PROBABILITES

Rappels Mathématiques, Analyse combinatoire

Benchikh Tawfik

Faculté de Médecine, UDL, SBA
$1^{\text{ère}}$ année Médecine

19 Octobre 2016

Plan de cours

Rappels sur les ensembles 1

Notations:

- $\emptyset$ est l'ensemble vide.
- Ω est l'ensemble universel (fondamental).
- $A \subset \Omega$: l'ensemble A est un sous-ensemble de Ω.
- $p \in A \subset \Omega$ si p est un élément A.
- la négation de $x \in A$ est $x \notin A$.

Rappels sur les ensembles 2

Soient A et B deux ensembles quelconques.

- B est partie de A, ou sous-ensemble de A, et l'on note $B \subset A$ ou $A \supset B$, si: $x \in B \Longrightarrow x \in A$.
- $A \cap B$: intersection $\Leftrightarrow$ A **et** B
  - $\diamond$ $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow$ A et B sont **disjoints**
- $A \cup B$: réunion $\Leftrightarrow$ A **ou** B
- $C_\Omega A$ ou $\overline{A}$: complémentaire ou négation $\Leftrightarrow$ **non** A
  - $\diamond$ $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Rappels sur les ensembles 3

- $A - B$: **Différence:** $\Leftrightarrow \{x : x \in A \text{ et } x \notin B\} = C_A B$ (complémentaire de B relatif à A).
- $A \times B$: **produit** $\Leftrightarrow$ est l'ensemble de tous les couples ordonnés (a, b), avec $a \in A$ et $b \in B$.
  - ◇ Exemple: $A = \{a, b, c\}$; $B = \{1, 2\}$,
  - ◇ $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$.

Exercice

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ensembles fini, infinie dénombrable, infinie non dénombrable

- Ensemble **fini** (nombre fini d'éléments)
- Ensemble **infini dénombrable** (les éléments peuvent être numérotés ; exemple: $\mathbb{N}$)
- Ensemble **infini non dénombrable** (les éléments ne peuvent pas être numérotés ; exemple: $\mathbb{R}$)

Ensembles fini, infinie dénombrable, infinie non dénombrable

- √ On pose: $|\Omega| = Card(\Omega) = n$ **nombre d'éléments de** Ω.
- √ En pratique, les ensemble infinis non dénombrables sont:
    - les intervalles de $\mathbb{R}$: $\{x \in [a,b]\}$
    - les intervalles de $\mathbb{R}^2$: $\{(x,y) : x \in [a,b], y \in [c,d]\}$.

Ensembles fini, infinie dénombrable, infinie non dénombrable: Exemple

- $A = \{a, b, c\}$ est un ensemble fini;
- $I = \{x \in [0, 1]\}$ est ensemble infini non dénombrable;
- $A = \{n : n$ est un entier pair $\}$ est un ensemble infini dénombrable.

Famille des parties

Soit un ensemble A quelconque.

- On appelle famille des parties de A l'ensemble des sous-ensembles de A.
    - ◇ Exemple: $A = \{1, 2\} \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.
- Une partition de A est une subdivision de A en sous-ensembles disjoints dont la réunion forme A.
    - ◇ Exemple: $\{\{1\}, \{2\}\}$ est une partition de A.

Notation

Soit une famille d'ensemble $\{A_i\} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ qui peut être finie ou non. On note:

- $\bigcup_i A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$.
- $\bigcap_i A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots$.

Définition, Propriétés

- Soit f une fonction réelle.
  - ◇ L'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ est notée $\int_a^b f(x)dx$= surface (l'aire) en jaune.
  - ◇ $f(x)dx$ = surface en bleue
  - ◇ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $c \in [a, b]$.
  - ◇ $\int_a^b k(f(x))dx = k \int_a^b f(x)dx$.

