autoroute,
  - vous roulez à vélo, et votre pneu crève. Intuitivement, la probabilité pour que la crevaison ait lieu sur l'arc $\frown AB$ est proportionnelle à sa longueur: $\theta/2\pi$, où θ est l'angle correspondant à l'arc $\frown AB$. La position de la crevaison est uniformément répartie sur la roue.
- Ces exemple ne peut pas être modélisé à l'aide de variables aléatoires discrètes.

Densité de probabilité: définition

On appelle densité ou densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant:

- f est positive;
- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points ;
- l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Variables alétoire continue: définition

Une variable aléatoire réelle X est dite à densité s'il existe une fonction f_X continue (mesurable) positive de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty]$, telle que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \, ,$$

et vérifiant, pour toute partie A de $\mathbb{R}$, la propriété: $\Pr(X \in A) = \int_A f(x)dx$.

- f_X est alors une densité, appelée densité de X (et de P_X) et X est une variable aléatoire réelle à densité.

Variables alétoire continue: exemple de densité 1

- Dans le cas de la crevaison, on note X l'angle entre la crevaison et la valve. La densité de la loi de X est $f(x) = \frac{1}{2\pi}$; si $x \in [0, 2\pi]$.
- On dit que la loi de X est la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$.

Variables alétoire continue: exemple de densité 2

- on note X la taille des éléves d'une classe (c'est une variable continue). La densité de la loi de X est

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}) \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

- On dit que la loi de X est la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.

Fonction de répartition

- La fonction de répartition de la variable aléatoire X est définie par:

$$F(a) = \Pr(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx\,.$$

- Pour toutes les valeurs a et b appartenant à $\mathbb{R}$, on a donc la relation:

$$\Pr(a \leq X < b) = F(b) - F(a)\,.$$

- On en déduit:

$$\Pr(X = x) = 0 \qquad \Pr(x \leq X < x + dx) = f(x)dx\,.$$

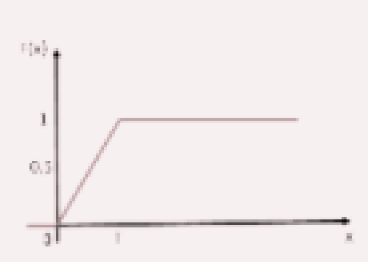
Fonction de répartition: Propriétés

1. F est monotone croissante;
2. $0 \leq F(x) \leq 1$;
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
4. F est continue à droite en tout x réel.
5. $a < b \Rightarrow \mathbf{Pr}([X \leq b]) = \mathbf{Pr}([X \leq a]) + \mathbf{Pr}([a < X \leq b])$
   car $[X \leq a]$ et $[a < X \leq b]$ $=$ événements exclusifs

Fonction de répartition : exemple d'une v.a. continue

- Appel téléphonique dans l'intervalle $[0, T]$, $t =$ instant d'appel :
  $\mathbf{Pr}(t_1 \leq t \leq t_2) = (t_2 - t_1)/T$, $(t_1$ et $t_2 \in [0, T])$

- Fonction de répartition



- Si $x < 0$, l'appel n'a pas eu lieu avant x : $F(x) = 0$
- Si $x > T$, l'appel a eu lieu avant x : $F(x) = 1$
- Sinon $F(x) = \mathbf{Pr}(0 \leq t \leq x) = x/T$

Fonction de répartition: Théorème

- On admet le théorème important suivant:

La fonction de répartition caractérise la loi: deux v.a. ont même loi si et seulement si elles ont même fonction de répartition.

Loi d'une variable aléatoire continue

- Densité de proba $f(x)$
- loi de probabilité $\mathbf{Pr}([a \leq X \leq b]) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
- Propriétés:
  - $f(x) \geq 0$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
  - La fonction de répartition: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Caractéristiques de position: Moyenne ou Espérance

- **Moyenne** au niveau de la population
- Notation $\mathbb{E}(X) = \mu_X = \mu$

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

- L'espérance peut ne pas exister (existe si l'intégrale est définie).
- Valeur de l'espérance mathematique issue d'un calcul:
  - ponctuel pour f connue,
  - théorique pour f inconnue.

L'Espérance Mathematique: Propriétés:

- **Propriétés:**
  - Soient des v.a. X et Y et des constantes a, c
    - $\mathbf{E}(c) = c$
    - $\mathbf{E}(X + c) = \mathbf{E}(X) + c$
    - Si $c = -\mathbf{E}(X) \Rightarrow \mathbf{E}(X - \mathbf{E}(X)) = \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(X) = 0$
      Une v.a. d'espérance nulle est dite **centrée**
    - $\mathbf{E}(aX) = a\mathbf{E}(X)$
    - $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$

Caractéristiques de dispersion: Variance, Écart-type

- **Variance** = mesure de la variabilité autour de l'espérance
- Notation $var(X) = \sigma_X^2 = \sigma^2$
- Définition: $var(x) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$
- Calcul

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (\mathbb{E}(X))^2$$

- σ^2 = Variance , $\sigma =$ Écart-type

Variance : propriétés

- $Var(X) \geq 0$ (somme de carrés)
  - Variance nulle pour une constante
  - Variance faible pour une variable peu dispersée
- Si X possède une unité
  - $\mathbb{E}(X)$ et σ ont la même unité
  - $Var(X)$ a cette unité au carré
- Si c est une constante
  - $Var(c) = 0$
  - $Var(X + c) = Var(X)$
  - $Var(cX) = c^2 Var(X)$
- $Var(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$
- Rappel: $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Remarques:

- Les lois de distribution, ou distributions de probabilités, montrent la probabilité d'apparition de toutes les valeurs d'une variable théorique.
- Les lois de distribution servent d'abord au calcul direct de la probabilité d'apparition de certains événements, une fois que l'on connaît la loi de distribution du phénomène.
- Lors des tests statistiques paramétriques, nous nous référerons à ces mêmes lois de distribution pour trouver la probabilité que les données soient conformes à une certaine hypothèse nulle.
  $\Rightarrow$ La compréhension des lois de distribution suppose que la notion de probabilité soit connue et comprise

Pour définir une v.a.: Résumé

	v.a. discrète	**v.a. continue**
Définition de la loi de probabilité	Tableau des $p_i = \mathbf{Pr}(X = x_i)$	Densité de proba $f(x)$ $\mathrm{Pr}([a \leq X \leq b]) = \int_a^b f(x)dx$ $= F(b) - F(a)$
Propriétés	$p_i \geq 0$ $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$	$f(x) \geq 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ $f(x)dx = \mathbf{Pr}(x \leq X \leq x + dx)$ $f(x)dx \approx \mathbf{Pr}(X = x)$

Bibliographie

- Cours Probabilité, Benchikh Tawfik, http://www.univ-sba.dz/lsps/images/pdf/cours/
- Probabilités et Biostatistique. www.chups.jussieu.fr/polys/biostats/CoursProba1.pdf
- FMPMC Pitié-Salpêtrière - probabilités, cours 1 et 2 www.chups.jussieu.fr/polys/biostats/coursProba-1-2/
- Notions de Probabilités, Roch Giorgi, LERTIM, Faculté de Médecine, Université de la Méditerranée, Marseille, France http://lertim.fr