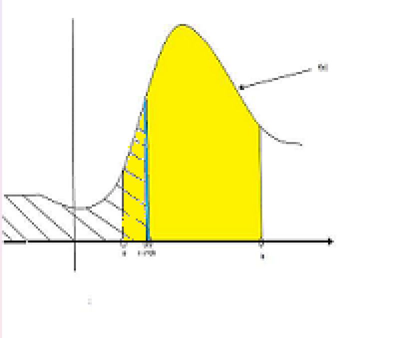

Figure: L'intégrale de la fonction f(x)

Fonction primitive, Propriétés

- $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ = **primitive** de $f(x)$ = surface hachurée
  - varie lorsqu'on fait varier x de $-\infty$ à $+\infty$.
- Si $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, alors $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$. Donc F se déduit de f par intégration, et f se déduit de F par dérivation.
- $\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Objectif de l’analyse combinatoire

- L’analyse combinatoire comprend un ensemble de méthodes qui permettent de déterminer le nombre de tous les résultats possible d’un expérience particulière. La connaisonce de ces méthodes de dénombrement est indisponsable au calcul du probabilité qui constitue le fondement de la statistique.

Principe fondamental

- Lorsqu'une situation (ou un événement) peut se réaliser de n manières et être suivi d'une second situation qui peut se réaliser suivant m manières, alors les deux situation se produire dans l'ordre considéré de $n \times m$ manières.

Exemple

1. Lors de la désignation du bureau d'une association, il y a trois candidats au poste de président et cinq candidat au poste de trésorier. Le nombre de bureaux possibles est alors: $3 \times 5 = 15$.
2. S'il y a 3 candidats au poste de député et 5 candidats à celui de maire, les deux fonctions peut être occupées de $3 \times 5 = 15$ façons.

Factorielle n

- On définit factorielle n, désigner par $n!$ par:

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1.$$

  - Ainsi $5! = 5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 = 120$.

- Pour question de commodité, on définit $0! = 1$.

Arrangement

- Étant donné un ensemble de n objets (éléments), on appelle arrangements de p objets toute suite de p de ces objets (tous distincts et dans un ordre bien déterminée).

- Cette définition implique que
  - pour obtenir un arrangement, il faut choisir p objets parmi n et les ordonner $($ par exemple en leur attribuant une place parmi p ou un numéro de 1 à p $)$,
  - deux arrangement formés de p objets peuvent donc être distincts soit par la nature des objets, soit par leur ordre.

Notation:

On désignera par $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ le nombre d'arrangements de p objets parmi n.

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1).$$

Exemple

1) Combien d'arrangement peut-on réaliser en prenant deux objets parmi 4?

- Soient les objets: a,b,c,d. En choisissant 2 objets et en les ordonnant, par exemple en les alignant, on peut obtenir $A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 4 \times 3 = 12$ arrangements:

$$ab/ac/ad/bc/bd/cd/ba/ca/da/cb/db/dc.$$

Exemple

2) De combien de manière peut-on placer 3 dossiers différents dans 15 casiers vides, à raison d'un dossier par casier ? $N = A_{15}^{3} = 2730$ manières différentes.
3) Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien peut-on former de mots de 5 lettres différentes: $N = A_{26}^{5}$.

Remarque

- Un arrangement de p objets choisis parmi n peut être obtenu en tirant d'abord un objet parmi les n, puis un deuxième parmi les $(n-1)$ restants, ect. Le rang du tirage sert alors à ordonner les objets retenus.

Permutation

- Cas particulier d'arrangement avec $p = n$. Donc une permutation de n objets est une suite ordonnée de ces n objets.

◦ Deux permutations de n objets donné ne peuvent donc différer que par l'ordre de ces objets.

Dénombrement:

P_n: nombre de permutation de n objets = $A_n^n = n!$.

Exemple Les permutations possibles de 3 lettres a,b,c sont:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba\,.$$

Donc: $P_n = n! = 3! = 6$ permutations.

Arrangement avec répétition

- On peut imaginer un type de tirage entièrement différent:
  - on tire d'abord un objet, on remet parmi les n objets après avoir noté sa nature, et on répète p fois l'opération.
  - La suite obtenue s'appelle un "arrangement avec répétition" de p objets parmi n.

- Un arrangement avec répétition est un arrangement où chaque éléments peut-être répété jusqu'à p fois.

◦ Le nombre total de tels arrangement est donc :

$$\alpha_n^p = n^p \, .$$

Exemple

1. Le nombre total d'arrangement d'ordre 2 des lettres a,b,c est: $\alpha_3^2 = 3^2 = 9$. (aa,ab,ac,ba,bb,bc,ca,cb,cc).
2. Combien de nombre peut-on former avec les chiffres 1,2,3 et 4: $\alpha_n^p = 4^4$.
3. Combien de nombre peut-on former avec les chiffres 1,2,3 et 4, chaque chiffre n'étant présent qu'une fois: permutation avec répétition: $4! = 24$ nombres.

Combinaison: définition

- Étant donné un ensemble de n objets distincts, on appelle combinaison de "p" de ces objets tout ensemble de p de ces objets sans ordre déterminé $($sans considération d'ordre$)$.

◦ Deux combinaisons contenant p objets peuvent donc seulement différer par la nature des objets.

Dénombrement (Calcul):

Ce nombre est donné par:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Exemple

Exemple 1:

Les combinaisons possibles de 3 lettres parmi les 4 lettres A, C, G, T sont:

$$ACG, ACT, CGT, AGT$$

Donc on a $C_4^3 = 4$ combinaisons.

Exemple

1. A l'oral d'un examen, un étudiant doit répondre à 5 questions sur 8. Combien a-t-il de choix possibles? $(C_8^5 = 56)$.

2. Même question si les 3 premières sont imposées: $C_5^2 = 10$ (il est obligé de répondre aux 3 premières, il ne lui reste donc 2 questions à choisir parmi les 5 qui restent).

3. Même question s'il doit répondre au moins à 4 des 5 premières (au moins 4 sur 5 $\Leftrightarrow$ soit 4 sur 5 "ou" 5 sur 5).

   Pour le 1^{er} cas: C_5^4 et C_3^1 (1 questions parmi les 3 qui reste), donc on a: $C_5^4 \times C_3^1$ choix.

   Pour le 2^{ime} cas: C_5^5 et C_3^0, donc on a $C_5^5 \times C_3^0 = C_5^5$ choix.

   D'où le nombre de choix est : $C_5^4 \times C_3^1 + C_5^5 = 16$.

Exemple

1. Quel est le nombre de groupe de six personnes que l'on peut former avec 4 garçons et de 6 filles si l'on veut qu'ils contiennent obligatoirement:
   - seulement 2 garçons.
   - au moins 2 garçons.
2. Nombre de mains différentes de 8 cartes dans un jeu de 32 cartes. ($C_{32}^{8} = 10518300$).

Exercice 1

a) Combien y a-t-il de possibilités d'aligner 12 élèves ?

Exercice 2

1. Calculez le nombre de tiercés possibles lorsque 18 chevaux prennent le départ.
2. De combien de manières différentes peut-on élire un président et un vice-président parmi 10 personnes ?
3. Combien de séries différentes peut-on obtenir en jouant à "pile ou face" 7 fois?
4. Combien de séquences peut-on lire sur un compteur de voitures ? Ce compteur est composé de 5 cylindres sur chacun desquels sont gravés les chiffres de 0 à 9.

Exercice 3

1. Combien de glaces distinctes avec 4 parfums différents peut-on faire avec 9 parfums ?
2. Combien de mains de 5 cartes peut-on former à partir d'un jeu de 9 cartes ?
3. Pourquoi obtient-on le même résultat

Exercice 4

Le traitement d'un malade nécessite la prise de 2 sirops différents et de 3 sortes de comprimés. Le médecin dispose de 3 sortes de sirops et de 4 sortes de comprimés qui auraient des effets analogues.
De combien de façons pourra-t-il rédiger son ordonnance sachant toute fois, qu'un sirops précis ne doit pas être pris en même temps qu'une sorte de comprimés précis.

Bibliographie

- Cours Probabilité, Benchikh Tawfik, http://www.univ-sba.dz/lsps/images/pdf/cours/
- Probabilités et Biostatistique. www.chups.jussieu.fr/polys/biostats/CoursProba1.pdf
- FMPMC Pitié-Salpêtrière-probabilités, cours 1 et 2. www.chups.jussieu.fr/polys/biostats/coursProba-1-2/
- Notions de Probabilités, Roch Giorgi, LERTIM, Faculté de Médecine, Université de la Méditerranée, Marseille, France http://lertim.fr